3次元地盤・走行車輪・軌道連成系の定常振動応答解析

学[土] ○高野祐紀 (新潟大学大学院) 正[土] 阿部和久 (新潟大学工学部)
正[土] 紅露一寛 (新潟大学大学院)

Steady-State Interaction Analysis for a Three-Dimensional Semi-Infinite Ground, a Running Wheel and a Railway Track

Yuuki TAKANO, Graduate School, Niigata University
Kazuhisa ABE, Niigata University, 8050 Igarashi 2-Nocho, Nishi-ku, Niigata
Kazuhiro KORO, Graduate School, Niigata University

This paper presents a numerical method for steady-state interaction problems stated by a running wheel, a track and a three-dimensional semi-infinite ground. The railway track is modeled by an infinite rail which is periodically supported by sleepers. The half-space bearing the track is given by a homogeneous elastic medium. The steady-state solution is derived by way of Fourier transform with respect to time, within the framework of dynamic analysis of periodic structures. Numerical analyses are performed with varying speed of wheel. Through those examples, the influence of the running speed and the ground stiffness on the dynamic response is discussed.

Key words : *steady-state interaction, three-dimension semi-infinite ground, running wheel, periodically supported rail, critical speed*

1. はじめに

列車走行による鉄道軌道の動的応答特性の把握は，列車の乗り心地の改善や地盤振動の低減，軌道破壊の抑制などの観点から非常に重要となる．さらに，軟弱地盤上の高速列車走行では，共振により輪重応答が増大することが知られている[1)]．そのため，地盤剛性も考慮した，走行荷重に対する軌道系の動的応答の評価が有用な知見を与える．走行荷重下での軌道振動解析では，レールを有限要素や Green 関数[2)]により表現する手法が広く用いられている．しかしこの場合，軌道構造に打ち切り端が存在する有限長モデルが用いられることとなり，減衰を適切に設定したとしても，定常解に十分近い結果を得るために必要とされる軌道区間長の設定には曖昧さが残る．これに対し，はりのたわみの表現に Fourier 級数を用いた，走行車輪・軌道連成系の定常応答解析法[3)]の構築が検討された．ただし，この解析では道床以下を剛体とし，主にレール・まくらぎから構成される軌道部のみのモデル化を採用している．そこで本研究では，文献[3)]と同様の手順により定常問題を導出する．さらにまくらぎ接地点における，3次元半無限地盤の地盤剛性を表現するインピーダンス[4)]を導出し，走行車輪・軌道連成系の方程式に組み込み，地盤も考慮した定常応答の定式化を導く．また，本研究では，地盤剛性や車輪走行速度などが定常応答に及ぼす影響について調べ，さらに地盤・軌道系が共振する臨界速度を求める．

2. 連成系の定常応答解析手法

Fig.1 の様に，まくらぎにより離散支持されたレール上を，車輪が一定速度 c で走行する問題を考える．レールは軌道パッド，まくらぎ，まくらぎ下パッドを介して地盤に支持されているものとする．

レールは Timoshenko ばりでモデル化する．レールの運動方程式を，時間 t に関して Fourier 変換して次式を得る．

$$
\begin{aligned}
GAK\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\psi}-\frac{\partial \hat{u}}{\partial x})-\rho A\omega^2\hat{u} &= \frac{1}{c}F^w(\frac{x}{c})e^{-i\omega\frac{x}{c}} \\
&\quad -\hat{F}_0^s\sum_l e^{-i\omega\frac{lL}{c}}\delta(x-lL), \\
GAK(\hat{\psi}-\frac{\partial \hat{u}}{\partial x})-\rho I\omega^2\hat{\psi}-EI\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，x はレール軸方向の座標，u はレールのたわみ，ψ はレール断面の回転角，ρ は質量密度，A は断面積，I は断面二次モーメント，G はレールのせん断弾性係数，K はせん断係数，E はヤング率，$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数であり，$(\hat{\ })$ は Fourier 変換後の値である．F^w, F_0^s はそれぞれ車輪とレールとの接触力，まくらぎ反力を表わす．

接触力の周期性を考慮し，F^w を荷重位置 $\tilde{x}=ct$ において次のように Fourier 級数により表現する．

$$
F^w(\frac{\tilde{x}}{c})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n^w e^{i\frac{2n\pi}{L}\tilde{x}} \tag{2}
$$

ここで，$\tilde{x}$ は $|\tilde{x}|\le L/2$ の実数である．

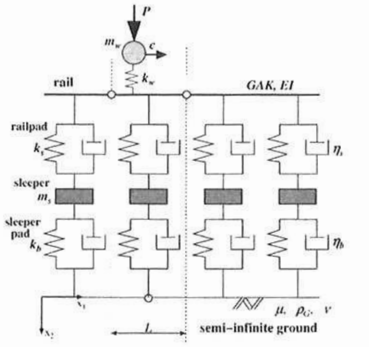

Fig.1 A running wheel, a railway track and a semi-infinite ground

$F_n^w = 1, F_m^w = 0 (m \neq n)$ に対する式 (1) の解を $\hat{u}_n, \hat{\psi}_n$ とおく．周期性を考慮し次の様に解を与える．

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(\tilde{x},\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega) e^{i(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})\tilde{x}} \\ \hat{\psi}_n(\tilde{x},\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^n(\omega) e^{i(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})\tilde{x}} \end{aligned} \quad (3)$$

接触力 $F^w(t)$ と解 $\hat{u}_n, \hat{\psi}_n$ を式 (1) に代入し整理すると，次式の様に振幅 a_m^n を表わすことができる[3]．

$$a_m^n = \frac{1}{X_m}\left(\frac{1}{c}\delta_{nm} - \frac{\hat{F}_0^s}{L}\right) \quad (4)$$

2.1 まくらぎ反力の導出

次に，未知量であるまくらぎ反力 $\hat{F}_0^s$ を導出する．まくらぎ位置のレールたわみを $\hat{u}_n(0,\omega)$，まくらぎ変位を $\hat{u}_s$，地盤表面の変位を $\hat{u}_G$ と表わす．まくらぎの運動方程式を次式で与える．

$$\begin{aligned} &\hat{F}_0^s - \hat{F}^b + m_s\omega^2\hat{u}_s = 0, \\ &\hat{F}_0^s = (k_s + i\omega\eta_s)(\hat{u}_n - \hat{u}_s), \\ &\hat{F}^b = (k_b + i\omega\eta_b)(\hat{u}_s - \hat{u}_G) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで，$\hat{F}^b$ はまくらぎ下パッド作用力の Fourier 変換である．

地盤表面の等価剛性 (等価インピーダンス) を k_G で与え，$\hat{u}_s$ と $\hat{u}_G$ を次の様に表しておく．

$$\hat{u}_s = \frac{1}{m_s\omega^2}(\hat{F}^b - \hat{F}_0^s) \ , \ \hat{u}_G = \frac{\hat{F}_0^s}{k_G} \quad (6)$$

式 (5), (6) を整理することで，まくらぎ反力の Fourier 変換 $\hat{F}_0^s$ を得る．

$$\hat{F}_0^s = \frac{k_G(k_b + i\omega\eta_b - m_s\omega^2)(k_s + i\omega\eta_s)}{k_G(k_b + i\omega\eta_b - m_s\omega^2) + (k_s + i\omega\eta_s)(k_G + k_b + i\omega\eta_b)}\hat{u}_n \quad (7)$$

2.2 たわみ振幅係数の決定

式 (4) にまくらぎ反力 $\hat{F}_0^s$ を代入し，振幅を表わす係数 a_m^n を求める．

$$a_m^n = \frac{1}{X_m}\cdot\left(\frac{1}{c}\delta_{nm} - \frac{k_G\cdot b\cdot s}{L(k_G\cdot b + s\cdot gb)}\sum_m a_m^n\right) \quad (8)$$

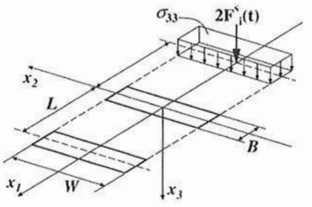

Fig.2 Traction on the ground surface

ここで，b, s, gb は次式で与える．

$$\begin{aligned} b &= (k_b + i\omega\eta_b - m_s\omega^2), \\ s &= (k_s + i\omega\eta_s), \\ gb &= (k_G + k_b + i\omega\eta_b) \end{aligned} \quad (9)$$

さらに，式 (8) の m について和をとり $\sum a_m$ を消去すると，振幅係数 a_m^n は次の様に求めることができる．

$$a_m^n = \frac{1}{cX_m}\cdot \left(\delta_{nm} - \frac{k_G\cdot b\cdot s}{X_n\{L(k_G\cdot b + s\cdot gb) + k_G\cdot b\cdot s\cdot(\sum 1/X_l)\}}\right) \quad (10)$$

3. 3 次元半無限地盤のインピーダンス導出[4)]

ここでは求解する上で必要となる地盤のインピーダンス k_G を求める．**Fig.2** の一様な 3 次元半無限地盤を考える．まくらぎは剛体とする．地盤との接触力は一様分布で仮定し，その合力を $2F_i^s(t)$ とおく．応答は x_1 軸について対称と仮定し，レール 1 本当りの運動を考える．

接触面にせん断応力は作用しないものとし，まくらぎ下面と地盤との変位の適合条件は，まくらぎ接触域重心で評価する．地盤変位 $\mathbf{u}$ を次式により与える．

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi} \quad (11)$$

また，$\phi, \boldsymbol{\psi}$ を一意に決定するために，次式をさらに加える．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (12)$$

地盤変位について，x_2 と時間 t に関する Fourier 変換を施す．その下で ϕ と ψ の Fourier 変換を次の様に与える．

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \sum_n \mathrm{A}_n e^{-\beta_{Ln}x_3} e^{i(\frac{2n\pi}{L}-\frac{\omega}{c})x_1}, \\ \hat{\psi}_j &= \sum_n \mathrm{B}_{jn} e^{-\beta_{Tn}x_3} e^{i(\frac{2n\pi}{L}-\frac{\omega}{c})x_1} \end{aligned} \quad (13)$$

式 (11) より u_3 の Fourier 変換は次式で与えられる．

$$\hat{u}_3 = \hat{\phi}_{,3} + \hat{\psi}_{2,1} + ik_2\hat{\psi}_1 \quad (14)$$

また，まくらぎ接触面の応力 σ_{33} の Fourier 変換は次式で与えられる．

$$\hat{\sigma}_{33} = \lambda(\hat{\phi}_{,11} - k_2^2\hat{\phi}_{,22} + \hat{\phi}_{,33}) + 2\mu(\hat{\phi}_{,33} + \psi_{2,13} + ik_2\psi_{1,3}) \quad (15)$$

ここで，λ, μ は $Lam\acute{e}$ 定数であり，μ は正の減衰を与える様に複素剛性により，$\mu^* = (1 + i\omega\gamma)\mu$ と与える．なお，γ は減衰定数である．

単位接触力を次式により Fourier 級数で与える.

$$\hat{\sigma}_{33} = \sum_n C_n e^{i(\frac{2n\pi}{L})x_1} e^{-i\frac{\omega}{c}x_1} \tag{16}$$

ただし，式 (16) の係数 C_n は次式で与えられる.

$$C_n = \frac{4\sin(Wk_2/2)}{L(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})k_2} \sin(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c}) \tag{17}$$

式 (12), (16) を式 (15) に代入して次式を得る.

$$\begin{aligned} &\left\{\lambda\left[\beta_{Ln}^2 - k_2^2 - (\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})^2\right] + 2\mu\beta_{Ln}^2\right\}\mathrm{A}_n \\ &-2\mu\beta_{Tn}i\left\{k_2\mathrm{B}_{1n} + (\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\mathrm{B}_{2n}\right\} = C_n \end{aligned} \tag{18}$$

また，$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ より $\epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$ となり，当該条件より次式を得る.

$$\begin{aligned} &-i2\beta_{Ln}(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\mathrm{A}_n - k_2(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\mathrm{B}_{1n} \\ &-\left\{(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})^2 + \beta_{Tn}^2\right\}\mathrm{B}_{2n} + ik_2\beta_{Tn}\mathrm{B}_{3n} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &i2k_2\beta_{Ln}\mathrm{A}_n + (k_2^2 + \beta_{Tn}^2)\mathrm{B}_{1n} + k_2(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\beta_{2n} \\ &\qquad + i(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\beta_{Tn}\mathrm{B}_{3n} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

さらに式 (12) より次式を得る.

$$i(\frac{2n\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\mathrm{B}_{1n} - ik_2\mathrm{B}_{2n} - \beta_{Tn}\mathrm{B}_{3n} = 0 \tag{21}$$

式 (18)～(21) を連立して解くと，$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_{1n}$～$\mathrm{B}_{3n}$ を求めることができる．これらの係数が決まると，式 (14) より $\hat{u}_3$ が求められる.

$$\hat{u}_3(0, k_2, 0) = \sum_n \left\{ -\beta_{Ln}\mathrm{A}_n + i(\frac{2n\pi}{L})\mathrm{B}_{2n} + ik_2\mathrm{B}_{1n}\right\} \tag{22}$$

式 (22) の k_2 に関する逆 Fourier 変換より u_3 を得る.

$$u_3(0,0,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_3(0, k_2, 0)dk_2 \tag{23}$$

式 (16) のまくらぎ接触力に対する，まくらぎ直下中心点での変位応答が式 (23) により求められる．すると $F_0^s = 1$ とした荷重に対する変位応答 u'_G は次式で与えられる.

$$u'_G = -\frac{2}{BW}u_3(0,0,0) \tag{24}$$

地盤表面の等価剛性を k_G とおくと次式が成り立つ.

$$k_G u_G = F_0^s \tag{25}$$

また，u'_G に対しては，

$$k_G u'_G = 1 \tag{26}$$

したがって 3 次元地盤のインピーダンス k_G は次式で導出される.

$$k_G = \frac{1}{u'_G} \tag{27}$$

4. 車輪の運動方程式と求解

式 (10) を式 (3) に代入して，単位荷重の下での，式 (1) の解 $\hat{u}_n$ が決定できる.

$u_n(\tilde{x}, t)$ および$\psi_n(\tilde{x}, t)$ は，それぞれ $\hat{u}_n, \hat{\psi}_n$ の逆 Fourier 変換により求めることができる．以下に，u_n の導出過程を示す.

$$\begin{aligned} u_n(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{x}, \omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_m a_m^n(\omega)e^{i\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega}{c}\tilde{x}}e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{28}$$

ここで，車輪位置を $\tilde{x} = ct$ とおき，$u_n^b := u_n(ct, t)$ と定義すると，車輪位置のレールたわみは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} u_n^b(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_m a_m^n(\omega)e^{i\frac{2m\pi}{L}ct}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_m e^{i\frac{2m\pi}{L}ct}\int_{-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega)d\omega \end{aligned} \tag{29}$$

ここで，

$$A_m^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega)d\omega \tag{30}$$

とおくと，$u_n^b(t)$ は次式により与えられる.

$$u_n^b(t) = \sum_m A_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \tag{31}$$

最終的なたわみ応答 $u^b(t)$ は，u_n^b により次式で与えられる.

$$u^b(t) = \sum_n F_n^w u_n^b = \sum_n\sum_m F_n^w A_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \tag{32}$$

よって，接触力の大きさを表わす係数 F_n^w が最終的な未知量となる．これは，レールと車輪との連成により求める．最終的に，未知量 F_n^w に関する無限連立方程式を次の様に得る.

$$\begin{gathered} w_0 = \frac{P}{k_w} + \sum_n F_n^w A_0^n, \\ [1 - \frac{k_w}{m_w}(\frac{L}{2m\pi c})^2]F_m^w + k_w\sum_{n\neq 0} F_n^w A_m^n = -k_w P A_m^0 \\ (m \neq 0) \end{gathered} \tag{33}$$

実際の解析では，式 (33) を有限項で打ち切り，それを解いて F_n^w を求める．また，いったん F_n^w が求まれば，式 (33) 第 1 式より w_0 が求まり，さらに式 (2) より，荷重作用位置における接触力 $F^w(t)$，式 (32) よりレールたわみ $u^b(t)$ などを求めることができる.

5. 解析結果

5.1 解析条件

解析対象は，**Fig.1** に示した様に，地盤剛性を設定した道床上にパッドを介して敷設された無限長レール上を車輪が一定速度 c で走行するモデルとする．上載荷重は 1 車両

Table 1 Parameters of rail

mass density (kg/m^3)	7880
cross-sectional area (m^2)	77.5×10^{-4}
Young's modulus (GPa)	206
Poisson's ratio	0.33
geometrical moment of inertia (m^4)	3.09×10^{-5}
shear facter	0.44

Table 2 Meterial parameters of three-dimensional semi-infinite ground[4)]

mass density (kg/m^3)	1700
Poisson's ratio	0.3
damping facter γ	5×10^{-4}
mass of a sleeper (kg)	100
width of a sleeper (m)	0.24
length of a sleeper (m)	2

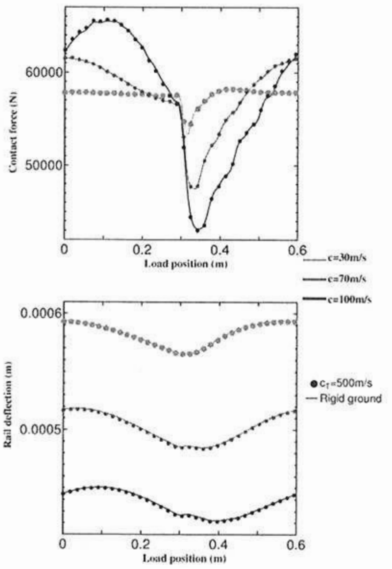

Fig.3 Numerical results

の重量を 1 車輪あたりに換算した値に基づき，P =57750N と設定し，車輪質量 m_w=450kg，接触バネ k_w=2GN/m と設定した．支持間隔は L=0.6m，パッドは Voigt モデルで与え，軌道パッドのバネ定数，減衰定数はそれぞれ k_s=110MN/m，η_s=1.1MN·s/m と設定した．まくらぎ下パッドについても同様に k_b=60MN/m，η_b=0.6MN·s/m と与えた．また，地盤のせん断剛性は $\mu=\rho_G\cdot(c_T)^2$ として与えている．ここで ρ_G は地盤の質量密度 (kg/m^3)，c_T はせん断波速度 (m/s) である．その他の条件を **Table 1**，**Table 2** に示す．なお，レールたわみを求める際の，逆 Fourier 変換の積分域は精度を確認の上，$|\omega|$=3000Hz，Fourier 級数項は $|n|$=25 項で打ち切るものとした．

解析では，地盤剛性を 2 ケース設定した．まず，手法の妥当性を確認する目的で地盤を十分剛とし c_T=500m/s として，列車走行速度 c は 30，70，100m/s の 3 ケースで解析を行う．次に，軟弱な地盤を設定して c_T=100m/s とし，この場合の臨界速度 c_R=92.7m/s を加えた 4 ケースについて解析を行う．

5.2 妥当性の検証

まず，c_T=500m/s の結果と地盤を剛体とした結果[3)]を **Fig.3** に示す．なお，解析結果では上に荷重作用位置における接触力応答，下にたわみ応答を示した．図より，地盤を剛体とした結果と良好な一致が確認でき，本手法の妥当性が確認できる．また本手法においても，まくらぎ通過後で輪重が急減する輪重抜けや，まくらぎ通過前後でたわみ応答が非対称となる挙動を確認することができた．

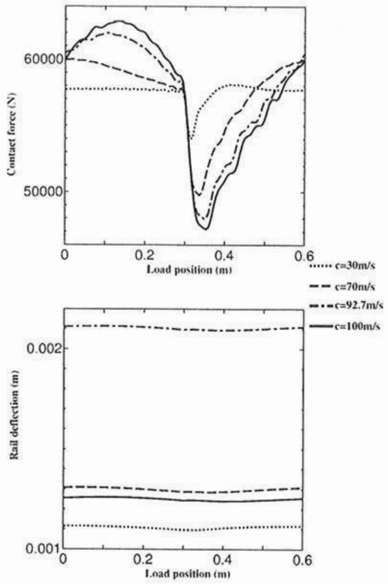

Fig.4 Steady-state with a soft-ground

5.3 地盤剛性が応答に及ぼす影響

次に，c_T=100m/s としたやや軟弱地盤での解析結果を **Fig.4** に示す．輪重応答は十分地盤が剛な場合と同様な挙動が得られている．一方，レールたわみは，臨界速度 92.7m/s の走行速度において急激に増大していることが確認できる．

6. おわりに

本研究では，半無限地盤・無限長軌道・走行車輪連成系の定常応答解析を行った．その際，軌道は，まくらぎにより離散支持されたレールにより与えた．解析では，十分に地盤を剛に設定した場合と，地盤を剛体とした解との比較を行った．両者の応答は良好に一致し，本手法の妥当性を確認することができた．地盤をやや軟弱に設定した場合では，臨界速度において卓越応答を確認することができ，地盤剛性の影響を調べることができた．今後は，車輪に加え車体をモデル化した，より現実的な解析モデルにより，さらに解析を進める予定である．

参考文献

1) Sheng,X., Jones, C.J.C. and thompson, D.J.: A theoretical study on the influence of the track on train-induced ground vibration, *J. Sound Vib.*, 272, 909-936, 2004.

2) 阿部和久，古田勝：時間域積分表現式による軌道振動解析法，構造工学論文集，43A，365-372，1997.

3) 佐成屋淳，阿部和久，紅露一寛：走行車輪と軌道系の定常連成応答解析，計算数理工学論文集，9，61-66，2009.

4) Metrikine,A.V. : The steady-state response of a periodically inhomogeneous model of a railway track to a moving load, *Envir. Vib.*, Takemiya(ed.), 103-113, 2005