軸力作用下における分岐器介在ロングレールの加振応答解析

［土］○阿久津友宏（新潟大学大学院），［土］阿部和久（新潟大学），［土］紅露一寛　（新潟大学大学院）

DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF CONTINUOUS WELDED RAILS HAVING A RAILROAD SWITCH SUBJECTED TO A THERMAL STRESS

Tomohiro AKUTSU (Niigata University)
Kazuhisa ABE (Niigata University)
Kazuhiro KORO (Niigata University)

Dynamic response of a railway track consisting of a railroad switch and continuous welded rails is analyzed with varying temperature stress. The tangential rails connected to the railroad switch are modeled by semi-infinite rails supported by sleepers with constant spacing. In the analyses these sub-structures are replaced with impedance matrices. The impedance matrix of rail subjected to an axial load is derived by eigenvalue problem of a transfer matrix of a unit cell defined by the periodicity. The infinite railway track is then represented by attaching the transmitting boundaries to a finite track region including the switch. Through numerical analyses, the relation between the rail temperature and the resonant frequency is obtained, and the capability of the rail stress measuring method utilizing this relation is discussed.

Key words : *Continuous welded rails, Railroad switch, Thermal stress, Vibration analysis*

1.　はじめに

鉄道軌道において，レールの軸力管理は軌道座屈やレール破断を防ぐ上で非常に重要である．レール軸力は主に温度変化により発生するが，レールのふく進によっても変動する．そのため，単に温度管理だけでは軸力を把握することができない．そこで，本研究室では，軌道の共振周波数が軸力に依存することを利用した軸力測定法 (振動軸力測定法) の可能性について検討してきた．文献[1)−3)]では直線を，文献[4)]では曲線軌道を対象に軌道を周期構造として検討し，いずれの軌道についても振動軸力測定法により軸力を測定し得るという結論を得た．

なお，鉄道軌道において列車の進路を振り分ける分岐部は不可欠である（**図 1**[5)]）．分岐器介在レールにおいては**図 2** に示すように，いずれのレールにも温度上昇により軸力が発生し，分岐器を介して 1 本のレールと 2 本のレールとが互いに押し合う．そのため，1 本の側のレールは相対的に大きな圧縮を受け，分岐器付近では通常の温度上昇により発生する圧縮軸力より大きな軸力が作用し，座屈の危険性が高くなる[6)]．したがって，分岐器介在ロングレールの軸力管理は軌道保守上極めて重要である．

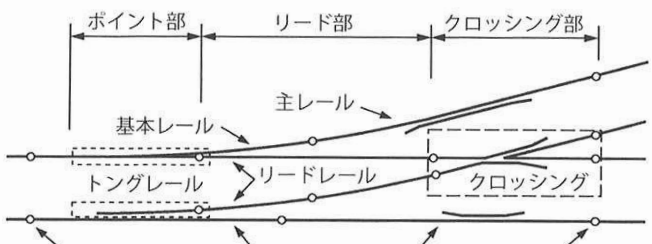

図 1　片開き分岐器[5)]

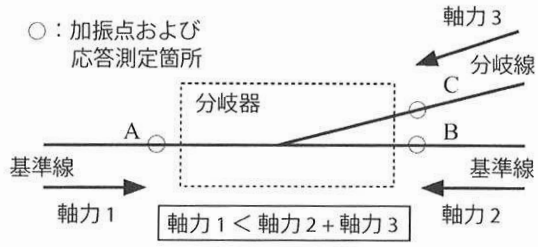

図 2　軸力が作用する分岐器[6)]

そこで，本論文では分岐器介在ロングレールを対象に，振動軸力測定法による軸力推定の可能性を検討する．分岐器介在レールの場合，分岐器が存在するため，周期場の様に共振モードとレール軸力との関係を分散解析より求めることが不可能である．そのため，本研究では，実際の測定法を想定した調和加振応答解析を実施し，その結果より共振周波数と軸力との関係を抽出する．その際に，分岐器前後の直線ロングレールは，それと等価なインピーダンス行列で与え，分岐器を有する無限長軌道 (無減衰) を対象に解析を行う．

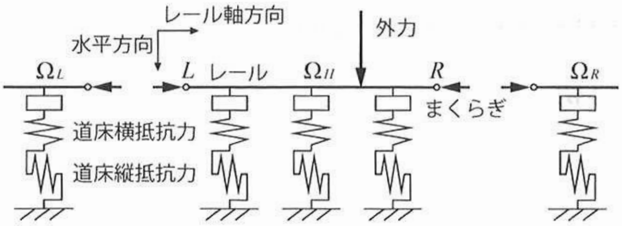

図 3　軸力が作用する無限長軌道

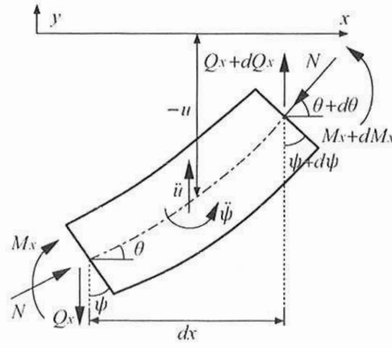

図 4　たわみ振動をしているはり要素の作用力

図 5　軌道モデル 1 ユニット

2.　分岐器介在レールの振動解析法

本研究では，軌道を水平加振する問題を対象とする．**図 2** の分岐部の軌道を**図 3** の様にモデル化する．水平たわみ振動において，レールとまくらぎは一体化しているものとし，道床横抵抗力および道床縦抵抗力を線形バネとして与える．構造および軸力分布が一定ではない非周期区間を取り出してモデル化する．そして，その非周期区間の両端に一定軸力作用の下，まくらぎで周期的に支持されている半無限長の直線軌道が接続しているものとする．レールは水平たわみとせん断変形を考慮した Timoshenko ばりでモデル化し，軸力を受けるレールについての運動方程式をはり要素による有限要素方程式から導出する．

図 4 に示すような軸力 N(圧縮を正) の下で円振動数 ω で振動している長さ l のはりを考える．仮想仕事式より次式を得る．

$$\begin{aligned}\int_0^l \Big\{ (EA\frac{du}{dx} - N)\frac{d\delta u}{dx} - N\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} + EI\frac{d\psi}{dx}\frac{d\delta\psi}{dx} \\ + GAK(\psi - \frac{dv}{dx})(\delta\psi - \frac{d\delta v}{dx})\Big\} dx \\ = \int_0^l \rho\omega^2 (Av\delta v + Au\delta u + I\psi\delta\psi)dx \\ + [Q\delta v + N\delta u + M\delta\psi]_0^l\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，u は軸方向変位，v は水平方向変位，ψ は断面回転角，$\delta()$ は仮想変位である．また，Q はせん断力，M は曲げモーメント，G はレールのせん断弾性係数，K はせん断係数，A は断面積，ρ は密度，E はヤング係数，I は断面二次モーメントである．

この式において，v を 3 次 Hermite 補間，ψ を 2 次 Lagrange 補間により与える TIM7 要素[7]で離散化すると，**図 3** の有限領域 Ω_H に対して次式を得る．

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{K}}_{LL} + \check{\boldsymbol{K}}_L & \hat{\boldsymbol{K}}_{LH} & \hat{\boldsymbol{K}}_{LR} \\ \hat{\boldsymbol{K}}_{HL} & \hat{\boldsymbol{K}}_{HH} & \hat{\boldsymbol{K}}_{HR} \\ \hat{\boldsymbol{K}}_{RL} & \hat{\boldsymbol{K}}_{RH} & \hat{\boldsymbol{K}}_{RR} + \check{\boldsymbol{K}}_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_L \\ \boldsymbol{u}_H \\ \boldsymbol{u}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}_H \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{K}} = [\boldsymbol{K} - N(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) - \omega^2 \boldsymbol{M}]$ であり，$[\boldsymbol{K}]$ は道床抵抗力を表現するバネを反映した剛性行列，$[\boldsymbol{C}]$ は式 (1) の軸力に関する項を離散化して得られる行列，$[\boldsymbol{M}]$ はまくらぎ質量を考慮した質量行列，$\{\boldsymbol{u}\}$ は節点変位ベクトル，$N[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}$ は分岐部 Ω_H の端部軸力のたわみ方向成分，$\{\boldsymbol{f}\}$ は軸力のたわみ方向成分以外の節点力である．$()_L, ()_R$ は Ω_H 端部の節点値，$()_H$ は Ω_H 内部節点に関する値である．また，$[\check{\boldsymbol{K}}_L]$ は**図 3** の左半無限軌道系 Ω_L 右端のインピーダンス行列，$[\check{\boldsymbol{K}}_R]$ は右半無限系 Ω_R 左端のインピーダンス行列である．この式を解くことで，無限系の動的応答を得ることができる．

3.　軸力が作用する軌道のインピーダンス行列の導出

前節に述べた，軸力を受ける軌道に対するインピーダンス行列を導出する．**図 5** に示す直線軌道モデル 1 ユニットにおいて，軸力 N 以外に作用外力のない振動問題を考える．1 ユニット当たりの運動方程式は次式の様に表わされる．

$$[\tilde{\boldsymbol{K}} - N(\tilde{\boldsymbol{B}} + \tilde{\boldsymbol{C}}) - \omega^2 \tilde{\boldsymbol{M}}]\{\tilde{\boldsymbol{u}}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{3}$$

ここで，各行列は **2.2** に定義したものを 1 ユニットに適用したものである．

式 (3) より，次の固有値問題を得る．

$$[\tilde{\boldsymbol{K}} - N(\tilde{\boldsymbol{B}} + \tilde{\boldsymbol{C}})]\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \omega_i^2 [\tilde{\boldsymbol{M}}]\{\boldsymbol{\phi}_i\} \tag{4}$$

ここで，ω_i は固有円振動数，$\boldsymbol{\phi}_i$ は固有モードである．

式 (4) の固有モードの一次結合で任意の振動解を表わすと次式を得る．

$$\{\tilde{\boldsymbol{u}}\} = \sum_i^n \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{5}$$

ここで，α_i は結合係数，n は 1 ユニット当りの自由度である．外力 $\{\tilde{\boldsymbol{f}}\}$ 作用下の運動方程式に式 (4)，(5) を代入し変形することで左端の節点値から右端のそれを与える伝達マトリックス $[\boldsymbol{G}]$ を得る．

$$[\boldsymbol{G}]\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_L \\ \boldsymbol{F}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_R \\ -\boldsymbol{F}_R \end{Bmatrix} \tag{6}$$

ただし，$\boldsymbol{F}$ はユニットセル両端の節点力ベクトルである．

ここで，右隣のユニットセル左端の節点ベクトルを $\boldsymbol{u}_L^R$，$\boldsymbol{F}_L^R$ と表すと，変位の適合条件と力のつり合い条件から次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{u}_L^R = \boldsymbol{u}_R,\ \boldsymbol{F}_L^R = -\boldsymbol{F}_R \tag{7}$$

式 (6)，(7) より次式を得る．

$$[\boldsymbol{G}]\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_L \\ \boldsymbol{F}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_L^R \\ \boldsymbol{F}_L^R \end{Bmatrix} \tag{8}$$

表 1　軌道の各種物性値

密度 (kg/m^3)	$\rho = 7880$
断面積 (m^2)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
ヤング率 (GPa)	$E = 206$
ポアソン比	$\nu = 0.33$
断面二次モーメント (m^4)	$I = 322 \times 10^{-8}$
せん断係数	$K = 1.382$
線膨張係数 (/℃)	$\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$
道床縦抵抗バネ (N/m)	$k_u = 550 \times 10^6$
道床横抵抗バネ (N/m)	$k_v = 6 \times 10^6$

このユニットセルにより与えられる無限周期系を考える．式 (8) において定常条件 $\boldsymbol{u}_L^R = e^{-i\kappa L}\boldsymbol{u}_L$，$\boldsymbol{F}_L^R = e^{-i\kappa L}\boldsymbol{F}_L$ を課すと次の固有値問題を得る．

$$[\boldsymbol{G}]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_L\\ \boldsymbol{F}_L\end{Bmatrix} = \lambda\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_L\\ \boldsymbol{F}_L\end{Bmatrix},\ \lambda = e^{-i\kappa L} \tag{9}$$

式 (9) の固有値と固有ベクトルは，右へ進行するモードと，左へ進行するモードに 2 分することができる．右方向進行モードを $\{\boldsymbol{u}_{Ri}, \boldsymbol{F}_{Ri}\}(i = 1, 2)$，左方向進行モードを $\{\boldsymbol{u}_{Li}, \boldsymbol{F}_{Li}\}(i = 3, 4)$ とすると，右半無限系左端のインピーダンス行列 $[\check{\boldsymbol{K}}_R]$ と左半無限系右端のインピーダンス行列 $[\check{\boldsymbol{K}}_L]$ が次式により与えられる．

$$\begin{aligned}[\check{\boldsymbol{K}}_R] &= [\boldsymbol{F}_{R1}\ \boldsymbol{F}_{R2}][\boldsymbol{u}_{R1}\ \boldsymbol{u}_{R2}]^{-1},\\ [\check{\boldsymbol{K}}_L] &= -[\boldsymbol{F}_{L3}\ \boldsymbol{F}_{L4}][\boldsymbol{u}_{L3}\ \boldsymbol{u}_{L4}]^{-1}\end{aligned} \tag{10}$$

4.　無限長分岐器介在レールの加振応答解析

4.1　解析対象

分岐番数は在来線区間において一般的に用いられている 12 番に設定した．その番数に対応する分岐角は $\theta = 4°46'$ となる．分岐器前後の軸力変動区間を離散化し，その端部に一定軸力下のインピーダンス行列を接合する．具体的には **4.2** に示す軸力分布解析に基づき，基準線は 78.55m を，分岐線は 34.99m を軸力が変動する非周期区間として設定し，それぞれの端点に半無限長の直線軌道を表現するインピーダンス行列を接続した．レールは 50kgN レールを想定し，まくらぎ 1 区間を 12 要素で一様分割して与える．通常区間においては，レール 1 本当りの質量 100kg の PC まくらぎを 0.6m の一定間隔で設置する．分岐区間においてはレール 1 本当りの質量 13〜27kg の合成まくらぎを設置基準に合わせた間隔で適宜設置する．道床縦・横抵抗力を表わすバネ定数 k_u，k_v を含む各種物性値を **表 1** に示す．

4.2　軸力の設定

分岐器付近ではその構造ゆえ軸力の分布が変動する．そのため，予め静的解析を行いそれぞれのレール箇所に作用する軸力を求めておく．

その際，まくらぎの道床縦抵抗バネを線形モデル，道床横抵抗バネを非線形モデルとし，それぞれ次式のように表す．

$$F_u = k_u u,\quad F_v = f_0\frac{v}{|v| + a} \tag{11}$$

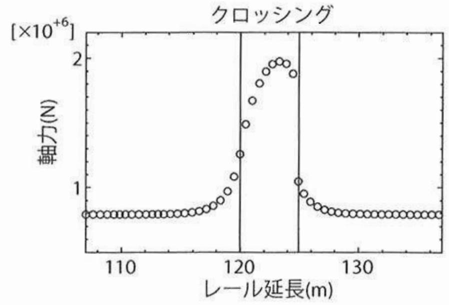

図 6　分岐部付近の軸力分布 (基準線)

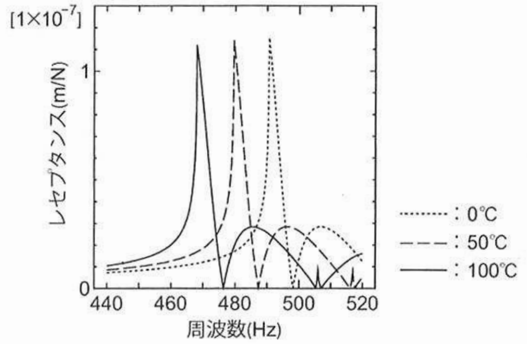

図 7　加振点におけるレセプタンス（無減衰系）

ただし，f_0 および a は道床横抵抗力に関する定数であり，それぞれ $f_0 = 5768$(N)，$a = 3 \times 10^{-4}$(m) とした[8]．この条件の下，温度上昇に伴って生じる温度ひずみおよび変形により生じる軸方向ひずみから，各要素に生じている軸力を次式により評価する．

$$N = EA(\alpha t - \varepsilon) \tag{12}$$

ただし，α はレールの線膨張係数，t はレールの相対温度増分，ε はレールの直ひずみである．

例として，**図 6** にレール相対温度 50 ℃における分岐部付近の基準線における軸力分布を示す．

4.3　分岐部の軸力-共振周波数関係

上で求めたレール要素毎の軸力を導入し，各相対温度における共振周波数と軸力との関係を求める．分岐区間と通常区間との境界から通常区間側に 3m 離れた箇所において水平調和加振を行い，A. 分岐器前側の基準線，B. 分岐器後側の基準線，C. 分岐線の 3 つのケース (**図 2**) について検討する．なお，応答振幅の測定は加振する位置と同じ箇所で行うものとする．分岐線における周波数と応答振幅との関係を**図 7** に示す．レール相対温度の上昇に伴い，共振点が低周波数側に移行していることが確認できる．こうして求めた各レール相対温度における共振周波数から，軸力と共振周波数との関係を求めた．分岐線側における解析結果を**図 8** に示す．なお，分岐器前後の基準線についてもほぼ同様の関係が得られた．なお，直線レールの場合，共振周波数と軸力との関係はほぼ完全な線形性を有しているのに対し，分岐器介在レールの場合，わずかに上に凸の関係となっている．

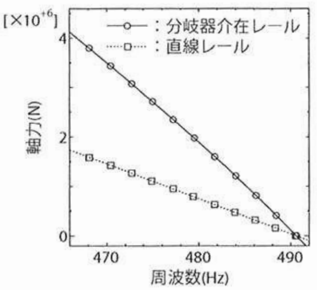

図8　共振周波数と軸力との関係

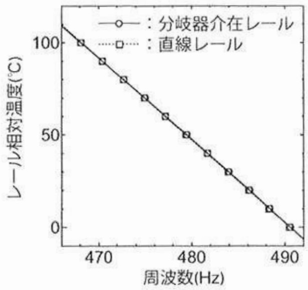

図9　共振周波数とレール相対温度との関係

次に，**図9**にレール相対温度と周波数との関係を示す．分岐器介在レール，直線レールにかかわらずほぼ一致した関係を示していることが確認できる．**図8**および**図9**から分かるように，同じ共振周波数において分岐器介在レールと直線レールの軸力は互いに異なるにもかかわらず，相対温度はほぼ一致している．このことから，分岐器近傍の局所的な軸力変動は動的応答特性に対してほとんど影響しておらず，直線部分の共振特性が支配的であると考えられる．したがって，**図6**に示した様な分岐部に沿った局所的な軸力変化の様子を動的応答特性から詳細に求めることは容易でないと考えられる．

ただし，分岐部前後の軸力が一定となる直線部分の軸力は共振周波数から求めることができているので，**図8**の様な分岐部の軸力と直線部分の軸力との関係を予め得ておけば，分岐部の軸力は間接的に概ね予測し得ると考えられる．

5.　減衰を伴う分岐器介在レールの加振応答解析

実際の軌道には様々な減衰が存在しており，その減衰が共振周波数を変動させる恐れがある．そのため，減衰を含む場合と含まない場合との結果を比較し，減衰が共振周波数に及ぼす影響について確認する．

5.1　解析対象および解析条件

減衰導入の下，有限長軌道によりモデル化し，打切り端からの反射波が無視し得る程度に軌道を十分長くとる．具体的には，基準線は250mを，分岐線は125mをモデル化する．また道床縦抵抗バネおよび道床横抵抗バネをそれぞれ，次式のように複素剛性 k'_u，k'_v として与えることで，減衰効果を導入する．

$$k'_u = k_u(1 + i\omega g),\quad k'_v = k_v(1 + i\omega g) \qquad (13)$$

ここで，g は減衰定数であり，$g = 0.05$[4] と設定した．

5.2　解析結果

分岐線における周波数と応答振幅との関係を**図10**に示す．無限長軌道における共振周波数（図中垂直線）と比較すると，ほぼ一致する結果が得られている．すなわち，減衰を導入することによる共振周波数への影響は無視できる程度のものであることがわかる．以上より，無減衰，無限長分岐器介在レールを対象に得た前節の結果は，減衰を有する系においても適用し得ることが確認できた．

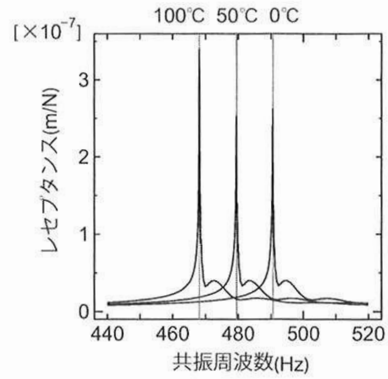

図10　加振点におけるレセプタンス（減衰系）

6.　おわりに

本研究では，温度応力を受ける分岐器介在ロングレールを対象に，共振周波数から分岐部の軸力を換算して求める手法について検討した．

加振応答解析の結果，分岐部の局所的な軸力と共振周波数との間に，直線レールのそれと一致した関係を見出すことはできなかった．このことから，共振周波数から分岐部の軸力分布を詳細に求めることは容易ではないと考えられる．しかし，分岐器前後の軸力分布が一定となる直線部分の軸力は，分岐部の局所的な軸力の変動の影響を受けることなく，共振周波数から換算して求めることができる．そのため，分岐部の軸力と直線部分の軸力との関係を予め求めておくことで，分岐部の軸力を概ね予測し得るものと考えられる．

また，減衰を考慮した有限長軌道を対象に加振応答解析を行った結果，減衰の有無による差は無視し得る程度のものであることがわかった．

参考文献

1) 清水紗希，阿部和久，相川明，紅露一寛： 軸力を受けるレールの波動伝播解析，計算数理工学論文集，9，pp.67-72，2009.
2) 清水紗希，阿部和久，相川明，紅露一寛：3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析，鉄道力学論文集，14，pp.75-82，2010.
3) Abe, K., Shimizu, S., Aikawa, A. and Koro, K.: Theoretical study on a measuring method of rail axial stress via vibration modes of periodic track, Proc. of WCRR，2011.
4) 石川大地，阿部和久，紅露一寛：軸力を受ける曲線レールの振動応答解析，計算数理工学論文集，10，pp.57-62，2010.
5) 八十島義之助：鉄道軌道，技報堂，pp.203-232，1967.
6) 柳川秀明，片岡宏夫： ロングレールの座屈安定解析を探る，Railway Research Review 2000年11月号，pp.18-21，2000.
7) Nickel，R.E. and Secor，G.A.: Convergence of consisently derived Timoshenko beam finite elements, *Int.J. Numer. Meth. Engng.*，5，pp.243-253，1972.
8) 阿部和久，田中洋介，西宮裕騎，紅露一寛： レール温度座屈時の分岐過程に関する一考察，鉄道力学論文集，13，pp.7-14，2009.