

## 数理計画モデルによる省エネ列車ダイヤの生成法

○ [電] 宮武 昌史 (上智大学)

A Method of Generating Energy-saving Train Scheduling  
by Means of Mathematical Programming

○ Masafumi Miyatake (Sophia University)

In this paper, the author proposes a comprehensive mathematical formulation as a nonlinear programming for considering energy-saving train scheduling. The formulation is to optimize running time for each section between stations with fixing total time between origin and destination of a train. The original fundamental manner of optimization named "identical incremental energy consumption" was introduced. The model was extended and applied to a simple railway line model with six stations and five sections. It could be solved with a general-purpose optimization library on a PC. The result showed that optimal condition and energy saving effect could be evaluated easily. Several percent of energy was saved by the optimization process.

キーワード: 省エネルギー, 列車ダイヤ, 最適化

Key Words : saving energy, train scheduling, optimization

### 1. はじめに

鉄道の更なる省エネを考えると、機器単体の対策だけでは限界が来ることが懸念され、鉄道システム全体での総合的な対策が今後望まれる。そんな中、東日本大震災および福島第一原発事故による電力供給不足の影響は、電気鉄道にも及んだ<sup>1)</sup>。元々輸送効率が高く、電力需要に占める割合も微々たるものである鉄道に対し、電力使用の制限を与えることは本来合理的でない<sup>2)</sup>。しかしながら、これを機に、電気鉄道においても、さらなる省エネルギーや電力負荷特性の改善の必要性が浮き彫りになったといえる。

電鉄負荷は、使用電力量の割にピーク電力が異様に高いのが特徴であり、「電力」と「電力量」を明確に区別する必要がある<sup>3)</sup>。節電は、使用電力量の削減、すなわち省エネルギーを普通は意味するが、電鉄負荷の場合それがピーク電力カットに直接つながらない。電力系統では需要と供給とを常に一致させる必要がある<sup>4)</sup>ため、特に電鉄負荷においては、需要のピークを押さえ込むことは、省エネルギーよりも優先順位が高いと言える。しかし、現実には電力でなく電力量の削減を求められていることから、今後も引き続きピーク電力と電力量の両面での削減を考えていく必要があると思われる。

筆者らはこれまで、鉄道の省エネルギーに関する研究を行って来た<sup>5)-8)</sup>。その中で、本稿では、普遍的な原理に基づく省エネルギーなダイヤを解き明かす検討<sup>7)8)</sup>を取り上げる。列車ダイヤの最適化による省エネは、鉄道システム全体での総合的な対策と位置づけられ、実

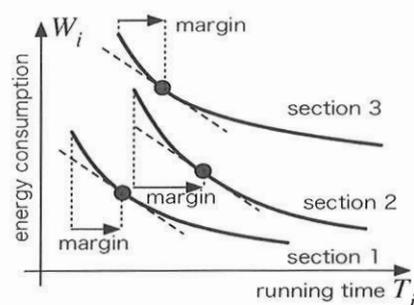


図 1 等増分エネルギー消費則

際の適用には、様々な現業部門の協力が必要な方法である。これまで、駅間の運転時分の最適化について、「等増分消費エネルギー則」と名付けた普遍的な省エネ原理を明らかにした。現状では、駅間毎、列車毎の消費エネルギーを見るため、回生電力の融通の観点の本モデルには入っておらず、回生失効、あるいは回生絞り込みが頻繁に発生する場面での有用性は限定される。しかし、回生融通がうまく行っている高密度運転路線や、逆に回生が期待できない閑散路線あるいは非電化路線には、そのままの適用が可能である。

本稿では、そのモデルを拡張し、より複雑な条件にも対応した一般性を持つモデルを提唱するとともに、簡易なケースでシミュレーションを実施し、その効果を示すことを目的とする。

### 2. 等増分消費エネルギー則の導出法

駅間  $i$  において、駅間運転時分  $T_i$  に対する消費エネルギー  $W_i$  の関係が、図 1 のように関数  $W_i(T_i)$  で表さ

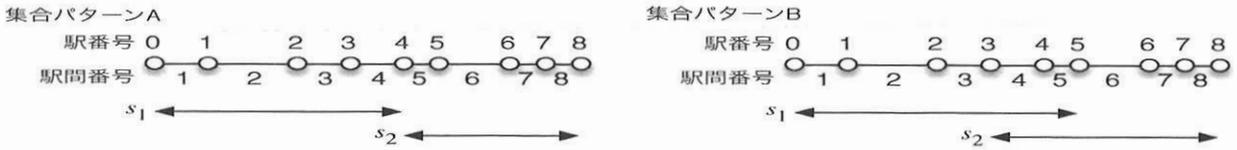


図 2 複数の時間制約を与えるための区間の定義の例

れるとする。この関係式を求める方法は、実測データやシミュレーションなど、利用者の事情によって様々な選択ができる。ただし、 $\frac{\partial W_i}{\partial T_i}$  はすべて単調増加であると仮定する。

また、駅間  $1, 2, \dots, N$  の駅間運転時分の合計が  $T_S$  で常に等しいとする。このとき、全駅間を走行する時の消費エネルギーを最小にするには、次の等号制約付非線形最適化問題を解けばよい。なお、停車時分は不変であるとする。

$$J(T_1, \dots, T_N) = \sum_{i=1}^N W_i(T_i) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^N T_i = T_S \quad (2)$$

ここで、詳細<sup>7)</sup>は省略するが、ラグランジュの未定乗数法を適用すると、最適な条件が導かれる。

$$\frac{\partial W_1}{\partial T_1} = \frac{\partial W_2}{\partial T_2} = \dots = \frac{\partial W_N}{\partial T_N} \quad (3)$$

この式は、図 1 のように、曲線の傾きが同じなら、最適な運転時分になっていることを意味する。これを、火力発電所群の経済運転における「等増分燃料費則」<sup>4)</sup>になぞらえて、「等増分消費エネルギー則」と名付けた<sup>7)</sup>。さらに、実際のダイヤがこの条件を満たさない場合、増分の絶対値の小さな駅間の運転時分を減らし、他を逆に増やすように調整すれば最適条件に近づくので、本モデルは既存のダイヤに対し調整の方向性をも与える。

基準運転時分など、許容できる最小運転時分  $T_i^{\min}$  や、運転時分の上限  $T_i^{\max}$  も設けたい場合、次の不等号制約を加えて考える必要がある。

$$T_i^{\min} \leq T_i \leq T_i^{\max} \quad (4)$$

この場合、直観的には、(4) 式の制約を除いて等増分消費エネルギー則を適用し、(4) 式の制約を満たさない変数を、(4) 式の範囲内に引き戻し、残りの変数について等増分消費エネルギー則を適用する、という方針で解くことができる。

### 3. 複雑な条件に対応する一般化モデル

#### 3.1 モデルの拡張

2 章では、走行時分の合計を一定にする区間は一つかつ対象線区の全区間であったが、これを  $M$  個の区間に拡張する。駅間  $1, 2, \dots, N$  に対し、 $j$  番目の区間の集

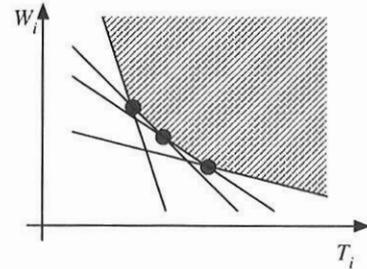


図 3 消費エネルギー特性の折れ線近似

合を  $s_j \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  とする。通常、図 2 のパターン A のように、連続かつ重複しない区間を定義することが多いであろうが、パターン B のように重複する場合も、あるいは現実にはほとんど意味はないが任意の駅間を組み合わせる場合でも取扱可能である。このとき、区間集合  $s_j$  における駅間運転時分  $\sum_{i \in s_j} T_i$  を  $T_{S-j}$  に保つものとする。

本手法の成否は、うまい関数  $W(T)$  が見い出せるかにかかっているが、それは一般には難しく、後述の数値計算例でも、陽な関数として表すことを断念している。そのため、陰関数として関係式を

$$f_i(T_i, W_i) = 0 \quad (5)$$

のように記述して処理できる方が良い。以降、 $W$  は関数ではなく、変数として取り扱うことに注意を要する。

このとき、2 章で導いた最適化問題は、(5) 式を新たな制約条件として扱うことで、次式のように拡張される。

$$J(T_1, \dots, T_N, W_1, \dots, W_N) = \sum_{i=1}^N W_i \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i \in s_j} T_i = T_{S-j} \quad (j = 1, \dots, M) \quad (7)$$

$$T_i^{\min} \leq T_i \leq T_i^{\max} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8)$$

$$f_i(T_i, W_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (9)$$

(7) 式により等号制約として表されている区間の所要時間は、ある範囲内に収めるという不等号制約で考えた方が都合が良い場合があると考えられる。これを次式

$$T_{S-j}^{\min} \leq \sum_{i \in s_j} T_i \leq T_{S-j}^{\max} \quad (j = 1, \dots, M) \quad (10)$$

のように表すとする。所要時間を固定したい場合は、 $T_{S-j} = T_{S-j}^{\min} = T_{S-j}^{\max}$  とすれば良く、一般性は失わない。

表 1 与えた制約条件と総消費エネルギーの計算結果

ケース	$T_1$ [s]	$T_2$ [s]	$T_3$ [s]	$T_4$ [s]	$T_5$ [s]	$\sum_{i=1}^5 T_i$ [s]	$\sum_{i=1}^2 T_i$ [s]	総消費エネルギー [kWh]
1	65	80	80	70	80	(375)	(145)	147.5 (100%)
2	65~75	75~85	75~85	65~75	75~85	360~375	—	142.9 (96.9%)
3	65~75	75~85	75~85	65~75	75~85	360~375	140~145	143.7 (97.4%)
基準時分	65	75	75	65	75	(355)	(140)	199.8 (135.4%)

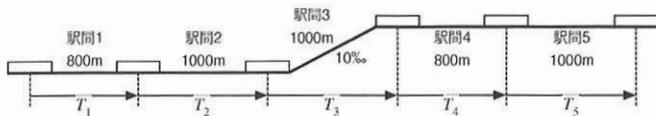


図 4 想定した路線

また、(9) 式は、 $f_i(0,0) > 0$  となるように定義すると、

$$f_i(T_i, W_i) \leq 0 \tag{11}$$

としても、消費エネルギーを最小とすれば必然的に等号制約と同じ結果を与えるので、制約条件を緩和する意味で不等号制約とする。こうすると、さらに利点があり、図 3 のように、任意の凸制約を折れ線近似できるため、5 秒毎などの離散的なデータに対して複雑な関数を仮定することなく制約を与えられる。

3.2 非線形計画問題としての表現の一般化

数式を一般化するため、次のベクトルを定義する。なお、上付の  $T$  は転置を表し、 $f(T, W)$  は関数ベクトル (折れ線近似を考えると、この次元は駅間数より多いことも有り得る)、 $c$  は  $N$  次元の横ベクトルである。

$$T = [T_1 \ \dots \ T_N]^T, \tag{12}$$

$$\lambda = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_M], \tag{13}$$

$$W = [W_1 \ \dots \ W_N]^T, \tag{14}$$

$$f(T, W) = [f_1(T, W) \ \dots \ f_N(T, W)]^T, \tag{15}$$

$$T_S^{\min} = [T_{S,1}^{\min} \ \dots \ T_{S,M}^{\min}]^T, \tag{16}$$

$$T_S^{\max} = [T_{S,1}^{\max} \ \dots \ T_{S,M}^{\max}]^T, \tag{17}$$

$$T^{\min} = [T_1^{\min} \ \dots \ T_N^{\min}]^T, \tag{18}$$

$$T^{\max} = [T_1^{\max} \ \dots \ T_N^{\max}]^T, \tag{19}$$

$$c = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \tag{20}$$

この記号を用い、(6), (10), (8), (11) 式を次のような一般形で表現する。

$$J(T, W) = J(W) = c W \rightarrow \min \tag{21}$$

$$\text{subject to } T_S^{\min} \leq AT \leq T_S^{\max} \tag{22}$$

$$T^{\min} \leq T \leq T^{\max} \tag{23}$$

$$f(T, W) \leq 0 \tag{24}$$

なお、 $A$  は、区間  $s_j$  の取り方から定められる  $M$  行  $N$  列の行列であり、区間  $s_j$  に駅間  $i$  が含まれているとき、 $A$  の  $j$  行  $i$  列が 1 になり、含まれていないときは 0 となる。例えば、図 2 の A, B の場合はそれぞれ次式のようになる。

表 2 エネルギー消費特性の近似曲線

係数	駅間 1, 4	駅間 2, 5	駅間 3
$a_3$	$-7.6752 \times 10^{-4}$	$-4.3543 \times 10^{-4}$	$-6.5680 \times 10^{-4}$
$a_2$	$9.2938 \times 10^{-2}$	$6.5556 \times 10^{-2}$	$1.1058 \times 10^{-1}$
$a_1$	-3.8506	-3.3644	-6.2958
$a_0$	118.68	131.39	194.84

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

また、 $c$  の成分はすべて 1 としたが、これを変えることで、例えば地域による電気料金の違いを反映するなど、駅間毎のエネルギー消費に重みを付けることもできる。

3.3 数値解法

(21)-(24) 式で表される一般化された最適化問題は、極めて典型的な非線形計画問題である。特に、目的関数  $J$  が線形であるため、制約式さえ適切に表現できれば、容易に解けることが期待される。これは、様々な数値計算ライブラリで解くことができる。次章での解析では、MATLAB の Optimization Toolbox に含まれる非線形最適化関数、'fmincon' を使用した。

この手の問題で、数値計算の容易さを左右する一番の要素は、関数  $f(T, W)$  の性質と考えられる。具体的には、 $\frac{\partial W_i}{\partial T_i}$  が単調増加でないと、複数の極小点が生じるケースが発生し、探索が困難になる。

なお、実際のダイヤ設定では、運転時分  $T$  を離散的に設定するため、整数計画問題としての処理がより適切と思われる。しかし、今回定式化した一般化最適化問題は緩和問題となっており、元の緩和問題さえ奇麗に解くことができれば、整数計画問題としての処理も大きな問題はないと考えられる。

4. 簡易的な数値計算による有用性検証

図 4 に示したような、駅間が 5 つ (駅数は 6) ある路線に 1 列車が走ることを想定し、数値計算を行った。車両性能等の計算の基本条件は、論文<sup>5)7)</sup>の通りである。図 5 は、各駅間における走行時分  $T_i$  と消費電力量  $W_i$  との関係を実際計算したものである。各曲線において最も時間の短い点は、力行後すぐ制動に移るオフブレーキ運転時の点を表す。基準運転時分は、表 1 下の通り定

表 3 最適化によって得られた運転時分

ケース	$T_1$ [s]	$T_2$ [s]	$T_3$ [s]	$T_4$ [s]	$T_5$ [s]	$\sum_{i=1}^5 T_i$ [s]	$\sum_{i=1}^2 T_i$ [s]	$\frac{\partial W_1}{\partial T_1}$	$\frac{\partial W_2}{\partial T_2}$	$\frac{\partial W_3}{\partial T_3}$	$\frac{\partial W_4}{\partial T_4}$	$\frac{\partial W_5}{\partial T_5}$
1	(65)	(80)	(80)	(70)	(80)	(375)	(145)	-5.32	-1.26	-1.24	-1.25	-1.26
2	69.12	78.91	78.94	69.12	78.91	375.00	148.03	-1.41	-1.41	-1.41	-1.41	-1.41
3	67.80	77.20	79.91	70.01	80.08	375.00	145.00	-1.78	-1.78	-1.25	-1.25	-1.25
基準時分	(65)	(75)	(75)	(65)	(75)	(355)	(140)	-5.32	-2.89	-3.98	-5.32	-2.89

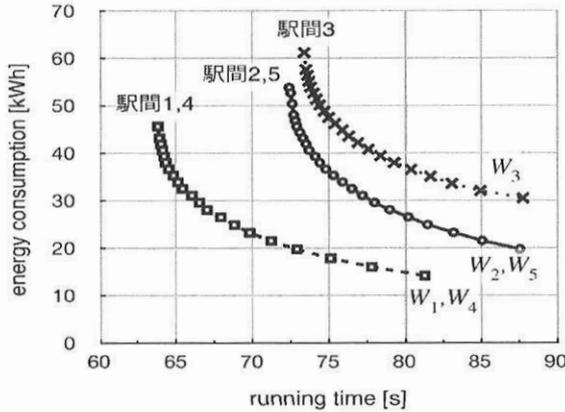


図 5 運転時分とエネルギー消費の計算値

めた。5 駅間の最小運転時分の合計は、355 秒となる。

次に、図 5 の特性の近似曲線を求める。試行の結果、 $T_i$  を  $W_i$  の 3 次式として近似すると決定係数が 0.998 以上になり、非常によい近似ができたため、次式を使用する。各係数は表 2 に示した。

$$f(T_i, W_i) = a_3 W_i^3 + a_2 W_i^2 + a_1 W_i + a_0 - T_i = 0 \quad (27)$$

これに対し、表 1 の 3 つのケースを想定した。ケース 1 は、従来の運転時分設定をイメージし、駅間 1 を除く駅間に 5 秒の余裕時分を付加し、合計 375 秒で走行する。ケース 2 は、全駅間に 10 秒の調整幅を与え、5 駅間を 360~375 秒の間で走行する。ケース 3 は、ケース 2 に、さらに駅間 1 と 2 だけの合計を 140~145 秒とする制約を付加した。

最適化による駅間運転時分の設定計算は一瞬で実行でき、その結果は表 3 の通りである。これらは、与えた制約を全て満たしており、特に、複数駅間の合計運転時分に関する制約はその最大値を取っている (制約が active である) ことが分かる。最適性については、表 3 右の増分エネルギーを見れば一目瞭然である。ケース 1 では、駅間 1 が最適条件から外れていることが分かる。ケース 2 では、全ての駅間で増分値が同じとなっており、理想的と言える。ケース 3 では、駅間 1,2 の増分の大きさがやや大きくなっており、これはケース 2 では満たしていない駅間 1 と 2 だけの合計運転時分の制約を満たそうとした結果であることが分かる。

全体的な消費エネルギーは、表 1 の右に記した。ケース 3 で新たな制約を加えることで、ケース 2 よりも若干消費エネルギーが増えていることが読み取れる。利用者に迷惑をかけない範囲でのダイヤ調整で、ケース 1

に対して約 3% の省エネが図れる。参考のため、基準運転時分で走行した場合のエネルギーも示したが、ケース 1 を基準として約 38% もの改善となる。運転の際に、設定された運転時分を守ることの重要性が分かる。

このケースでは駅間毎の基準運転時分の差が小さいため、従来のダイヤ設定や運転時分の管理に対して非常に細かい運転時分の調整が必要となったが、駅間距離、勾配、速度制限のバリエーションが大きい線区では、大きな効果が発揮できる可能性がある。

### 5. おわりに

本稿では、ダイヤの省エネ化の議論に有効な「等増分消費エネルギー則」の考え方をさらに発展させ、より複雑で現実的な条件を含む一般化問題として定式化し、それを数値的に解く方法に触れた。そして、簡易な路線条件を仮定してシミュレーションでその実用性を示した。

本手法は、ダイヤ設定上眠っている余裕、例えば停車時分に付けられた余裕、臨時列車や間引き運転によって生じているカラ待避の時分<sup>3)</sup>などを、運転時分に配分することによってさらに効果を増す。また、ダイヤの変更は、利用者の利便性にも影響を与える。今後は、運行管理面や利用者の効用の面などから、総合的に論じる必要があると考えられる。

### 参考文献

- 1) 高木 亮：「大震災による電力不足と鉄道」鉄道車両と技術 No.176, pp.36-43, 2011.
- 2) 富井 規雄：「『無計画停電』と列車の運転」鉄道車両と技術 No.177, pp.2-6, 2011.
- 3) 曾根 悟：「『節電ダイヤ』を大きなチャンスに変える方法」鉄道車両と技術 No.178, pp.34-39, 2011.
- 4) 小向, 色川, 加藤「電力システム工学」丸善
- 5) 高 英聖, 古関 隆章, 宮武 昌史：「動的計画法を用いた列車運転曲線最適化問題の求解法」電学論 D, 125-12, pp.1084-1092, 2005.
- 6) 高 英聖, 宮武 昌史：「直流饋電特性を考慮した列車運転曲線最適化問題の数値解法」電学論 D, 126-8, 2006.
- 7) 宮武 昌史：「省エネルギーな列車ダイヤ作成のための簡易数理モデル」電学論 D, 131-6 Vol. 131, No.6, 2011.
- 8) 宮武 昌史：「省エネルギーな列車ダイヤ作成のための最適化モデルの導入」電気学会 交通・電気鉄道・フィジカルセンサ合同研究会, No. TER-11-001/PHS-11-005, pp.1-5, 名古屋, 2011.