3702 動摩擦係数を考慮した3次元接触理論に基づく粘着力のモデル化

正 [機] 〇山崎 大生 (東京都市大)

Adhesion model based on Hertz theory using coefficient of dynamic friction

Hiro-o YAMAZAKI, Tokyo City Univ. 1-28-1, Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo

Carter's theory is famous adhesion model in railway braking technology. However, the range the adhesion force characteristic cannot express over 0.2% range. The beam model can express adhesion force in all slip ratios. However, it has a problem that the contact pressure distribution is different from Hertz theory. This paper shows adhesion force model considered dynamic friction coefficient in all slip ratios based on three-dimensional contact theory.

Keywords: adhesion, modeling, dynamic friction coefficient, contact mechanics

1. はじめに

Carter はブレーキ時における粘着モデルを報告してい るが,すべてのスリップ比領域で解が表現できなかった ^{1), 2)}. そこで筆者らは自動車のビームモデルを鉄道に適 用し,全てのスリップ率における粘着力のモデル化を検 討してきた³⁾. しかしながら,接触圧分布がヘルツの接 触圧分布と異なる問題点があった^{4),5)}. さらに Kalker の 理論⁶⁾では,動摩擦係数が考慮されておらず,特に駆動・ 制動時で重要となる車輪軸回転運動と車両の前後方向の 運動の解析には不十分であるといった問題点があった.

筆者らは、ヘルツの接触圧分布に基づき、2 次元ヘル ツ接触理論に基づく粘着力のモデル化を行ない、その有 効性を検討してきた⁷⁾.しかし動摩擦係数を考慮した 3 次元ヘルツ接触圧分布による粘着力のモデルは報告がな されていなかった.

そこで本研究では、駆動・制動時の車輪回転運動と車 両の前後方向運動の解析のため、3 次元ヘルツ接触圧理 論に基づき横滑りとスピンは考慮しない単純化した前後 方向の粘着力のモデルについて検討を行ったので報告す る.

2. モデル

3次元での楕円接触圧分布は次式で示される⁸⁾.

$$p_z(x, y) = \frac{3F_z}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{1}$$

固着領域における接線力分布域はスリップ比に依存し 弾性変形すると仮定すると次式となる²⁾.



Fig.1 Traction distribution for pure longitudinal force in simplified theory

$$f_{a}(x,y) = \begin{cases} Gs \left\{ x + a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{2}} \right\} dxdy & (f(x,y) > 0) \\ 0 & (f(x,y) \le 0) \end{cases}$$
(2)

なお,位置 y におけるリーディングエッジは次式である.

$$a(y) = a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{3}$$

一方,固着領域に静止摩擦係数 µm を乗じた値は,次式 となる.

$$f_a(x, y) = \frac{3\mu_m F_z}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{4}$$

接線力分布は静止摩擦係数と接触圧分布の積,つまり 式(4)以上には物理的になり得ない.よってつぎの関係が 成り立つ.

$$Gs\left(x+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy \le \frac{3\mu_m F_z}{2\pi ab}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (5)$$

滑り領域における接線力分布は,式(1)で表される接触 圧力分布に動摩擦係数を乗じたものであるから,次式で あらわすことができる.

$$f_s(x, y) = \frac{3\mu_d F_z}{2\pi a b} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{6}$$

ここで動摩擦係数は次式で表わされる.

$$u_d = \mu_m - ksv \frac{l}{l - l_h} \tag{7}$$

式(5)の左辺と右辺が一致するときの接触面のx座標が リーディングエッジからの距離 *l*_hとなる.

最終的には式(8)に示される楕円関数の2重定積分を解 くことにより,前後方向の粘着力が求められる.しかし ながら楕円関数の2重定積分は解が示されていない.よ

[No.09-65] 日本機械学会第16回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集〔2009-12.2~4. 東京〕

って式(8)を数値計算によって求めることで粘着力を計 算することになる.

$$F_x = \iint f_a(x, y) dx dy + \iint f_d(x, y) dx dy$$
 (8)
ここで、各記号は以下である.
 $F_x : 粘着力$
 $F_a : 固着領域における接線力$
 $F_d : すべり領域における粘着力$

F₂:輪重

G: 横弹性係数

μ":静止摩擦係数

μ_d:動摩擦係数³⁾⁻⁵⁾

2a:接触長さ

2b: 接触幅

- *p_z(x,y)*:接触面座標 *x*,*y*における接触圧
- 1h: 固着領域の境界値(x座標)

v:車両走行速度

- s:スリップ比
- k:動摩擦係数を決定する比例係数

3. 数值計算

数値計算には MATLAB を使用した. 計算条件として, 接触幅,接触長さはそれぞれ 6.8mm, 6.5mm とした⁸⁾. 数値積分の要素分解能は接触幅,接触長さの1/25とし、 輪重は 40kN, 走行速度は 100km/h とした. 計算に用い る静止摩擦係数は在来線平均値の粘着係数を用い、動摩







Fig.2 Distribution of adhesion force in contact surface (s=0, v=100km/h, k=0.0013)

擦係数は式(7)を用いた.動摩擦係数を決定する比例係数 は、文献 3)の数値を用いた.また比較のため動摩擦係数 を決定する比例係数を3倍とした結果についても検討し た. 計算条件を Table.1 に示す.

Table.1	Calculation	parameters
---------	-------------	------------

Symbol	Mean	Value
G	Modulus of transverse elasticity [GPa]	80.0
а	Half value of contact length [mm]	6.8
b	Half value of contact width [mm]	6.5
F_z	Wheel load [kN]	49.0
v	Running velocity [m/s]	27.8
k	Coefficient of dynamic friction	0.0013
	against slip velocity	0.0039

4. 計算結果

動摩擦係数を考慮した場合における、スリップ比0、 つまり車輪滑走なしの場合の接触面の粘着領域とすべり 領域の状態を Fig.1 に示す. Fig.2 はこのときの接線力分 布を示している. Fig.3 は動摩擦係数を考慮した場合にお ける,スリップ比 0.05 時の接触面の粘着領域とすべり領 域の状態を示している.図に示されるように Kalker⁶⁾の 報告と同様な粘着領域とすべり領域が示されいる. Fig.4 は同じ条件の時の接線力分布を表しており、粘着領域で は式(2)の特性を、すべり領域では式(6)の特性を表してい 3.





0

10

-5





Fig.7 Slipping and adhesion area in contact surface (s=0.5, v=100km/h, k=0.0013)



Fig.8 Distribution of adhesion force in contact surface (s=0.5, v=100 km/h, k=0.0013)



Fig.9 Slipping and adhesion area in contact surface (s=0.1, v=100km/h, k=0.0039)



Fig.5 は動摩擦係数を考慮した場合における,スリップ 比 0.1 の時の接触面の粘着領域とすべり領域の状態を示 している.図より粘着領域とすべり領域がほぼ同じ程度 なっていることが示されいている.Fig.8 よりすべり領域 では動摩擦係数の影響を受け,接線力分布が粘着領域よ り非連続に低下している様子が見て取れる.

Fig.7 はスリップ比 0.5 の時の接触面における粘着領域 とすべり領域の結果を, Fig.8 はこのときの接線力分布を 示している.結果より,滑り領域が増大し,接線力分布 は動摩擦係数の低下の影響を受け全体的に大きく低下し ている. Fig.9 にスリップ比 0.1,動摩擦係数を決定する 比例定数を 0.0039 とした場合の結果を示す.動摩擦係数 を決定する比例係数が 0.0013 とした結果 (Fig.5) と比較 すると粘着領域と滑り領域は同じである.一方, Fig.10 に示されるように,すべり領域における接線力分布の低 下が Fig.6 と比較して大きくなっている.

次に粘着力のスリップ比特性を Fig.11 に示す. 点線は 動摩擦係数を考慮しない場合,実線と鎖線はそれぞれ動 摩擦係数を考慮し, k=0.0013,0.0039 とした場合の結果で ある.動摩擦係数を考慮しない場合,粘着力が飽和した 後,Kalkerの理論と同様,スリップ比の増大に対して粘 着力は低下しない.在来線粘着係数の平均値との誤差は, 3%未満であった.一方,動摩擦係数を考慮した場合,粘 着力が飽和したのちに最大値をとり,その後,スリップ 比の増大に対して粘着力は低下することが示されている.

5.まとめ

全てのスリップ比領域において適用でき、かつ動摩擦 係数を考慮した3次元ヘルツ接触理論による粘着力のモ



Fig.11 Comparison with adhesion characteristics with static friction coefficient and dynamic friction coefficient (v=100km/h, solid line k=0.0013, dotted line k=0, doted-dashed line k=0.0039)

デル化を検討した.その結果,動摩擦係数の速度依存係 数を変化させることで,粘着力飽和後,粘着力が低下す る特性を表すことができることが示された.

謝辞

本研究を進めるにあたり有益なご助言を頂いた鉄道総研 の神山雅子博士,元鉄道総研の大山忠夫博士に深く御礼申 し上げます.また創成工学研究の課題を通じて,重要な指 摘を頂いた本学工学部機械工学科清野紘平君に感謝申し上 げます.

参考文献

- 大山忠夫:高速鉄道車両の車輪とレール間の粘着力におよぼす接触条件の影響と粘着力向上に関する研究,鉄道総研報告 Vol.1 No.2, pp.1-63, (1987)
- F.W. Cater: On the action of a locomotive driving wheel, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A112, pp. 151-157, 1926.
- H. YAMAZAKI, M. NAGAI, T. KAMADA: A Study of Adhesion Force Model for Wheel Slip Prevention Control, JSME International Journal Series (C), Vol.47, No.2,pp.496-501, 2004.
- 4) 山崎大生:非線形ロバスト制御理論による鉄道車両の滑走制御に関する研究,東京農工大学大学院工学教育部 学位論文,pp.17-40,2005.
- 5) 酒井秀男:タイヤ工学, グランプリ出版, pp.17-191, 1987.
- Kalker, J. J.: Survey of wheel-rail contact theory, Vehicle System Dynamics, pp.317-258, 1979.
- 7) 山崎大生,森智彦,狩野泰,西森久宜,小原孝則, 宗重倫典,松岡成康,大山忠夫:2次元理論に基づ く粘着力のモデル化と VSS オブザーバを用いた車 両の粘着力推定,第13回 鉄道技術連合シンポジウ ム J-Rail2006, pp.151-154,2006.
- B. JACOBSON, J.KALKER: Rolling contact phenomena, Springer, pp.21-327, 2000.