下負荷面モデルを用いたバラスト道床繰り返し変形解析における 材料パラメータの感度評価

[土] 紅露一寬 (新潟大), [土] 〇間島朋也 (新潟大), [土] 阿部和久 (新潟大)

Sensitivity of material parameters in subloading surface model for cyclic deformation analysis of railway ballast

Kazuhiro KORO (Niigata Univ), Tomoya MASHIMA (Niigata Univ), Kazuhisa ABE (Niigata Univ)

The sensitivity of the material parameters on the simulation results of ballast settlement analysis is estimated with the first-order second-moment method(FOSM). The elastoplastic behaviour of railway ballast is modeled using the subloading surface model with rotational hardening. For the cyclic triaxial test of railway ballast, cyclic loading increases not only the accumulated axial strain, but also the uncertainty of the simulation results. For the cyclic loading test of a ballasted track, the parameter γ is the most sensitive to the vertical displacement at points which are contact to the rail bottom on a sleeper.

キーワード: 道床沈下解析, 下負荷面モデル, 有限要素法, 1次近似 2次モーメント法 Key words: ballast settlement analysis, subloading surface model, FEM, FOSM

1. はじめに

バラスト道床は、列車走行時の荷重分散を図り、騒音・ 振動を低減させる機能を有しており、その優れた経済性・ 施工性ゆえに国内外の鉄道で広く敷設されている.しか し、その単粒度砕石の集合体である構造特性ゆえに、列車 の繰り返し通過によって道床内部のバラスト粒子の移動・ 回転が徐々に累積し、結果としてバラスト上面に残留変位 が生じることとなる.特に鉛直変位は道床沈下と呼ばれ、 そのモニタリングおよび対策は、軌道を管理する上で極 めて重要であり、道床沈下メカニズムの解明およびその 数理モデル化、沈下量予測手法の予測は興味深い研究課 題の一つである.

著者らはこれまで, バラスト道床沈下メカニズムの解 明と, 道床沈下量の定量予測手法の開発を目指し, バラス ト道床を弾塑性連続体でモデル化した有限要素法を提案 し、これを用いて道床沈下解析を試みてきた.特に、バラ スト部の繰り返し変形挙動の弾塑性構成則として回転硬 化を考慮した下負荷面モデル1)により与える有限要素解析 法の実用化について取り組んでおり,有道床軌道の鉛直・ 水平載荷試験の有限要素シミュレーションを行ない、バラ スト道床内部の荷重分散や変形の集中箇所等について検 討した2). しかし、道床用バラスト材は構造の代表寸法に 比べて粒径が大きいこともあり、要素試験や実物大試験の 試験結果は,供試体ごとの粒径や形状,粒子配置のばら つきの影響を大きく受ける.同条件を仮定して実験を行っ ても、その結果は小さくない変動が含まれたものとなる. 一方, 弾塑性有限要素解析では、この力学挙動のばらつ きを材料パラメータの変動として考慮する必要があるが, 解法が決定論的手法であるため,材料の平均的な力学挙 動を評価しているに過ぎない.

そこで本研究では,回転硬化を考慮した下負荷面モデ

ル¹⁾に基づく弾塑性連続体でバラスト材をモデル化する場 合を対象に,材料パラメータの変動がバラスト材の繰り 返し変形解析結果に及ぼす影響について,1次近似2次 モーメント法 (FOSM)³⁾を用いて評価・検討する.

2. 回転硬化を考慮した下負荷面モデル

本研究では、バラスト材の繰り返し変形挙動を、弾塑 性構成モデルの一つである下負荷面モデルで表現する。当 該モデルでは、微小変形および全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}$ の加算 分解 ($\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^{e} + \dot{\epsilon}_{kl}^{p}, \dot{\epsilon}_{kl}^{e}$:弾性成分、 $\dot{\epsilon}_{kl}^{p}$:塑性成分)を 仮定した上で、次の亜弾性構成則を与える。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p), \tag{1}$$

ここで, σ_{ij} は応力テンソル, ε_{kl} は微小ひずみテンソル であり、¹は物質時間微分を表わす.また、弾性係数テン ソル E_{ijkl} は次式で与える.

$$E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$K = \frac{p + p_{num}}{\gamma}, \quad G = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}K, \quad p = -\frac{\sigma_{kk}}{3},$$
(2)

なお、 ν は Poisson 比、 γ は材料定数、 p_{num} は圧力ゼロの ときの剛性を与えるためのパラメータ、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

次に,塑性を表現する諸式を示す.まず,許容応力空間 を規定する正規降伏面を次式で与える.

$$f(\hat{\sigma}, \beta) = F(H), \quad F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right)$$
(3)

ここで, *H*, βはそれぞれ等方硬化変数,回転硬化変数, *F*, *F*₀は等方硬軟化関数その初期値, *σ*は正規降伏面上の応力, ρは材料定数である. 次に,正規降伏面(3)に対し,収縮率 R で相似である 曲面を下負荷面と定義し,次式で与える.

$$f(\bar{\sigma},\beta) = RF(H) \tag{4}$$

ここで、下負荷面上の応力 ō は次式で与える.

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma - (1 - R)s \tag{5}$$

なお, s は相似中心である.

各変数の発展則は次のように表される.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = b_r \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} \| \| \bar{\boldsymbol{\eta}} \| \bar{\boldsymbol{\eta}}_b$$

$$\dot{\boldsymbol{s}} = c \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \| \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{F} \left\{ \dot{F} - \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \boldsymbol{s}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = U(\boldsymbol{R}) \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \| \quad (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \boldsymbol{O})$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = D_v^p + \mu \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} \| (m_d - \frac{\| \boldsymbol{\sigma}^* \|}{p}),$$
(6)

ここで、 $\dot{\epsilon}^{p*}$ は $\dot{\epsilon}^{p}$ の偏差成分、 $D_{v}^{p} = \text{tr}\dot{\epsilon}^{p}$ であり、

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\bar{p}} - \boldsymbol{\beta}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{p}\boldsymbol{I}, \quad \bar{p} = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{\sigma}},$$
$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_b = \bar{m}_b \frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|} - \boldsymbol{\beta}, \quad c = \frac{c_1}{R^{c_3}}\exp\left(c_2\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{N}}\right), \quad (7)$$
$$\dot{F} = -\frac{F}{\rho - \gamma}\dot{H}, \quad U(R) = u_1(1/R^{m_1} - 1)$$

となる. なお, b_r , μ , ϕ_b , ϕ_d , c_1 , c_2 , c_3 , u_1 , m_1 は 材料定数である.

材料関数 m, m_s, m_b, m_d は次式で与える.

$$\bar{m} = \zeta(\bar{\theta}_{\sigma}; \phi), \quad m_{s} = \zeta(\theta_{s}; \phi),$$
$$\bar{m}_{b} = \zeta(\bar{\theta}_{\sigma}; \phi_{b}), \quad m_{d} = \zeta(\theta_{\sigma}; \phi_{d}),$$
$$\sin 3\bar{\theta}_{\sigma} = -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\bar{\eta}^{3}}{\|\bar{\eta}\|^{3}}, \quad \sin 3\theta_{s} = -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\eta_{s}^{3}}{\|\eta_{s}\|^{3}}, \qquad (8)$$
$$\sin 3\theta_{\sigma} = -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\sigma^{*3}}{\|\sigma^{*}\|^{3}},$$

$$\zeta(\theta;\phi) = \frac{14\sqrt{6}\sin\phi}{(3-\sin\phi)(8-\sin3\theta)},\tag{9}$$

ここで, φは材料定数である.

流動則は,関連流動則を採用する. **N** は下負荷面の外 向き単位法線ベクトル,λは正値の比例定数として次式で 与える.

$$\dot{\epsilon}^{p} = \lambda \bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \sigma},$$

$$\varphi = \left\| \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \sigma} \right\|, \quad \lambda = \frac{\operatorname{tr}(\bar{\mathbf{N}} E D)}{\operatorname{tr}(D_{p} + \bar{\mathbf{N}} E \bar{\mathbf{N}})}$$
(10)

ここで,

$$D_{p} \equiv \operatorname{tr}(\bar{N}\bar{a}) + \operatorname{tr}(\bar{N}\bar{\sigma}) \left\{ \frac{F'}{F}h - \frac{1}{RF}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\sigma},\beta)}{\partial\beta}b\right) + \frac{U}{R} \right\}$$
(11)

$$\bar{\boldsymbol{a}} \equiv (1-R)\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{s}, \ \boldsymbol{b} = \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\lambda} = b_r \left\| \bar{\boldsymbol{N}}^* \right\| \left\| \bar{\boldsymbol{\eta}} \right\| \bar{\boldsymbol{\eta}}_b$$
$$\boldsymbol{z} \equiv \frac{\dot{\boldsymbol{s}}}{\lambda} = c\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{F} \left\{ F'h - \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{b} \right) \right\} \boldsymbol{s} \qquad (12)$$
$$\bar{\boldsymbol{N}}^* \equiv \bar{\boldsymbol{N}} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \bar{\boldsymbol{N}}) \boldsymbol{I}$$

また,負荷基準は次式で定める.

$$\dot{\varepsilon}^{p} \neq \mathbf{0}: \quad \bar{N}_{ij} E_{ijkl} D_{kl} > 0, \dot{\varepsilon}^{p} = \mathbf{0}: \quad \bar{N}_{ij} E_{ijkl} D_{kl} \le 0,$$
(13)

3. FOSM による材料パラメータの感度解析

次に、バラスト道床の繰り返し変形解析結果に及ぼす、 下負荷面モデルの材料パラメータの感度の評価方法につ いて考える. 下負荷面モデルでは、材料パラメータおよび それに準ずるものとして、 ϕ 、 ρ 、 μ 、 ϕ_d 、 b_r 、 c_1 、 c_2 . c_3 、 γ 、 ν 、 u_1 、 m_1 、 ϕ_b 、 F_0 の14種類を用いる.以下では、 これらを $p = \{p_i | i = 1, 2, \dots, m\}(m = 14)$ で表わし、確 率変数として設定値の変動を考慮する.

繰り返し変形解析によって評価される物理量を $g_i(i = 1, 2, ..., n)$ (n:評価自由度) で表わしておき,こられの平均値 $E(g_i)$ と分散 $Var(g_i)$,標準偏差 σ_{g_i} について考える. 1 次近似 2 次モーメント法 (FOSM)³⁾では, g_i をパラメータの期待値 $E(p_j)$ まわりで Taylor 展開し,一次の項で打ち切って近似評価する.その結果,次式を得る.

$$g_i \approx g_i(\mathbf{E}(p_1), \mathbf{E}(p_2), \cdots, \mathbf{E}(p_m)) + \sum_{j=1}^m (p_j - \mathbf{E}(p_j)) \left. \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \right|_{\overline{\mathbf{p}}}$$
(14)

式(14)について期待値と分散とをそれぞれ計算すると,

 $E(g_i) \approx g_i(E(\overline{p}_1), E(\overline{p}_2), \cdots, E(\overline{p}_m))$ (15)

$$\operatorname{Var}(g_i) \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \left. \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \right|_{\overline{\mathbf{p}}} \cdot \left. \frac{\partial g_i}{\partial p_l} \right|_{\overline{\mathbf{p}}} \cdot \operatorname{Cov}(p_j, p_l) \quad (16)$$

ただし, $\overline{p} = \{\overline{p}_k = E(p_k) | k = 1, 2, \dots, m\}$ とし, Cov(\cdot, \cdot)は共分散を表わす.標準偏差は $\sigma_{g_i} = \sqrt{\operatorname{Var}(g_i)}$ で評価できる.

材料パラメータの共分散 $Cov(p_i, p_j)$ は, 確率変数 $p_i(i = 1, \dots, m)$ の独立を仮定して与える. 感度 $\partial g_i / \partial p_j$ については, 有理多項式近似⁴⁾を用いて評価する.

4. 下負荷面モデルで用いる材料パラメータの感度解析4.1 大型繰り返し三軸試験の数値シミュレーション

まず、石川らにより実施されたバラスト材の大型繰り返 し三軸試験⁵⁾の数値シミュレーションを対象に、下負荷面モ デルの材料パラメータの感度解析を行なう.以下では、石 川らの試験条件に準じ、拘束圧 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -19.6$ (kPa) で一定とした上で、軸方向応力 σ_{33} を -19.6(kPa) から -98.0(kPa)(応力は引張を正と定義)の範囲で載荷・除 荷を繰り返す繰り返し変形解析を感度解析の対象とする. なお、変形解析は応力制御で行ない、解析結果に及ぼす 材料パラメータの感度は、前述の 14 個のパラメータ全て について検討する.各パラメータの期待値は、実験結果 の再現性を考え Table 1 の通りとした.

感度解析に先立ち、材料パラメータの影響感度の評価方 法である FOSM の評価精度について検討しておく.後述 するが、上記 14 種類の材料パラメータの影響感度は、 c_3 、 F_0 、 ϕ 、 c_1 、 m_1 の順で大きい.そのため、参照解として、











Fig.2 残留軸ひずみの累積挙動に及ぼす材料パラメータ 変動の影響 (c₃ のみ変動)

ここでは最も影響が大きかった c3 のみ変動を考慮し、材 料パラメータに変動係数 $\delta = 1\%, 5\%$ 相当分の変動が混 入したときの順解析結果を用い, FOSM による評価精度 を検証する.載荷・除荷第1サイクルにおける軸ひずみ・ 軸差応力についての解析結果を Fig.1 に示す. ±1% の変 動では、FOSM による軸ひずみの標準偏差 σ_{ε33}の評価精 度は良好であるが、±5%の変動では、順解析結果の変動 が大きくなり、FOSM の評価精度が低下することが分か る.一方,解析サイクル数増加に伴う残留軸ひずみの解析 結果は Fig.2 に示す通りである. 解析サイクル数の増加 とともに、残留軸ひずみの変動幅は拡大する傾向を示す. 変動係数 $\delta = 1\%$ の変動では、順解析結果と FOSM によ る解析結果が概ね一致するのに対し、δ=5%の場合には 変動幅を与える標準偏差の評価精度がサイクル数の進展 とともに低下することが分かる. なお, Fig.1, Fig.2 と もに、順解析結果の変動幅が大きい場合ほど FOSM によ る評価精度が低下する傾向を示し、他のパラメータでも 同様である.



Fig.3 各材料パラメータを個々に変動させた場合の軸ひ ずみの標準偏差(変動係数 $\delta = 1\%$)



Fig.4 全てのパラメータの変動(変動係数 δ = 1%)を 仮定した場合における繰り返し三軸試験の数値解 析結果とその変動

次に、材料パラメータのいずれか一つの 1% 変動を仮定 した場合における、FOSM で評価した第 1 サイクルでの 軸ひずみ ϵ_{33} の標準偏差 $\sigma_{\epsilon_{33}}$ と軸差応力の履歴を Fig.3 に示し、解析結果に対する影響感度の高いパラメータを特 定する、解析結果より、 c_3 、 F_0 、 ϕ 、 c_1 、 m_1 の順で、その 変動が解析結果に及ぼす影響が大きく、その他のパラメー タについてはほとんど解析結果に影響を与えないことが 分かる.特に、影響の大きい c_3 、 F_0 については、1%相 当の変動が混入するだけで第 1 サイクル終了時の残留軸 ひずみ評価値の約 7% (c_3)、約 5%(F_0)相当の変動量が 観測されることが分かる.そのため、実験における力学 挙動の比較的大きな変動は、解析においてはこれら高感 度を示すパラメータの変動として反映される可能性が高 いと考えられ、影響感度が高い材料パラメータの選定に 際しては注意が必要である.

Fig.4は、すべてのパラメータに対し変動係数 $\delta = 1\%$ の変動を与えた場合における、第1サイクルでの軸ひずみと軸差応力の関係、およびサイクル数と残留軸ひずみの関係を示したものである。**Fig.4**(a)より、第1サイクルでの軸ひずみにおける標準偏差± σ 相当分の変動幅は、パラメータ値の変動感度が最も高い c_3 のみ変動の場合と概ね同程度となっている。また、**Fig.4**(b)より、サイクル数の増加とともに残留変形が累積するのに伴い、残留軸ひずみの標準偏差 $\sigma_{\varepsilon_{33}}$ の値は漸増している。第1サイクル終了時の残留軸ひずみでは、変動係数が $\delta_{\varepsilon_{33}} = \sigma_{\varepsilon_{33}}/E(\varepsilon_{33}) \approx 0.07$ であるが、サイクルの進展に伴いその値は増大し、100サ



Fig.5 解析モデルおよび境界条件

Table 2 実物大試験における各パラメータの期待値

$1.74 \times 10^3 ({\rm kg/m^3})$
$\phi = 24^{\circ}$
$\rho = 0.1$, $\mu = 3.8$, $\phi_d = 20^\circ$
$b_r = 80 , \phi_b = 32^{\circ}$
$u_1 = 1.0$, $m_1 = 4.3$
$c_1 = 3.5$, $c_2 = 1.2$, $c_3 = 3.2$
$\gamma = 3.5 \times 10^{-4}$, $\nu = 0.15$
$p_{num} = 0.01 (\text{kPa})$
$F_0 = 270 (\mathrm{kPa})$
$E = 78 (\text{GPa}) , \nu = 0.17$
$2.677 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$

イクル終了時では $\delta_{\sigma_{\varepsilon_{33}}} \approx 0.18$ となっている. このこと から,参照実験結果の力学挙動の変動の影響を考慮して 選定した,(変動を有する)材料パラメータを解析に使用 した場合,サイクル数の増大とともに残留ひずみの解析 結果の変動幅が大きくなる.入力値のわずかな変動でも, 特に高サイクル下では決定論的に得られた解析結果から の変動が大きくなるため,解析結果の分析・考察の際には 注意が必要である.また,残留ひずみの進展挙動の再現性 をもとに下負荷面モデルの材料パラメータを決定するの は,解析結果の不確定性の増大ゆえに困難が予想される.

4.2 実物大軌道の繰り返し載荷試験の有限要素解析

次に,実物大有道床軌道の繰り返し載荷試験の有限要 素解析結果に対する下負荷面モデルの材料パラメータの 感度を評価する.解析は,石川らが実施した実物大有道 床軌道の繰り返し鉛直載荷試験⁶⁾を対象として,**Fig.5**の 3次元有限要素モデルを用いて行なった.解析領域はまく らぎ(線形弾性体),バラスト(下負荷面モデル)の2相 からなり,各部の材料パラメータの期待値は**Table 2**に 示す通りに設定した.材料パラメータの変動は,バラス ト部の14種類のみ考慮し,今回はまくらぎ位置での鉛直 変位に対する感度を評価した.なお,鉛直荷重は,2本の レールの各々の最大荷重が2.5kN刻みで10kN まで漸増 させる条件下で,繰り返し作用させた.

三軸試験において材料パラメータの感度が最も高かった c_3 のみ(変動係数 $\delta = 10\%$),および鉛直変位に対する感度の最も高かった γ のみの変動を考慮した場合を対象に,FOSMによる解析結果の変動感度の評価結果を **Fig.6**に示す.鉛直変位に対する γ の影響感度が最も高



Fig.6 作用荷重とまくらぎ鉛直変位の関係 (変動係数 δ = 10%)

いのは, γが圧力依存性を有するバラスト材の初期接線剛 性を決定するパラメータであることが理由である.繰り 返し三軸試験のシミュレーションにおいて感度が高かった c3 については, γ ほどではないが, 他の下負荷面モデル のパラメータの中では、高い影響感度を示した. バラス ト領域内部の応力・ひずみ分布が一様でないこともあり, パラメータの変動量を期待値の 10%と小さくない値に設 定しても,変位量の変動幅は変動なしの場合の 10%程度 を示しており, FOSM による鉛直変位の変動幅の評価結 果は順解析結果と概ね一致している.しかし、塑性挙動に 影響を与えるパラメータの場合、載荷・除荷の繰り返しと ともに残留変位が累積すると, FOSM による鉛直変位の 標準偏差の評価精度が低下する傾向を示す. この傾向は, 繰り返し三軸試験の解析の場合と同様である、なお、パ ラメータ m1 を変動させた場合, FOSM による標準偏差 の評価精度が著しく低下する場合があった. 今後はこの 問題を解決するとともに、バラスト領域内の応力や残留 ひずみに対する材料パラメータの感度評価に取り組む.

謝辞 本研究を実施するにあたり, 平成 21-23 年度文 部科学省科学研究費補助金(若手研究 (B), 課題番号 21760398)の助成を得た.よって,ここに記して謝意を 表す.

参考文献

- 橋口公一,上野正美,陳忠平:下負荷面および回転硬 化の概念に基づく土の弾塑性構成式,土木学会論文集, No.547 / III-36, pp.127-144, 1996.
- 2) 紅露一寛,阿部和久:有道床バラスト軌道を対象とした 繰り返し鉛直・水平載荷試験の弾塑性有限要素解析,第 17 回鉄道技術連合シンポジウム (J-RAIL) 講演論文集, pp.565-568, 2010.
- Mellan, R., Auvinet, G., Masrouri, F.: Stochastic finite element method applied to non-linear analysis of embankments, *Prob. Engrg. Mech.*, Vol.15, pp.251-259, 2000.
- Chowdhury, R.N., Xu, D.W.: Rational polynomial technique in slope-reliability analysis. J. Geotech. Engrg. ASCE, Vol.119, No.12, 1993.
- 5) 石川達也, 須長 誠, 董 軍, 名村 明: 大型繰返し三 軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会 論文集, No.575, III-40, pp.169-178, 1997.
- 石川達也,名村 明:実物大試験による道床バラスト部繰返し変形特性の検討,土木学会論文集,No.512, IV-27, pp.47-59, 1995.