

トロリ線機械インピーダンスの特性

○ [機] 近藤 優一 [機] 網干 光雄 (鉄道総合技術研究所)

Property of Mechanical Impedance of Contact Wire

○Yuichi Kondo, Mitsuo Aboshi (Railway Technical Research Institute)

For electric railway systems, the mechanical impedance of contact wires affects the contact force fluctuation between contact wires and pantographs. Thus, the property of the mechanical impedance of contact wires is important for controlling the contact force fluctuation. In this paper, the contact wire was modeled assuming it as a string or a beam, and the property of the mechanical impedance of the contact wire was investigated. As a result, the flexural rigidity of contact wires have an influence on the mechanical impedance in the range of high frequency. The contact wire was modeled in the same way using a moving coordinate system, and it was found out that if the railway runs fast, the flexural rigidity has an influence on the mechanical impedance not only in the range of high frequency but in the range of low frequency.

キーワード：電気鉄道，トロリ線，機械インピーダンス，曲げ剛性，移動座標系

Key Words : Electric railway, Contact wire, Mechanical impedance, Flexural rigidity, Moving coordinate system

1. 緒言

トロリ線の凹凸による接触力変動を考える際に，トロリ線の機械インピーダンスの特性を把握することが重要である¹⁾。そこで，トロリ線を一本の無限長の弦と仮定した場合と，張力が作用する無限長の梁と仮定した場合のトロリ線の機械インピーダンスをそれぞれ導出し比較する。同様に，パンタグラフから見た移動座標系においてもモデルに基づいて導出し比較する。本論文では以上の比較結果について報告する。

2. 理論解析

2.1 弦の機械インピーダンス

ここでは，トロリ線を無限長の弦と仮定し，曲げ剛性を考慮しないものとしてモデル化し，機械インピーダンスを求める。図1に示すように，弦が $x=0$ の位置で角周波数 ω の上下加振力 F を与えた際に，加振点の左右に y_1 ， y_2 の波動が波動伝播速度 c でそれぞれ伝播するとし， F ， y_1 ， y_2 をそれぞれ次式で仮定する。

$$F = f \exp(i\omega t) \dots\dots\dots(1)$$

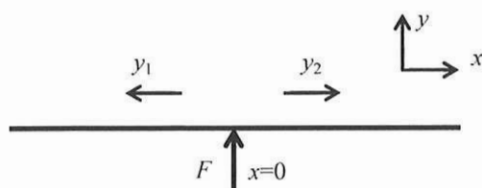


図1 トロリ線の解析モデル

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{s1} \exp\{i\omega(t+x/c)\} \quad (x < 0) \\ y_2 &= A_{s2} \exp\{i\omega(t-x/c)\} \quad (x \geq 0) \end{aligned} \dots\dots\dots(2)$$

トロリ線の線密度，張力をそれぞれ ρ ， T とすると弦の波動方程式は次式で表される。ただし， δ は Dirac のデルタ関数である。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F \cdot \delta(x) \dots\dots\dots(3)$$

次の境界条件から A_{s1} ， A_{s2} を求めることができる。

$$y_1|_{x=0} = y_2|_{x=0}, \quad T \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = F \dots\dots\dots(4)$$

したがって，機械インピーダンスを Z_t とすれば，その定義より次のように求めることができる。

$$Z_t = \frac{F}{dy_1/dt|_{x=0}} = 2\sqrt{\rho T} \dots\dots\dots(5)$$

2.2 梁の機械インピーダンス

トロリ線を張力が作用する梁と仮定した場合の機械インピーダンスを求める。トロリ線の曲げ剛性を EI とすると梁の波動方程式は次式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F \cdot \delta(x) \dots\dots\dots(6)$$

この式の解を次式の式(7)で仮定すると，特性方程式は式(8)で得ることができる。

$$y = A \exp(kx) \exp(i\omega t) \dots\dots\dots(7)$$

$$k^4 - \frac{T}{EI}k^2 - \frac{\rho\omega^2}{EI} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

四つの特性根は式(8)より求めることができ、無限遠での変位を考慮し、 k_1 を正の実数、 k_3 を負の実数、 k_2 を正の純虚数、 k_4 を負の純虚数とすると $A_{bi}(i=1\sim4)$ を用いて変位 y_1 、 y_2 を次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} y_1 &= \{A_{b1} \exp(k_1 x) + A_{b2} \exp(k_2 x)\} \exp(i\omega t) \\ y_2 &= \{A_{b3} \exp(k_3 x) + A_{b4} \exp(k_4 x)\} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(9)$$

次の境界条件から A_{b1} 、 A_{b2} 、 A_{b3} 、 A_{b4} を求めることができる。

$$\begin{aligned} y_1|_{x=0} &= y_2|_{x=0}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial y_2}{\partial x}|_{x=0} \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}|_{x=0} &= \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}|_{x=0}, \quad EI \left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}|_{x=0} - \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}|_{x=0} \right) = F \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

機械インピーダンスを求めると次のようになる。

$$Z_t = 2\sqrt{\rho} \left[\sqrt{\frac{T^2 + 4\rho EI\omega^2 + T}{2}} + i\sqrt{\frac{T^2 + 4\rho EI\omega^2 - T}{2}} \right] \quad (11)$$

2.3 移動座標系における弦の機械インピーダンス

2.1節における加振点が x の正の方向に速度 v で動いた場合を考える。移動座標系における波動方程式は次式となる。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F \cdot \delta(x-vt) \quad \dots\dots\dots(12)$$

これを移動座標系 $\xi=x-vt$ を用いて変換すると次式となる。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\rho v \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \xi} - (T - \rho v^2) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = F \cdot \delta(\xi) \quad \dots\dots\dots(13)$$

この解を次式で仮定する。ただし、 $\beta=v/c$ とする。

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{s1} \exp[i\omega_1 \{(1+\beta)t + \xi/c\}] \quad (\xi < 0) \\ y_2 &= A_{s2} \exp[i\omega_2 \{(1+\beta)t - \xi/c\}] \quad (\xi \geq 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(14)$$

次の境界条件から A_{s1} 、 A_{s2} 、 ω_1 、 ω_2 を求めることができる。

$$y_1|_{\xi=0} = y_2|_{\xi=0}, \quad (T - \rho v^2) \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi}|_{\xi=0} - \frac{\partial y_2}{\partial \xi}|_{\xi=0} \right) = F \quad \dots\dots\dots(15)$$

機械インピーダンスは

$$Z_t = \frac{F}{dy_1/dt|_{\xi=0}} = 2\sqrt{\rho T} \quad \dots\dots\dots(16)$$

となり、式(5)の静止座標系の場合と同じとなる。

2.4 移動座標系における梁の機械インピーダンス

前節と同様にして 2.2 節における加振点が x の正の方向に速度 v で動いた場合を考える。このときの移動座標系における波動方程式は次式となる。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2\rho v \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \xi} - (T - \rho v^2) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = F \cdot \delta(\xi) \quad (17)$$

この式の解を次式の式(18)で仮定すると、式(19)のような特

性方程式を得ることができる。

$$y = A \exp(k\xi) \exp(i\omega t) \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$k^4 - \frac{T - \rho v^2}{EI} k^2 - i \frac{2\rho v \omega}{EI} k - \frac{\rho \omega^2}{EI} = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

四つの特性根は式(19)より求めることができ、無限遠での変位を考慮し、 k_1 を実数部が正の複素数、 k_3 を実数部が負の複素数、 k_2 を正の純虚数、 k_4 を負の純虚数とすると $A_{bi}(i=1\sim4)$ を用いて変位 y_1 、 y_2 を次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} y_1 &= \{A_{b1} \exp(k_1 \xi) + A_{b2} \exp(k_2 \xi)\} \exp(i\omega t) \\ y_2 &= \{A_{b3} \exp(k_3 \xi) + A_{b4} \exp(k_4 \xi)\} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここで、境界条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned} y_1|_{\xi=0} &= y_2|_{\xi=0}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \frac{\partial y_2}{\partial \xi}|_{\xi=0} \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2}|_{\xi=0} &= \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2}|_{\xi=0}, \quad EI \left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3}|_{\xi=0} - \frac{\partial^3 y_2}{\partial \xi^3}|_{\xi=0} \right) = F \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(21)$$

以上の境界条件から各係数 A_{b1} 、 A_{b2} 、 A_{b3} 、 A_{b4} を求めることができる。機械インピーダンスを求めると次のようになる。

$$Z_t = \frac{EI}{i\omega} \frac{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_1)(k_4 - k_2)}{k_1 + k_2 - k_3 - k_4} \quad \dots\dots\dots(22)$$

3. 数値計算例

図2に前章で求めた機械インピーダンスを $GT170$ ($\rho=1.511\text{kg/m}$, $T=14.7\text{kN}$, $EI=320\text{Nm}^2$)を例として、式(5)、(11)、(16)、(22)を用いて計算した結果を示す。図から曲げ剛性を考慮した場合、高周波になるにつれてトロリ線を弦と仮定した場合との差が大きくなる。さらに、走行速度が大きくなるにつれて低周波においても、弦と仮定した場合との差が大きくなる。図2

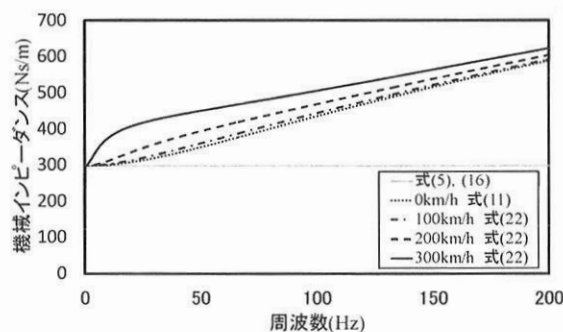


図2 機械インピーダンスの計算例

4. 結言

本論文ではトロリ線の曲げ剛性が機械インピーダンスに与える影響や座標系の違いによる影響について理論解析を行った。その結果、走行速度が上がれば加振周波数に関わらず曲げ剛性の影響が無視できなくなることがわかった。

参考文献

- 1) 網干光雄, 常本瑞樹: 新幹線の高速運転に対応した電車線の架設指針, 鉄道総研報告, Vol.25, No.4, pp. 17-22, 2011.