

加振試験による軌道部材のパラメータ同定手法に関する基礎的検討

○ [土・機] 梶原 和博 [土・機] 田中 博文 (鉄道総合技術研究所)

A fundamental study on parameter identification method for railway track components
by impact hammer test

○Kazuhiro Kajihara, Hirofumi Tanaka (Railway technical research institute)

The mass, stiffness, and damping coefficient of railway track components, e.g. rail pad and ballast layer, are important factors that determine the actual dynamic behavior of railway track. However, these parameters are site- and environment-specific and consequently difficult to assess under in-situ condition. This study therefore reports the applicability of the experimental identification method for assessing mass, stiffness, and damping characteristic of in-situ track components. In addition, the effect of measurement noise on the accuracy of parameter identification was investigated through a series of numerical simulations.

キーワード: 軌道部材, 加振試験, 周波数応答関数, パラメータ同定, 質量, 剛性, 減衰係数

Key Words: Track component, impact hammer test, frequency response function, parameter identification, mass, stiffness, damping coefficient

1. はじめに

軌道を構成する各部材のパラメータ (質量, 剛性, 減衰係数) は, 軌道の動的な挙動を決定する重要な指標である。これらのパラメータを同定できれば, 軌道の動的な応答を精度よく再現できるだけでなく, 敷設・供用に伴う軌道部材の劣化程度に関する定量的評価や, 材料交換による振動・騒音対策の検討に役立つことが期待される。しかし, 軌道パッドのような軌道部材のパラメータは室内試験により求められることが一般的であり¹⁾²⁾, 敷設状態でこれらの値を把握することは容易でない。

そこで本研究では, 敷設供用下における軌道部材のパラメータを同定する実用的な手法の基礎検討として, 加振試験で得られる周波数応答関数 (以下, **FRF**) から各軌道部材の質量, 剛性, 減衰係数を同定する手法を検討した。また, 実際の加振試験を想定した数値シミュレーションにより, 観測値に含まれる測定ノイズがパラメータの同定精度に与える影響を把握した。

2. 手法の検討

構造物の振動特性を表現する数学モデルを設定することを系の同定といい, 理論的同定法と実験的同定法がある。

理論的同定法では, 有限要素法のように質量を粘性減衰およびばねで連結した離散モデルで表現し, 構造物の質量行列および剛性行列を求めるが, 減衰特性を理論的に求めるに至っていないことが難点とされる³⁾。

実験的同定法は, 振動実験で計測された構造物の応答から振動系を同定する手法であり, 求める特性に応じて 2 種類に分けられる。1 つは実験モード解析と呼ばれ, 加振試験で得られた構造物の伝達関数に適合するように, 固有振動数, 固有モード, モード減衰比, モード質量, モード剛性等のモードパラメータを決定する手法であり, 計算手法は汎用のソフトウェアや測定ツールに実装され広く普及している。モードパラメータは, 振動現象の把握を容易とするため, トラブルシューティングに便利である。しかし, 構造物の物理特性 (質量, 剛性, 減衰係数) を直接表現する量ではないため, 結果の利用には制限を受ける³⁾。

2 つ目は, 構造物の応答から特性行列を同定する手法である。ここで特性行列とは, 振動系を運動方程式で記述した際の質量, 剛性, 減衰行列の総称である。この方法は, 大熊ら^{例え4)}による方法に代表され, 鉄道車両のパラメータ同定への適用が検討された事例⁵⁾もある。本手法は, 質量, 剛性, 減衰係数といった構造物の物理特性を直接求めることができるが, 実験誤差を含む加振試験の結果から真の特

性を同定することが困難といった難点がある⁹⁾。

ここで、軌道・車両の振動を理論計算する力学モデルのうち、比較的計算が容易なモデルとして軌道を単純な質点とばね系に置き換えたモデル⁷⁾が提案されており、マルチボディダイナミクス等の軌道・車両の運動解析に適用された事例^{例えは⁸⁾}がある。同手法では、弾性床上の梁理論を用いて軌道を模した梁のたわみと運動エネルギーを計算し、軌道の振動に寄与する質量とばねの範囲(有効長)を算出し、軌道を等価な質点・ばね系へ単純化する手順を踏む。その他に、軌道に輪軸を落下させた際の動的な応答から、軌道全体のばね係数と減衰係数を求める手法⁹⁾が提案されており、軌道動的モデルのパラメータ同定に適用された例¹⁰⁾がある。しかし、これにより求められる軌道の特性値は軌道全体のものであるため、各軌道部材の特性を評価することは困難である。以上の背景より、軌道の加振試験の実測値から、特性行列を簡易に求める手法があると便利である。

そこで本研究では、大熊ら⁴⁾や瀧上ら⁵⁾に代表される特性行列を用いた実験的同定法を適用し、軌道部材のパラメータ同定を試みた。また、実際の加振試験を想定した数値シミュレーションにより、測定値に含まれるノイズが、パラメータの同定精度に与える影響を把握した。

3. 同定手法の概要

3.1 振動モデル

本研究では、大熊ら⁴⁾や瀧上ら⁵⁾の手法を軌道部材のパラメータ同定に適用するにあたり、図-1に示すバラスト軌道を想定した2自由度振動系を仮定した。同図の m_1 、 m_2 はまくらぎとレールの質量(kg)、 k_1 、 k_2 は道床バラストと軌道パッドに相当する剛性(N/m)、 c_1 、 c_2 は道床バラストと軌道パッドに相当する減衰定数(Ns/m)、 x_1 、 x_2 はまくらぎとレールの応答変位(m)、 $f(t)$ はレールに作用する加振力(N)である。なお、上記に述べた各物理量は、いずれも軌道片側の値である。また、 k_2 は軌道パッドに相当するパラメータとしているが、実際にはレール締結装置が有する剛性との合算値であることに留意されたい。ここで、加振試験を想定して加振力はレール要素の位置に与え、レールとまくらぎの応答振動加速度を観測する。

3.2 特性行列の同定手法

本研究で適用するFRFを用いた特性行列の同定手法⁴⁾

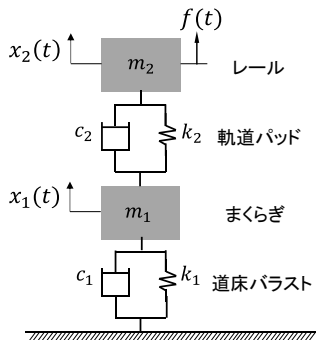


図-1 バラスト軌道を想定した振動モデル

の概略を以下に示す。まず、一般粘性減衰を仮定した多自由度振動系の運動方程式は以下のように表される。

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

ここに、 $\{x(t)\}$ は応答変位ベクトル、 $\{f(t)\}$ は加振力ベクトル、 $[M]$ は質量行列、 $[C]$ は減衰行列、 $[K]$ は剛性行列である。次に、式(1)をラプラス変換の形式で書き変えると、以下のように表される。

$$([M]s^2 + [C]s + [K])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (2)$$

ここに、 s はラプラス演算子、 $\{X(s)\}$ と $\{F(s)\}$ はそれぞれ応答変位ベクトルと加振力ベクトルのラプラス変換を表す。次に、式(2)の $F(s)$ を入力、 $X(s)$ を出力とみなして、 $X(s)$ に関する式に変形すると、以下を得る。

$$\{X(s)\} = ([M]s^2 + [C]s + [K])^{-1} \{F(s)\} \quad (3)$$

ここに、式(3)の右上の添え字“-1”は逆行列を表す。次に、軌道の加振試験では出力として加速度を観測することを想定し、式(3)を以下のように変形する。

$$s^2 \{X(s)\} = s^2 ([M]s^2 + [C]s + [K])^{-1} \{F(s)\} \quad (4)$$

次に、 j を虚数単位、 ω を角周波数(rad/s)として、式(4)において $s = j\omega$ を代入すると、以下を得る。

$$-\omega^2 \{X(j\omega)\} = -\omega^2 (-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])^{-1} \{F(j\omega)\} \quad (5)$$

ここで、式(5)の左辺は応答変位ベクトルの2回微分であり、応答加速度ベクトルとなる。よって、振動系のFRF(アクセラランス) $[H(j\omega)]$ は、応答加速度ベクトルと加振力ベクトルの比であるから、以下のように表される。

$$[H(j\omega)] = -\omega^2 (-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])^{-1} \quad (6)$$

次に、求めたい未知の質量、剛性、減衰行列の推定値を $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ として、式(6)の左から $-\omega^2 [M]$ 、 $j\omega [C]$ 、 $[K]$ をそれぞれ乗じると、以下ようになる。

$$-\omega^2 [M][H(j\omega)] = (-\omega^2)^2 [M] (-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])^{-1} \quad (7)$$

$$j\omega [C][H(j\omega)] = -\omega^2 j\omega [C] (-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])^{-1} \quad (8)$$

$$[K][H(j\omega)] = -\omega^2 [K] (-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])^{-1} \quad (9)$$

式(7)から式(9)をそれぞれ足し合わせ、 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ がそれぞれ真値と等しいとすると、以下の式を得る。

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])[H(j\omega)] = -\omega^2 I \quad (10)$$

ここに、 I は単位行列である。加振試験で得られるFRFは推定値であるため、式(10)のFRFを推定値 $[H(j\omega)]$ に書き換えると、以下ようになる。

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K])[H(j\omega)] = -\omega^2 I \quad (11)$$

次に、 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ は実行列、 $[H(j\omega)]$ は複素行列であるから、式(11)を実部と虚部に関する2つの式に分け、未知数 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ を分離して行列表記すると、以下を得る。

$$\begin{bmatrix} [H_R(j\omega)]^T - \omega^2 [H_R(j\omega)]^T - \omega [H_I(j\omega)]^T \\ [H_I(j\omega)]^T - \omega^2 [H_I(j\omega)]^T - \omega [H_R(j\omega)]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K]^T \\ [M]^T \\ [C]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 I \\ O \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 $[H_R(j\omega)]$ 、 $[H_I(j\omega)]$ は $[H(j\omega)]$ の実部と虚部、 O は零行列、右上の添え字 T は転置を表す。式(12)において、未知数は左辺第2項の特性行列のみであり、その他は加振試験の結果から構成することができる。この式を、次式のような1次式の形式に変形し、未知数（特性方程式の各要素）に関する連立一次方程式に帰着させることで、最小二乗法を用いて特性行列を求めることができる。

$$[A]\{x\} = \{g\} \quad (13)$$

ここに、 $[A]$ は式(12)の左辺第一項から構成される係数行列、 $\{x\}$ は特性行列の各要素で構成される列ベクトル、 $\{g\}$ は式(12)の右辺から構成される列ベクトルである。なお、特性行列を同定するためには、 $[A]$ は行数（連立方程式の数）が列数（未知数の数）よりも大きい行列である必要がある。特性行列の各要素は、振動系の各質量、剛性、減衰係数から構成されているため、同定した $\{x\}$ からこれらの値を求めることができる。同定手法に関する詳細は、参考文献⁴⁾⁵⁾を参照されたい。

4. パラメータの同定

4.1 計算条件

本研究では、図-1に示した2自由度振動系に対して、数値解析ソフトウェア MATLAB を用いて動的応答シミュレーションを行い、3.2節で述べた手法によりパラメータを同定した。

パラメータの同定手順は以下のとおりである。まず、図-1に示した力学モデルに、後述するパラメータを設定した。次に、実際の加振試験を想定し、レール要素を鉛直下向きに60kNで衝撃加振した際の応答加速度波形から、レールとまくらぎのFRF（アクセラランス）を算出した。最後に、3.2節で述べた方法により、レールとまくらぎの質量、軌道パッドおよび道床バラストに相当する剛性と減衰係数を同定した。なお、動的応答シミュレーションのサンプリング周波数は10kHz、観測時間は加振前後を含む10秒間とした。また、パラメータ同定に用いるFRFの周波数範囲は、軌道の共振・反共振周波数や加振試験で用いるインパルスハンマのゲインを考慮して、10～600Hzとした。

表-1に、実際の軌道を想定した力学モデルのパラメータ（以下、正解値）を示す。同表に示すレール質量の正解値は、50kgN レールの締結間隔に相当する値とした。まくらぎ質量の正解値は、6号PCまくらぎの重量の半分に相当する値とした。軌道パッドと道床バラストの剛性および減衰係数の正解値は、

表-1 軌道のパラメータ（正解値）

項目	記号	単位	値
まくらぎ質量	m_1	kg	83
レール質量	m_2	kg	32
道床減衰係数	c_1	Ns/m	1.200×10^4
軌道パッド減衰係数	c_2	Ns/m	7.165×10^4
道床剛性	k_1	N/m	3.0×10^7
軌道パッド剛性	k_2	N/m	3.6×10^8

温度や載荷条件（荷重や加振周波数）によって異なるため、公称値をそのまま適用するのは妥当でない場合があると考えられる。そこで、対象とする力学モデルの共振周波数が、一般的なバラスト軌道の傾向と整合するように値を設定した。

上記に加え、測定値に含まれるノイズがパラメータの同定精度に与える影響を把握するため、まくらぎの応答加速度波形のRMSに対して10～100%の大きさ（標準偏差）に相当するホワイトノイズを、レールおよびまくらぎの応答加速度波形に付加した場合も計算した。以降、上記のホワイトノイズの大きさをノイズ混入率と称す。

4.2 同定結果

図-2に、ノイズ混入率を0～80%まで増加させた時の、加振力に対するレール・まくらぎのFRFの同定結果の例を示す。同図より、ノイズ混入率が60%以下の条件では、FRFの同定値は正解値と概ね一致していることがわかる。一方、ノイズ混入率が80%の場合、FRFの同定誤差は大きい。なお、ノイズ混入率が80%を超えると、FRFの同定値は正解値と大きく乖離した。その一例として、図-3にノイズ混入率が90%の条件におけるFRFの同定結果の例を示す。

図-4に、パラメータの同定値と正解値の差を百分率で表した値（以下、誤差率）とノイズ混入率の関係を示す。なお、誤差率の符号は値の大小関係を表し、正の場合は同定値が正解値よりも大きく、負の場合はその逆となる。

同図より、質量の同定精度については、レール、まくらぎともにノイズ混入率によって大きく変化せず、最大の誤差率はレールの場合で20%程度であった。剛性の同定精度についても同様の傾向を示し、最大の誤差率は道床バラストの場合で15%程度であった。

減衰係数の同定精度については、軌道パッドの場合はノイズ混入率の増加に伴い誤差率がやや大きくなり、最大の誤差率は12%程度であった。一方、道床バラストの場合は、ノイズ混入率が60%を超えると誤差率が-50%を下回り、ノイズ混入率が80%を超えると同定値は負値となった。

以上より、本研究の検討条件においては、観測値へのノイズ混入率が60%以上の場合、特性行列の同定は困難と考えられる。特に、図-3に示したように、ホワイトノイズの混入によりFRFの共振峰・反共振の谷の位置および高さが不明瞭になると、同定された質量、剛性、減衰係数から求めたFRFは対象とする振動系の自由度を正しく反映した結果となっておらず、同定したFRFの形状は正解値と大きく乖離した。また、ノイズ混入率が比較的小さい条件であ

っても、道床バラストの減衰係数の同定精度は、質量、剛性と比較して高くない。本傾向は、Wang¹¹⁾の指摘と整合しており、本手法の限界と考えられる。

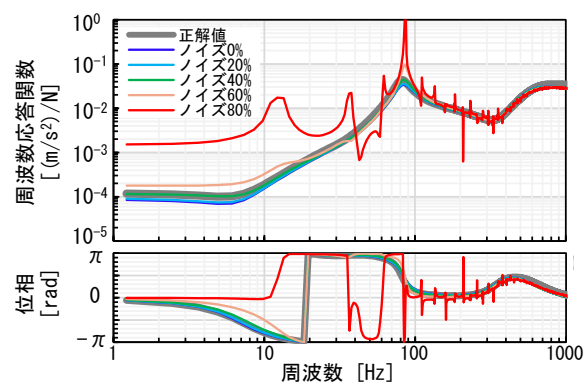
パラメータの同定精度を向上させるためには、式(13)を最小二乗法で解く際に、質量等のパラメータが既知の場合は制約条件に追加することや、評価対象の周波数帯域を変更する等の対策が考えられる。なお、上記の結果は、パラメータ同定に用いるFRFの周波数範囲を10～600Hzとした場合の結果であり、評価する周波数帯域を変更すれば誤差率も変わること留意されたい。

5. まとめ

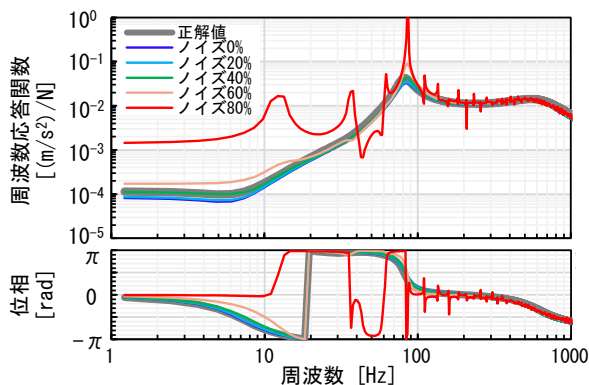
本研究では、加振試験で得られる周波数応答関数を用いて軌道部材のパラメータ（質量、剛性、減衰係数）を同定する手法を検討した。実際の加振試験を想定した数値シミュレーションの結果、観測値のRMSに対してホワイトノイズが60%程度以上混入する場合、本手法によるパラメータ同定は困難と考えられた。また、周波数応答関数に明瞭な共振峰・反共振の谷が見られない場合、本手法によるパラメータ同定は実用上困難となることが想定された。今後は、実際の加振試験のデータを用いて実用性を検証し、パラメータ同定の精度向上に向けた検討を行う予定である。

参 考 文 献

- 1) 日本規格協会：JISハンドブック 鉄道，pp.211-270，2014。
- 2) British Standard Institution：BS EN 13146-3，2002。
- 3) 道本順一，村中一意：振動方程式の特性行列の同定に関する研究（その1，解析法と解析例），日本造船学会論文集，Vol.167，pp.191-198，1990。
- 4) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第1報，方法の提案と基礎検討），日本機械学会論文集C編，54巻，464号，pp.719-728，1985。
- 5) 瀧上唯夫，秋山裕喜：定置加振試験に基づく鉄道車両用車体の特性行列の実用的同定手法（模型車体を用いた検討），機械力学・計測制御講演会(D&D2018)，講演番号328，2018。
- 6) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第2報，誤差を含むデータに対する同定法の提案），日本機械学会論文集C編，52巻，478号，pp.1742-1749，1986。
- 7) 佐藤裕：軌道構造の構築振動におよぼす影響，土木学会論文報告集，第240号，pp.63-70，1975。
- 8) 細田充，田中博文，石川達也：鉄道におけるレール波状摩耗発生・成長機構の検討のための軌道の支持剛性を考慮したマルチボディダイナミクスによる車両運動解析，構造工学論文集，Vol.63A，pp.171-181，2017。
- 9) 佐藤吉彦：落重試験による軌道各部特性係数の算出，鉄道技術研究所速報，No.74-153，1974。
- 10) 鈴木貴洋，石田誠：輪軸落下試験による軌道構造別動



(a) レール



(b) まくらぎ

図-2 FRF の同定結果の例(ノイズ混入率 0～80%)

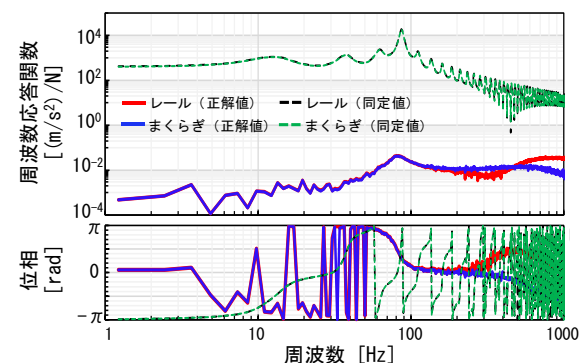


図-3 FRF の同定結果の例(ノイズ混入率 90%)

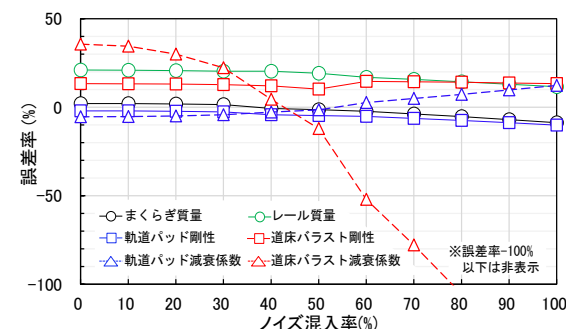


図-4 誤差率とノイズ混入率の関係

特性の検討，土木学会第 57 回年次学術講演会，VI-141，pp.281-282，2002。

- 11) J. H. Wang : Mechanical parameter identification with special consideration of noise effects, Journal of Sound and Vibration, 125(1), pp.151-167, 1988。