

最適化理論を用いた偏心矢法の弦配置に関する検討

齊藤 大樹* 田中 博文 (鉄道総合技術研究所)

A Study of the Optimal Chord-Length Design in Asymmetrical Chord Offset Method

Daiki Saito*, Hirofumi Tanaka (Railway Technical Research Institute)

The asymmetrical chord offset method is a measurement system applied for track irregularity inspection. It can also be applied to the measurement of rail surface roughness such as rail corrugation, but its optimal design has been seldom examined. In this paper, we developed an optimization model to minimize the noise floor in the asymmetrical chord offset measurement and experimented it on the design of rail surface roughness continuous measurement trolley. The model is formulated as a maximization of the minimum gain within the target wavelength region. Considering its non-linearity and multi-modality, the heuristic algorithm of the Evolutionary Solver available on MS Excel is used at the optimization.

キーワード : 軌道検測, 偏心矢法, レール凹凸, 最適化理論, メタヒューリスティクス

(Track measurement, asymmetrical chord offset method, rail surface roughness, optimization theory, meta-heuristics)

1. 緒言

列車の走行安全性や乗り心地の確保のためには、軌道(レール)の幾何的形状を管理することが重要である。そのために行われている軌道検測の技術には、正矢法と偏心矢法⁽¹⁾があり、軌道変位のうち高低変位(レール長手方向の鉛直方向の形状)と通り変位(同水平方向の形状)の検測において用いられる。このうち偏心矢法は、2台車方式の軌道検測車で実用化されており、これによって測定された偏心矢量は、デジタルフィルタ処理によって、一般的な管理指標である10m弦正矢量に変換して管理に活用されている。一般の偏心矢法において、基準弦上の測定位置の前後長さの組合せ(本稿で「弦配置」という。)は、検測特性(測定対象の形状のうち、各波長成分に対する検測倍率)に大きく影響するが、軌道検測車における偏心矢法の弦配置は、ベースとなる旅客型鉄道車両の車軸配置等に依存して非常に制約されており、検測特性の最適性は理論的に検討する必要性が低かったため、詳細に解明されてきたとは言い難い。

さて、一般の偏心矢法は、全体の弦長を短くした測定装置を構成することでレール波状摩耗等のレール凹凸(主としてレール頭頂面の鉛直方向形状のうち波長約1m以下の成分)の測定にも適用することができる。既にレール凹凸連続測定装置⁽²⁾⁽³⁾として実用化されているが、当該装置においても、測定対象とするレール凹凸の波長帯域での検測倍率が十分であることを前提として弦配置を設計しており、その最適性まで詳細に検討されたものではなかった。当該装置の場合、軌道検測車と異なって、鉄道車両としての設計上の制約を受けないことから、より高い自由度で弦配置の検討

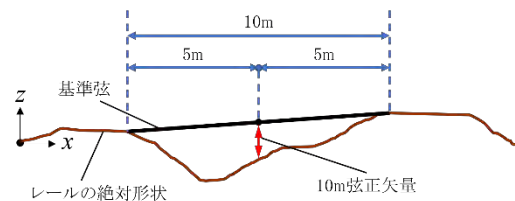


図1 10m弦正矢法の測定原理

を行う余地がある。

そこで本研究では、最適化理論のアプローチから検討を行い、目的とする波長帯域を所与として、偏心矢法で最も精度良く測定するための弦配置を設計する最適化モデルを提案するとともに、Microsoft Office Excelと、付属のExcelソルバー⁽⁴⁾を用いて求解可能なツールを実装した。そして、本手法の具体的な適用先として、前述のレール凹凸連続測定装置の設計⁽³⁾を一例に試算を行い、提案手法の妥当性を考察した。

2. 偏心矢法による軌道検測の概要と課題

(2・1) 正矢法の検測特性 軌道変位のうち、高低変位および通り変位の測定・評価に用いられる10m弦正矢法では、図1に示すようにレール上に10mの基準弦を張り、その中間点でレール上の測定点との離れを測る。これは数学的には、レールの絶対形状に対して伝達関数を掛けたものと見なすことができ、軌道検測技術の領域では、各波長成分に対する検測倍率(利得倍率)の関係を検測特性と呼んでいる。10m弦正矢の検測特性を図2に示す。波長10mで検測倍率が2倍となる一方で、波長5m, 2.5m, ... (5mの1/n

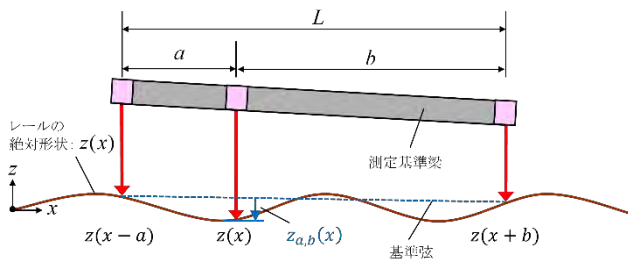


図 2 偏心矢法における座標系

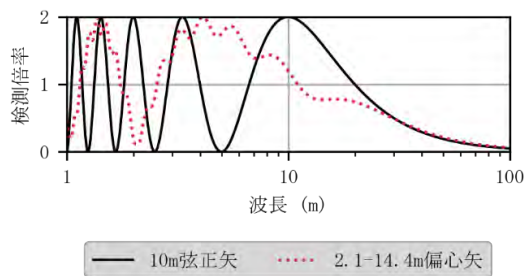


図 3 正矢法および偏心矢法の検測特性の例

倍)で0倍となり、このような波長成分は原理的に捉えることができない。これは一般の弦長の正矢法においても言えることで、弦長の半分の $1/n$ 倍で検測倍率が0となる性質を持つ。検測倍率が低下する波長成分を含む帯域は評価に適さないとされているため、10m 弦正矢による軌道変位をデータ処理する際は、波長 6m 以下の成分はローパスフィルタによりカットされることが一般的である。

〈2・2〉 偏心矢法の検測特性 正矢法を一般化して、弦の中間点以外でレール上の測定点との離れを測るのが偏心矢法である。図 2 に、偏心矢法における座標系を示す。同図に示すように、レール長手方向に x 軸を取り、レールの絶対形状を $z(x)$ とする。弦配置 a, b による偏心ベクトル $z_{a,b}(x)$ は式(1)で与えられる。

$$z_{a,b}(x) = -\frac{b}{a+b}z(x-a) + z(x) - \frac{a}{a+b}z(x+b) \quad (1)$$

式(1)から、 $z(x) = A_R e^{i\omega x}$, $\omega = 2\pi/\lambda$ の変換により、式(2)を得る。

$$z_{a,b}(x) = A_R e^{i\omega x} \left\{ -\frac{b}{a+b} e^{-i\omega a} + 1 - \frac{a}{a+b} e^{i\omega b} \right\} \quad (2)$$

レールの絶対形状 $z(x)$ から偏心ベクトル $z_{a,b}(x)$ への伝達関数 $H(\omega)$ は式(3)で与えられる。

$$H(\omega) = \frac{z_{a,b}(x)}{z(x)} = -\frac{b}{a+b} e^{-i\omega a} + 1 - \frac{a}{a+b} e^{i\omega b} \quad (3)$$

偏心矢法における検測特性とは、 $H(\omega)$ の振幅 $|H(\omega)|$ のことを言う。図 3 に、正矢法および偏心矢法の検測特性の例として 10m 弦正矢および 2.1-14.4m 偏心矢の検測特性を示す。このように両者の検測特性は異なるため、それぞれの測定で直接得られる波形は一般に異なるものになる。

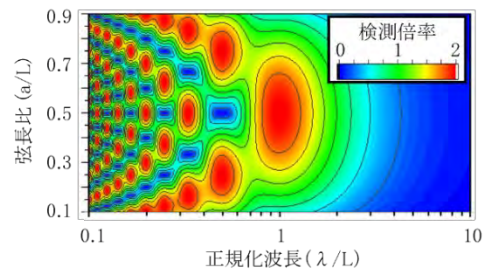


図 4 偏心矢法での検測倍率 (弦長で正規化)

検測倍率 $|H(\omega)|$ について、 $a, \lambda (= 2\pi/\omega)$ をそれぞれ弦長 $L (= a + b)$ で正規化して図示すると図 4 のようになり、 b が a の整数倍 (または整数分の 1) となる場合に、検測倍率=0 になる波長が存在することが知られている。同図より、一般に $|H(\omega)|$ は多峰性の関数であり、測定に適した弦配置 a, b を一概に決定することは容易ではない。また、目安として検測倍率 < 0.2 の波長帯では、測定ノイズの影響が無視できなくなり、後述する弦長変換処理にも適さないため、測定の目的に応じて、 a, b を適切に選んで、必要な波長帯域で検測倍率が小さくならないようにする必要がある。

〈2・3〉 フィルタ処理による弦長変換と復元処理

偏心矢の伝達関数の逆変換フィルタ、および他の偏心矢の伝達関数との合成フィルタにより、フィルタ特性が発散しない波長帯域においては、偏心ベクトルを軌道の原形状または別の弦配置の偏心矢ないし正ベクトルに変換することができる^{(1)⑤}。前者は復元処理、後者は弦長変換と呼ばれており、鉄道総研で開発した軌道保守管理データベースシステム「LABOCS」⁽⁶⁾ はこれらの処理を得意としている。しかし前述のように、測定ノイズの影響等のため、デジタルフィルタで実用的に処理ができるのは、測定した元の偏心矢の検測特性における検測倍率が目安として約 0.2 以上の波長帯に対してである。なお、偏心ベクトルからフィルタ処理により変換した原形状の推定値は、波長帯域が限定されていることから、絶対形状と区別して「復元波形」と呼ぶ。実務の管理においては、測定データが偏心ベクトルのまま取り扱われることはほとんどなく、変換された正ベクトルや復元波形によって分析・管理・検討が行われることが多い。

3. 偏心矢弦配置の最適化モデル

〈3・1〉 モデルと定式化 偏心矢法の測定装置を設計するにあたり、目的とする波長帯域のレール長手方向の形状を、測定ノイズの影響を小さくして精度良く測定できる弦配置とすることが望ましい。検測倍率が小さい波長ほど測定ノイズの影響を受けやすくなることを考えれば、検測倍率 $|H(\omega)|$ の最小値を最大化するような弦配置を求めればよいと考えられる。ただしこのとき、 $0 < \lambda < \infty$ の全波長

の測定を行うことは偏心矢法の原理により不可能であるから、測定したい波長 λ の範囲 $\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_U$ を与えて、その範囲の検測倍率最小値を最大化するモデルを提案する。なお、対称性を考慮して、以後 $a \leq b$ とし、 a, b をそれぞれ短弦、長弦と呼ぶ。

前述のレール凹凸連続測定装置⁽²⁾⁽³⁾を前提として、装置全体の設計を考えると、装置の形態や使用方法の要求により、外形寸法の制約が比較的強く存在すると考えられる。弦配置の設計検討においては弦長 L を一定の範囲内に収める制約条件として現れる。また、短弦 a は隣り合って設置する変位センサ自体の寸法により下限が制約される。

以上のことから、装置設計上の制約の下で、目的とする波長帯域の測定精度を最大化する最適化問題は、以下のように定式化できる。ただし、意味を明確にするためにやや冗長にしてある。

$$\text{maximize} \quad \min_{\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_U} |H(\omega)| \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad (3)$$

$$a + b = L \quad (5)$$

$$L_L \leq L \leq L_U \quad (6)$$

$$l \leq a \leq b \quad (7)$$

$$l \leq a \leq L_U/2 \quad (8)$$

$$\omega = 2\pi/\lambda \quad (9)$$

ここで、

変数	λ	軌道変位 (レール凹凸) の波長
	ω	空間周波数
	a, b	短弦, 長弦の長さ
	L	弦長
定数	λ_L, λ_U	測定対象波長の下限, 上限
	L_L, L_U	装置設計上の弦長の下限, 上限
	l	短弦の下限値

変数 ω, λ は制約条件(9)により片方を消去することができる。また、制約条件(8)は(5)(6)(7)から導かれるので冗長であるが、このように明示的に入れておく方が、ソルバーで高速に解けるようになる場合がある。

〈3・2〉 解法と実装 前述した偏心矢弦配置の最適化モデルは非線形の式を含み、多数の局所解をもつ場合があるため、大域的最適解を解析的に求めることは困難である。しかし、装置の設計上、解には一定の数値精度があれば十分であり、解析的な厳密解は不必要であることを考慮すれば、波長 λ か空間周波数 ω を離散化して、遺伝的アルゴリズムやシミュレーテッド・アニーリングのようなメタヒューリスティクスを適用するのが適していると考えられる。

ここでは、波長 λ について $\Delta\lambda = 0.1$ 刻みで離散化を行い、Excel ソルバー⁽⁴⁾に搭載されているエボリューションナリーエンジン (メタヒューリスティクスアルゴリズムの一つ) を使って解くように実装した。モデルに必要な定数を所定

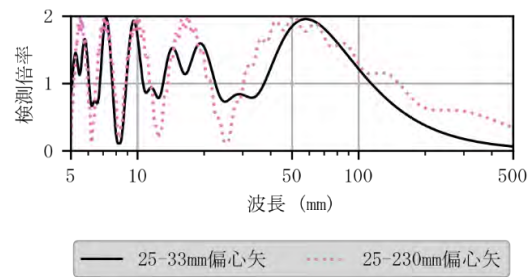


図 5 限定モデルの解における検測特性

のセルに入力してボタンを押すことで最適化計算を実行することができる。なお Excel ソルバーは Microsoft Office Excel に標準で付属しており、容易に利用できる。

4. レール凹凸連続測定装置の設計例

〈4・1〉 既存装置の改造の検討例 ここでは軌道検測車とは異なり、その構造上偏心矢弦配置を比較的自由に設定できるという特徴を有している既開発のレール凹凸連続測定装置⁽²⁾⁽³⁾を例に、提案モデルを用いて偏心矢弦配置の最適設計を検討する。具体的には、文献⁽³⁾で検討されているレール凹凸測定用の偏心矢弦配置について、本モデルを用いて検証を行う。既開発の装置においては、日本国内の在来線でよく知られているレール波状摩耗の基本波長を考慮して 25-230mm 偏心矢を構成していた⁽²⁾。しかし、レール波状摩耗の成長が飽和してきた際に出現する、基本波長の $1/n$ 波長の凹凸成分⁽⁷⁾を測定するには、既存装置の偏心矢弦配置での把握が困難な波長 30mm 程度以下の凹凸成分を感度よく捉える必要がある。文献⁽³⁾では、既存装置に変位センサを一つ追加し、短弦 $a = 25$ (mm) を共有したもう一つの偏心矢を構成する改造が検討された。

この検討を本モデルで表すと、設定するパラメータ (定数) は $[\lambda_L, \lambda_U] = [10, 30], [L_L, L_U] = [50, 230], l = 25$ とした上で、制約条件(8)を

$$a = l \quad (10)$$

で置き換え、実行可能領域を限定したものとなる。ここで、レール・車輪間のコンタクトパッチ (接触楕円) の大きさを考慮し、 $\lambda_L = 10$ (mm) としている。このモデルを便宜上、限定モデルと呼ぶ。

限定モデルを 3・2 節で示したように Excel ソルバーで計算した結果、 $b^* = 33.332$ (mm) を得て、このときの検測倍率最小値は $\lambda^* = 12.5, 25.0$ (mm) で $\min|H(\omega)| = 0.742$ であった。得られた解での検測特性を図 5 に示す。この結果は、文献⁽³⁾での検討とよく一致し、既存装置の改造として好適な設計であることを示唆する。

〈4・2〉 非限定モデルでの検討例 前節の場合と異なり、短弦 a を固定しない場合で検討を行った。すなわち、制

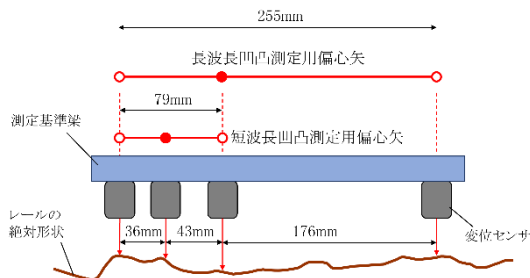


図6 非限定モデルの解で想定した装置の構成

約条件(10)を用いずに(8)をそのまま用いるモデルで、パラメータの設定は前節と同じくしたものである。ただしこの場合でも、変位センサの寸法上の制約から、 $l = 25$ (mm)が必要となる。

同様に求解した結果、弦配置 $(a^*, b^*) = (36, 43)$ 、弦長 $L^* = 79$ (mm)が得られ、このとき $\min |H(\omega)| = 0.856$ であり、短弦を25mmに固定する場合よりも検測倍率の最小値が改善した。図6に、非限定モデルでの解を想定した装置の構成を示す。全長255mmである既存装置の測定基準梁を流用する場合、36-43mm 偏心矢と変位センサを部分的に共有して、79-176mm 偏心矢を構成することができる。図7に、この両者の偏心矢の検測特性を示す。36-43mm 偏心矢では約7.4~384mmの波長帯域で0.2以上の検測倍率を得ることができるほか、79-176mm 偏心矢は図示した範囲の外側で約1145mmまで0.2以上の検測倍率をもつことが特長として挙げられる。したがって、レール凹凸の管理目的に応じて、波長約8~300mmの帯域は36-43mm 偏心矢を、波長約50~1000mmの帯域は79-176mm 偏心矢を使い分けることによって、管理上有効なデータ処理が可能になるものと考えられる。

〈4・3〉 検討結果の活用上の課題 本モデルで得られた解を装置の設計に反映し、測定に活用するにあたり、留意しておくべきだと考えられる事項を述べる。第一に、求解にメタヒューリスティクスを用いるため、アルゴリズムのパラメータや初期解に応じて、異なる局所最適解に収束する可能性があり、必ずしも大域的最適解が得られる保証がない点である。この点は、複数の初期解を同時に用いるマルチスタートを適用する等、ソルバー上のテクニックを活用することである程度は実用性を担保することができる。

第二に、装置の施工精度に関する点である。モデルで求めた解において、目的とした波長帯の中で検測倍率が激しく振動するような場合においては、偏心矢の弦配置に対して、検測倍率の感度が非常に高い波長が存在する可能性がある。つまり、組み上げた測定装置の弦配置の精度を担保しないと、所望の検測倍率や測定精度が、波長によっては得られない可能性がある。したがって、弦配置の精度管理の水準

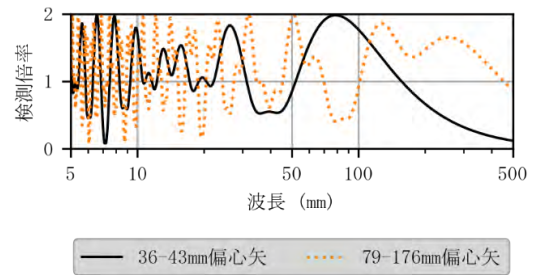


図7 非限定モデルの解における検測特性

は、検測特性を感度分析することなどにより別途検討しておくことが望ましい。また、変位センサの測定誤差や、弦配置の施工精度を加味したうえでの最適設計の検討は、今後の課題である。

5. 結言

本研究では、偏心矢法を用いてレール長手方向の軌道形状を精度よく測定するための最適弦配置を求める最適化モデルを提案し、汎用のヒューリスティックソルバー（Excelソルバーのエボリューションナリーエンジン）を用いた計算ツールを実装した。具体的な適用例としてレール凹凸連続測定装置の設計を対象に試算を行い、提案手法の妥当性を考察した。その結果、波長10~30mmの帯域で検測倍率を従来よりも向上する弦配置案を得た。ただし、実際の装置を製作する際には施工精度等に留意しながら結果を活用する必要があると考えられる。

しかし本モデルは、現状において、装置設計の検討材料として有用なデータを提供すると考えられる。本モデルや実装したツールは、今後のさまざまな装置設計に活用していくとともに、レール凹凸連続測定装置の改良によって、既存装置では明らかにできていなかった短波長レール凹凸の測定・検証を行い、効果的なレール凹凸管理手法を開発することを検討している。

文 献

- (1) 竹下邦夫：「偏心矢法による軌道狂い検出法」, 鉄道総研報告, Vol.4, No.10, pp.18-24, (1990)
- (2) 田中博文, 梶原和博, 清水惇, 網干光雄：偏心矢法を用いたレール凹凸連続測定装置の開発とレール波状摩耗測定への適用, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.88 (2019)
- (3) 田中博文, 梶原和博：「レール凹凸連続測定装置の検出波長帯域の拡張に関する検討」, 土木学会第77回年次学術講演会論文集, VI-941, (2022)
- (4) Fylstra, Daniel, et al: "Design and use of the Microsoft Excel Solver." Interfaces Vol. 28, No. 5, pp.29-55 (1998)
- (5) 吉村彰芳：「軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の検討とその適用」, 土木学会論文集, Vol.377/IV-6, pp.117-126, (1987)
- (6) 古川敦：「パソコンで軌道を管理する —LABOCSの開発—」, RRR, Vol.73, No.6, pp.16-19, (2016)
- (7) 田中博文, 梶原和博, 網干光雄：「営業線におけるレール波状摩耗の成長機構と進展過程の検証」, 鉄道総研報告, Vol.34, No.4, pp.17-22, (2020)