# 状態空間モデルを用いた軌道狂い原波形の復元

永沼泰州*（東海旅客鉄道），吉村彰芳（東京工科大学）

Reconstruction of Railway Track Geometry using State Space Model

Yasukuni Naganuma* (Central Japan Railway Company)
Akiyoshi Yoshimura (Tokyo University of Technology)

**Abstract**

This paper deals with reconstruction of actual track geometry from versine track irregularity data measured by the three-point method using state estimation methods. The 10 m versine measurement is expressed as a state space model and the track geometry is restored by using the dynamic programming filter, the Kalman filter, the Kalman iteration and the particle filter. Study results confirmed that state estimation methods are useful for accurately reconstructing actual track geometry directly from short length versine data.

キーワード：軌道狂い原波形，状態空間モデル，逆解析，ダイナミックプログラミングフィルタ，カルマンフィルタ，粒子フィルタ
(track irregularity, reconstruction of track profile, inverse analysis, state space model, dynamic programming filter, Kalman filter, particle filter )

## 1. まえがき

鉄道線路の軌道形状は，主に10 m弦正矢法や偏心矢法を用いて計測される。この軌道狂い波形は地上の軌道形状とはかなり異なるので，補修のための線路移動量が必要な場合や車両運動シミュレーションの入力データとして使用したい場合には，測定データ（出力）から実際の軌道形状（入力）を復元（逆算）しなければならない。この原波形復元問題には，古くは累計法や平均法と呼ばれる計算手法や単純積分による近似解法などが用いられてきたが，近年は測定系の逆特性を持つ「復元逆フィルタ」[1]が良く用いられている。この方法による原波形復元は安定かつ高精度であるが，多くのインパルス応答（フィルタ係数）を必要とするので，出力された原波形にはその先頭と末尾に所定の復元精度を満足しない過渡応答が存在する。このため，小型軌道検測装置や大型保線機械で測定したデータから原波形を計算したい場合，例えばわずか50 mの原波形を得たい場合でも，過渡応答を考慮すると延長約1 kmの計測を余儀なくされる。

以上の問題認識から，著者らは逆フィルタとは別の原波形復元法の開発に取り組んでおり，2009年には正則化手法を用いた新しい原波形復元法を開発した[2]。本稿はその後の研究成果として，10 m弦正矢法による軌道計測を状態空間モデルで定式化し，複数の状態推定手法を用いて軌道狂い原波形の復元を試みた結果について報告する。

## 2. 正矢法による軌道検測の状態空間表現

車両運動シミュレーションやディジタルフィルタなど，時系列解析の多くの問題は，状態空間モデルを用いることによって状態推定の問題として定式化できる。状態空間モデルは，(1)式に示す状態方程式と(2)式に示す観測方程式によって表される。

$$\boldsymbol{x}_n = F\boldsymbol{x}_{n-1} + P\boldsymbol{u}_n + Gw_n \quad \text{（状態方程式）} \cdots\cdots (1)$$

$$\boldsymbol{y}_n = H\boldsymbol{x}_n + v_n \quad \text{（観測方程式）} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ただし，$\boldsymbol{x}_n$は状態ベクトル，$\boldsymbol{u}_n$は入力ベクトル，$\boldsymbol{y}_n$は出力ベクトルであり，$w_n \sim N(0,Q)$と$v_n \sim N(0,R)$はいずれもガウス型白色雑音で，それぞれシステムノイズ，観測ノイズと呼ばれる。また，$F$は状態遷移行列，$P$は入力行列，$G$は駆動行列，$H$は観測行列と呼ばれることがある。

軌道狂いを，1 m毎にサンプリングした離散的なディジタルデータの系列として扱えば，10 m弦正矢法による測定は近似的に次の2階差分方程式で表される。

$$y(n) = x(n) - \frac{x(n+5)+x(n-5)}{2} \qquad n = 1, 2, \cdots, N \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで，$x(n)$は軌道狂い原波形，$y(n)$は10 m弦正矢法による測定波形を表す。式(3)から，観測方程式における観測行列$H$は，

$$H = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となることがわかる。一方，状態方程式における状態遷移行列$F$は，それぞれの状態推定手法に適合させる必要があり，詳細は後述する。

## 3. ダイナミックプログラミングフィルタ

外部入力がある状態空間モデルを用いた逆解析手法として，動的計画法を基礎としたダイナミックプログラミングフィルタがTrujilloとBusbyにより提案された[3]。この方法では，(1),(2)式の状態空間モデルにおいてシステムノイズと観測ノイズは考慮しない。状態方程式は式(5)のとおりである。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_n \cdots\cdots (5)$$

ダイナミックプログラミングフィルタを用いた逆解析では式 (6) の最小化問題として外力 $\boldsymbol{u}_k$ を求める。

$$E_N(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_j^*, A\left(\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_j^*\right)\right) + (\boldsymbol{r}_j, B\boldsymbol{r}_j) \quad (6)$$

ここで $(\bullet, \bullet)$ は2つのベクトルの内積を表し，$N$ は測定データ数，$\boldsymbol{y}_j^*$ は測定データである。$A$ は重みマトリクスで今回は単位行列とした。$B$ は Tikhonov 正則化のパラメータであり，ノイズの影響を抑制して解の値を制限する（原波形の振幅を制御する）働きをする。最小2乗規範と動的計画法の原理を式 (6) に適用し，Chandrasekhar の式を用いれば，前進探索と後進探索と呼ばれる2セットの再帰式が得られる。最初のステップは以下に示す後進探索を行うことである。

$$D_{n-1}^{-1} = D_n^{-1} - 2P^T Y_n L_n Y_n^T P \cdots\cdots (7)$$

$$K_{n-1} = K_n + \left(2K_n P^T Y L_n Y_n^T P - Y_n L_n Y_n^T P\right) D_{n-1} \quad (8)$$

$$Y_{n-1} = F^T \left(I - 2K_n P^T\right) Y_n \cdots\cdots (9)$$

$$L_{n-1} = L_n + L_n Y_n^T 2PD_{n-1} P^T Y_n L_n \cdots\cdots (10)$$

$$\boldsymbol{s}_{n-1} = -2H^T A\boldsymbol{y}_{n-1} + F^T \left(I - 2K_n P^T\right) \boldsymbol{s}_n \cdots\cdots (11)$$

上記式は，計算開始点 $n = N$ における以下の初期条件のもとで計算される。

$$D_N^{-1} = 2B + 2P^T H^T AHP \cdots\cdots (12)$$

$$K_N = H^T AHPD_N \cdots\cdots (13)$$

$$Y_N = F^T H^T \cdots\cdots (14)$$

$$L_N = -A + AH2PD_N P^T H^T A \cdots\cdots (15)$$

$$\boldsymbol{s}_N = -2H^T A\boldsymbol{y}_N \cdots\cdots (16)$$

後進探索の過程において，ベクトル $D_n P^T \boldsymbol{s}_n$ と行列 $K_n^T R$ を全て記憶させておく。その後，前進探索において式 (17) と (18) を $n = 1$ から順次計算すれば外部入力 $\boldsymbol{u}_n$ を得ることができる。

$$\boldsymbol{u}_n = -D_{n+1} P^T \boldsymbol{s}_{n+1} - 2K^T R\boldsymbol{x}_n \cdots\cdots (17)$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = F\boldsymbol{x}_n + P\boldsymbol{u}_n \cdots\cdots (18)$$

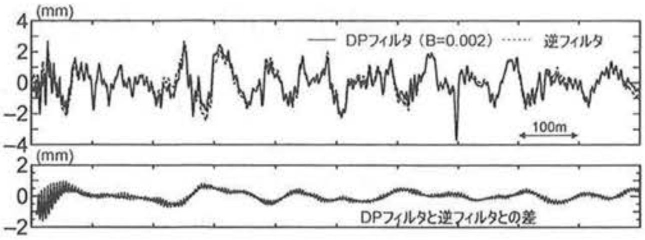


図1 ダイナミックプログラミングフィルタによる原波形

ダイナミックプログラミングフィルタによる計算結果を図1に示す。Tikhonov 正則化パラメータの値は $B = 0.002$ を用いた。得られた原波形のデータ数は 10 m 弦測定データと等しく，図中に併記した逆フィルタによる復元結果と良く一致し，その差は約 1 mm である。また，得られた原波形から再計算した 10 m 弦は元の測定データとほぼ一致し，復元結果が解として所定の精度を持っていることも確認された。

前述の通り，ダイナミックプログラミングフィルタは数学的にシンプルでプログラミングも容易である。しかも測定データや未知入力項のデータ長や測定位置に制約を受けないという利点がある。その反面，前進探索と後進探索の2つの計算ステップが必要となるので，オンラインのリアルタイム演算には適していない。

## 4. カルマンフィルタ

〈4·1〉 逐次法　カルマンフィルタは，誤差のある観測値を用いてシステムの状態を逐次推定する代表的な状態推定手法である。通常のカルマンフィルタでは，式 (1) の外部入力 $u_n$ は既知の確定入力として扱われるので，これを逆解析することはできない。そこで，式 (19) に示すように外部入力 $u_n$ とシステムノイズ $w_n$ を加算し，これを新たにシステムノイズ $w_n$ として再定義することで，カルマンフィルタの逐次的な計算アルゴリズム（式 (20)〜(24)）を原波形復元問題に適用可能とした。原波形 $u_n$ の推定値は状態変数 $\boldsymbol{x}_n$ の推定値の一成分として与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (u_n + w_n) \cdots\cdots (19)$$

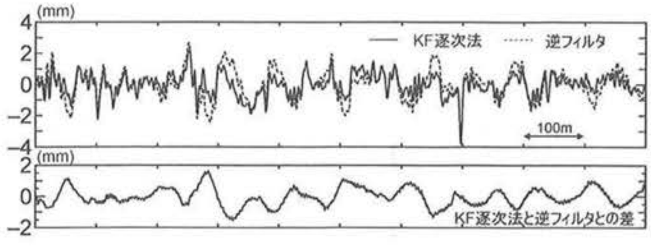


図2　カルマンフィルタ（逐次法）による原波形

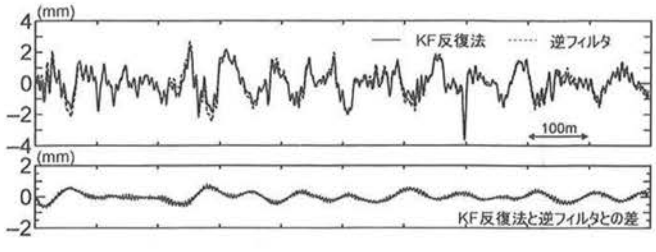


図3　カルマンフィルタ（反復法）による原波形

（1期先予測）

$$\boldsymbol{x}_{n|n-1} = F_n \boldsymbol{x}_{n-1|n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^T + G_n Q_n G_n^T \cdots\cdots (21)$$

（フィルタ）

$$K_n = V_{n|n-1} H_n^T \left( H_n V_{n|n-1} H_n^T + R_n \right)^{-1} \cdots (22)$$

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n \left( y_n - H_n x_{n|n-1} \right) \cdots\cdots (23)$$

$$V_{n|n} = (I - K_n H_n) V_{n|n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

カルマンフィルタにより逐次得られた原波形を図2に示す。システムノイズおよび観測ノイズの分散の値は $\sigma_w = 0.15$, $\sigma_v = 0.00018$ を用いた。カルマンフィルタによる結果と逆フィルタとの差はダイナミックプログラミングフィルタの場合より大きく，最大で 1.6 mm 程度の差が生じたが，これは主に約 80 m 以上の長波長成分によるものである。再計算した 10 m 弦は測定値と良く一致するので，10 m 弦を整正するための移動量に十分使用できる。カルマンフィルタによる原波形復元で特筆すべきは，ほぼリアルタイムで原波形復元計算を実行できることであり，10 m 弦測定データが得られるとわずか 10 m の遅れで原波形を出力することができる。

**〈4・2〉 反 復 法**　前節のカルマンフィルタにおいて長波長成分の復元結果が逆フィルタと異なる理由は，現時点までに得られた観測値のみを用いて入力を推定しているためである。この解決には，固定区間平滑化や固定ラグ平滑化など，未来の情報を含めたより多くの観測値を利用する必要がある。そこで本節では，主に土木工学の分野で逆問題解析に利用されているカルマンフィルタ反復法[4]による復元を試みる。この方法は，連立方程式の解法である反復法にカルマンフィルタを利用するもので，$\boldsymbol{y}_n$ は全ての 10 m 弦測定データで，状態遷移行列 $F$ は単位行列となる．また，システムノイズの分散の値は 0 とし，観測ノイズのみを考慮する。観測行列 $H$ は式 (25) に示す通りである。

反復法の場合，状態方程式，観測方程式における添字 $n$ はデータ番号でなく，反復回数を表す。反復計算の結果，$x_{n+1} \cong x_n$，つまり残差が 0 とみなせれば，連立方程式の解として原波形が得られる。観測ノイズの標準偏差を $\sigma_v = 0.01$ とした場合のカルマンフィルタ反復法による計算結果を図3に示す。逆問題解析に用いられる Landweber 反復法が 1000 回程度の反復計算を必要とするのに対し，本手法の収束は桁違いに早く，今回の結果を得るのに要した反復回数はわずか 5 回であった。

## 5. 粒子フィルタ

カルマンフィルタが線形・ガウス型の状態空間モデルしか扱えないのに対し，以下のような非線形・非ガウス型の状態空間モデルを扱うことができる状態推定手法として粒子フィルタ[5][6]が注目を集めている。

$$\boldsymbol{x}_n = F(\boldsymbol{x}_{n-1}, v_n) \quad \text{（状態方程式）} \cdots\cdots (26)$$

$$\boldsymbol{y}_n = H(\boldsymbol{x}_n, w_n) \quad \text{（観測方程式）} \cdots\cdots (27)$$

この方法はモンテカルロフィルタとも呼ばれ，各分布をそこから得られた独立な実現値とみなせる多数の粒子を用いて近似する。これらの粒子は以下のアルゴリズムに従って逐次的に求められる。

（1）　$j = 1, \ldots, m$ について $k$ 次元の乱数 $f_0^{(j)} \sim p_0(x)$ を生成する。

（2）　$n = 1, \ldots, N$ について以下のステップを実行する。このうち (a), (b), (c) については $j = 1, \ldots, m$ について $m$ 回独立に計算する。

（a）　$l$ 次元の乱数 $v_n^{(j)} \sim q(v)$ を生成する。

（b）　$p_n^{(j)} = F\left(f_{n-1}^{(j)}, v_n^{(j)}\right)$ を計算する。

（c）　$\alpha_n^{(j)} = R\left(y_n | p_n^{(j)}\right)$ を計算する。

（d）　$p_n^{(1)}, \ldots, p_n^{(m)}$ からそれぞれ $\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(m)}$ に比例する割合で復元抽出し，$f_n^{(1)}, \ldots, f_n^{(m)}$ を生成する。

粒子フィルタによって逐次的に復元された原波形を図4に示す。状態方程式，観測方程式，誤差の標準偏差はカルマンフィルタ（逐次法）と同様である．粒子フィルタはカルマンフィルタ（逐次法）による結果と大差なく，主に 80 m 以上の長波長成分において逆フィルタの結果と異なる。他の手法に比べて復元精度が思わしくない理由は，粒子数 ($m = 500$) が少なかったためと考えられる．粒子フィルタも逐次計算なので原理上はリアルタイム復元可能であるが，精度向上のため粒子数を増加させると，これに比例して計算負荷が増大する。

## 6. おわりに

本論文では，10 m 弦正矢法による軌道検測を状態空間モデルで表現し，状態推定手法を用いた逆解析によって軌道狂い原波形の復元を試みた。カルマンフィルタ逐次法および粒子フィルタは，逆フィルタと比較すると長波長成分で

$$H=\begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \in R^{M\times N} \quad \cdots\cdots (25)$$

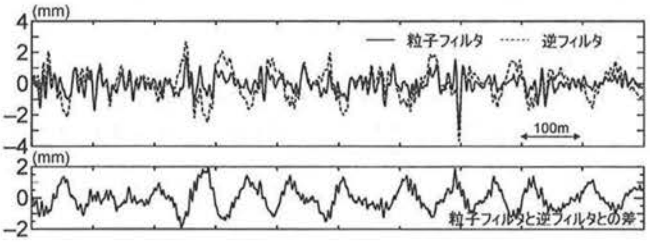


図 4　粒子フィルタによる原波形

差が生じているものの，10 m 弦計測とほぼ同時に原波形を得ることができる。一方，全ての観測データを利用して状態推定を行うダイナミックプログラミングフィルタとカルマンフィルタ反復法は，長波長成分も含めて逆フィルタと良く一致する復元結果を得ることができた。

本研究の成果の保線実務への応用として，例えば簡易軌道検測装置への適用が挙げられる。カルマンフィルタ逐次法を利用すれば，測定中にわずか十数メートルの遅れで原波形（= 軌道整正量）を知ることができる。また測定終了後，ダイナミックプログラミングフィルタを用いて再計算すれば，逆フィルタと同等の波長帯域の復元原波形を得ることができる。いずれも計算負荷は小さく，測定データとほぼ等しい長さの原波形が得られる。本稿では 10 m 弦正矢の場合について述べたが，2.5 m 弦正矢や偏心矢法の場合も同様である。

今回，粒子フィルタによる復元はカルマンフィルタ逐次法と比較して優位な結果は得られなかったが，1000 程度の十分な粒子数で計算すれば，今後，10 m 弦検測を厳密な非線形モデルとした場合などに有効であると考えられる。また，状態空間モデルにおいて事前に与えなければならないシステムノイズ・観測ノイズの分散の値は，線区の軌道状態や検測システムの S/N 比と関連しているはずであり，これらの選定指針を与えることも重要な課題である。

## 参考文献

(1) 吉村彰芳: 「軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の確立とその応用」，鉄道技術研究報告, No.1336 (1987)
(2) 永沼泰州・吉村彰芳：「正則化手法を用いた軌道狂い原波形の復元」，鉄道力学論文集，No.13 pp.126-133 (2009)
(3) Trujillo & Busby: Practical Inverse Analysis in Engineering, CRC Press (1997)
(4) 土木学会：「土木工学における逆問題入門」，丸善 (2000)
(5) 北川源四郎：「時系列解析入門」，岩波書店 (2005)
(6) 樋口知之：「粒子フィルタ」，電子情報通信学会誌，Vol.88, No.12 pp.989-994 (2005)