

3602 一部に他構造を含む無限軌道の波動透過特性

正 [土] ○阿部和久 (新潟大学工学部)

菊地敦彦 (東亜建設工業株式会社)

正 [土] 紅露一寛 (新潟大学大学院)

Wave Transmission in an Infinite Railway Track Having an Irregular Zone

Kazuhiisa ABE, Niigata University, 8050 Igarashi 2-Nocho, Nishi-ku, Niigata

Atsuhiko KIKUCHI, Toa Corporation

Kazuhiro KORO, Graduate School, Niigata University

This paper presents a wave propagation analysis method for a periodic railway track having a finite irregular zone. A half-infinite periodic sub-region is represented by an impedance matrix. The infinite system is reduced to a matrix equation with finite DOF by coupling the impedance matrices with the irregular zone. Through numerical examples, influence of the heterogeneity on the wave propagation is discussed in terms of the dispersion of wave modes. It is found that the irregularity is effective to cut off the wave transmission.

Keyword: infinite track, irregular zone, impedance matrix, incidental waves, transmittance

1. はじめに

これまで著者らの研究グループでは、鉄道軌道をまわらぎにより離散支持された無限周期構造としてモデル化し、その動的特性について検討してきた。例えば、文献 1) では軌道内を減衰せずに伝播して行く波動モードの分散特性を調べ、パッドの剛性などの軌道構造が振動低減に及ぼす効果などについて検討した。また、文献 2) では定点調和加振を受ける無限周期軌道の応答解析を行い、上述の波動伝播特性と加振応答との対応関係について調べた。

なお、これらの解析では、軌道系を無限周期構造としてモデル化している。しかし、実際の軌道においては、レール継目のように一部の区間で他の構造が含まれるケースがある。そこで、文献 3) では一部構造の異なる区間を有する無限軌道系を対象に、調和加振時の動的応答解析手法を構成し、定点加振下での応答特性について調べた。その際に、有限な非周期部のみをはり要素等の有限要素により離散化し、その打ち切り端に半無限周期軌道の動特性を反映させた伝達境界 (インピーダンス行列) を設定した。

当該解析では、加振点は非周期区間にのみ作用するものとし、定点加振応答の解析を対象としている。しかし実際の軌道では、列車走行により励起された波動が遠方より伝播し、非周期区間を透過して行くような状況についても考察する必要がある。特に、波動の遮蔽効果は軌道や地盤の防振性や軌道破壊などにも関係するため、基礎的検討によっても新たな知見が得られるものと期待される。

そこで本研究では、一部に他と異なる軌道構造を有する無限軌道系を対象に、無限遠方より波動入射を受ける場合の波動透過解析法を構成する。具体的には、文献 3) と同様に伝達境界を用い非周期部のみの離散化による解析を実施する。なお、文献 3) では Floquet 変換⁴⁾に基づき、半無限周期構造のインピーダンス行列を作成した。しかしこの場合、逆 Floquet 変換の際に、Floquet 波数に関す

る有限区間積分を行う必要がある。当該積分の被積分関数は、有限要素解により与えられる。さらに、特異積分を適切に処理する必要もあり、計算効率上改善が望まれた。そのため本論文では、Floquet 変換によらず、固有モード解析に基づき⁵⁾解法を構成する。

なお、数自由度から成る簡単な周期構造に対する同様の検討が李・田邊⁶⁾によりなされている。しかし、より複雑な周期構造を対象とする場合、有限要素解析の枠組みの中で定式化を一般化する必要がある。ここでは、多自由度系に対するより一般的な解法の構成を示す。以下では、まず具体的解法について述べる。次に解析例として、一部に異なる構造を有する無限軌道の波動伝播解析を行い、軌道構造と波動透過特性との対応関係について検討する。

2. 定式化

2.1 入射波を受ける無限軌道

Fig.1 のように、左方から右方向へ伝播して来る波動 u^l の入射を受ける無限軌道を考える。ここで、 Ω_L と Ω_R は左右の半無限周期軌道であり、 Ω_H はそれらと異なる構造を有する部分軌道である。また、 Γ_L, Γ_R はそれらの境界点である。なお、 Ω_H には外力が作用していても良いものとする。

解析に当り、この軌道系を Fig.2 に示す様に 3 つの部分構造に分割する。図において、 u^R は結合境界 Γ_L からの反射波、 F_L, u_L および F_R, u_R はそれぞれ Ω_L, Ω_R の端点における内部節点力と節点変位である。また、 F_1, u_1 および F_3, u_3 はそれぞれ Ω_H 両端の節点力と変位である。部分領域 Ω_H の運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & \hat{K}_{13} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \hat{K}_{23} \\ \hat{K}_{31} & \hat{K}_{32} & \hat{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

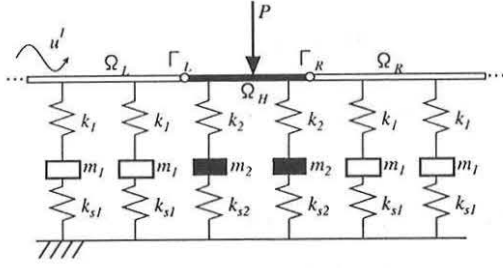


Fig. 1 An infinite railway track subjected to incident waves

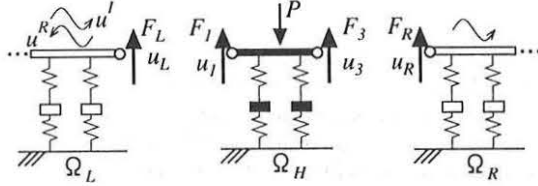


Fig. 2 Sub-structures of infinite track

ここで、 $(\cdot)_2$ は $\Omega_H \setminus (\Gamma_L \cup \Gamma_R)$ における部分ベクトル、 $\hat{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$ は要素剛性行列と質量行列からつくられる部分行列、 ω は円振動数である。節点力のうち、 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$ は半無限周期軌道との接合部における内力であり、この段階では未知量となる。

なお、結合境界 Γ_L, Γ_R では、次の変位の適合条件と力のつり合い条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &= \mathbf{u}_1, & \mathbf{u}_R &= \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_1 &= 0, & \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

よって、式(1)における未知力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$ は $\mathbf{F}_L, \mathbf{F}_R$ により与えることができる。

2.2 左半無限系右端内力の評価

$\mathbf{F}_L, \mathbf{u}_L$ は入・反射波動により構成され、次式のように分離できる。

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_L^i + \mathbf{F}_L^r, \quad \mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L^i + \mathbf{u}_L^r \quad (3)$$

ここで、 Ω_L 右端 (Γ_L) にのみ節点力 $\mathbf{F}_L$ が作用する場合を考える。これと変位 $\mathbf{u}_L$ との関係を与えるインピーダンス行列を $\mathbf{K}_{LL}$ とする。同様に、 Ω_L を補完する右半無限系の左端における節点力 $\mathbf{F}_{LR}$ と変位 $\mathbf{u}_L$ との関係を与えるインピーダンス行列を $\mathbf{K}_{LR}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}_{LL} \mathbf{u}_L = \mathbf{F}_L, \quad \mathbf{K}_{LR} \mathbf{u}_L = \mathbf{F}_{LR} \quad (4)$$

次に、 Ω_L と同じ周期構造を有する無限系内を波動 $\mathbf{u}^i$ が伝播する場合を考える。 Γ_L に相当する点において、左半無限系右端の内部節点力は $\mathbf{F}_L^i$ に一致する。 $\mathbf{u}^i$ は右向きに伝播するものとしているので、 $\mathbf{F}_L^i$ は Ω_L を補完する右半無限系左端に $\mathbf{u}^i$ を強制変位として与えた場合の節点力により評価できる。すなわち、式(4)より次式を得る。

$$\mathbf{F}_L^i = -\mathbf{K}_{LR} \mathbf{u}^i \quad (5)$$

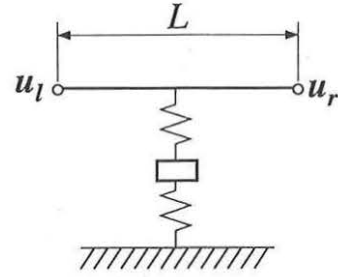


Fig. 3 Unit cell of a periodic track

一方、反射波の節点力 $\mathbf{F}_L^r$ は Ω_L 内を左向きに伝播して行くので、次式により与えられる。

$$\mathbf{F}_L^r = \mathbf{K}_{LL} \mathbf{u}^r \quad (6)$$

式(5),(6)を(3)に代入して次式を得る。

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{K}_{LL} \mathbf{u}_L - (\mathbf{K}_{LR} + \mathbf{K}_{LL}) \mathbf{u}^i \quad (7)$$

さらに式(2)より、 $\mathbf{F}_1$ について次式を得る。

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{K}_{LL} \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{LR} + \mathbf{K}_{LL}) \mathbf{u}^i \quad (8)$$

2.3 右半無限系左端内力の評価

次に、 Ω_R について考える。 Γ_R における作用力 $\mathbf{F}_R$ と変位 $\mathbf{u}_R$ との関係を与えるインピーダンス行列を $\mathbf{K}_{RR}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}_{RR} \mathbf{u}_R = \mathbf{F}_R \quad (9)$$

これと式(2)より次式を得る。

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{K}_{RR} \mathbf{u}_3 \quad (10)$$

2.4 求解方程式

式(8),(10)を(1)に代入して、 Ω_H 両端点の未知力を消去することで、最終的に次の求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11} + \mathbf{K}_{LL} & \hat{\mathbf{K}}_{12} & \hat{\mathbf{K}}_{13} \\ \hat{\mathbf{K}}_{21} & \hat{\mathbf{K}}_{22} & \hat{\mathbf{K}}_{23} \\ \hat{\mathbf{K}}_{31} & \hat{\mathbf{K}}_{32} & \hat{\mathbf{K}}_{33} + \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{K}_{LR} + \mathbf{K}_{LL}) \mathbf{u}^i \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式(11)は Ω_H の有限領域に関する方程式であるが、これを解くことで入射波を受ける無限軌道系の応答解析が可能となる。

3. インピーダンス行列の作成

3.1 伝達マトリックスの導出

式(11)より、当該問題は各インピーダンス行列の導出に帰着した。

これらを求めるために、 Ω_L または Ω_R に対応する無限周期場を考える。Fig.3のような、まくらぎ間隔 L で与えられる周期場を構成する最小単位(ユニットセル)について

て考える。ユニットセル当りの運動方程式は次式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ll} & \hat{\mathbf{K}}_{lm} & \hat{\mathbf{K}}_{lr} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ml} & \hat{\mathbf{K}}_{mm} & \hat{\mathbf{K}}_{mr} \\ \hat{\mathbf{K}}_{rl} & \hat{\mathbf{K}}_{rm} & \hat{\mathbf{K}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $(\cdot)_l, (\cdot)_r, (\cdot)_m$ はユニットセル左右端節点およびそれ以外の節点に関する部分ベクトルである。上式の解を次の固有振動モードにより構成する。

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (13)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi}_i$ は固有ベクトル、 ω_i は固有円振動数である。多少の計算の後、 $\mathbf{u}$ は次式により与えられる。

$$\mathbf{u} = \sum_i^n \frac{\boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_i^T}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \cdot \mathbf{F} \quad (14)$$

ここで、 $m_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i$ 、 n はユニットセルを離散化した際の自由度である。

ユニットセル両端点以外に力が作用していないものとする、上式より両端節点力と変位との関係を与える次の関係式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \sum_i^n \frac{\bar{\boldsymbol{\phi}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\phi}}_i^T}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix} \\ := \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ll} & \mathbf{H}_{lr} \\ \mathbf{H}_{rl} & \mathbf{H}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ は $\boldsymbol{\phi}_i$ から $\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r$ に対応する成分のみ抽出して構成されるベクトルである。

式(15)を変形し、左端節点量より右端のそれを与える式を得る。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{F}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix}, \quad (16) \\ [\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{rr} \mathbf{H}_{lr}^{-1} & -\mathbf{H}_{rr} \mathbf{H}_{lr}^{-1} \mathbf{H}_{ll} + \mathbf{H}_{rl} \\ \mathbf{H}_{lr}^{-1} & -\mathbf{H}_{lr}^{-1} \mathbf{H}_{ll} \end{bmatrix}$$

右隣のユニットセル左端の節点ベクトルを $\mathbf{u}'_l, \mathbf{F}'_l$ と表すと、変位の適合条件と力のつり合い条件とにより次式が成り立つ。

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}'_l, \quad \mathbf{F}_r = -\mathbf{F}'_l \quad (17)$$

すると、式(16)、(17)より伝達マトリックス $\bar{\mathbf{G}}$ に関する次式を得る。

$$[\bar{\mathbf{G}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{F}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_l \\ \mathbf{F}'_l \end{Bmatrix}, \quad (18) \\ [\bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{rr} \mathbf{H}_{lr}^{-1} & -\mathbf{H}_{rr} \mathbf{H}_{lr}^{-1} \mathbf{H}_{ll} + \mathbf{H}_{rl} \\ -\mathbf{H}_{lr}^{-1} & \mathbf{H}_{lr}^{-1} \mathbf{H}_{ll} \end{bmatrix}$$

3.2 インピーダンス行列の導出

以下では主に $\mathbf{K}_{RR}$ の導出過程について述べる。当該の無限周期系を伝播する波動モードに対して、 $\mathbf{u}'_l = \lambda \mathbf{u}_l (\lambda =$

ae^{-ikL} , κ は波数の実数成分) を課すと、次の固有値問題を導く。

$$[\bar{\mathbf{G}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{F}_l \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{F}_l \end{Bmatrix} \quad (19)$$

上式の固有モードには、右へ伝播するモードと左へ伝播するモードが半数ずつ存在する。そこで、右方向へ伝播するモードのみ抽出し、それらを $\mathbf{u}_i, \mathbf{F}_i (i = 1, \dots, N/2)$ とおく。なお、 N は全固有モードの個数である。

すると、右半無限系の左端におけるインピーダンス行列 $\mathbf{K}_{RR}$ に対して次式が成り立つ。

$$[\mathbf{K}_{RR}][\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{N/2}] = [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_{N/2}] \quad (20)$$

したがって、 $\mathbf{K}_{RR}$ は次式により求めることができる。

$$[\mathbf{K}_{RR}] = [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_{N/2}][\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{N/2}]^{-1} \quad (21)$$

$\mathbf{K}_{LL}, \mathbf{K}_{LR}$ についても同様の計算により求めることができる。

4. 解析例

4.1 解析条件

Fig.1 に示した様な無限軌道系を解析対象とする。なお、レールは 50kgN レールを想定し、Euler ばりによりモデル化した。左右の半無限周期軌道は同一構成とし、軌道パッドとまくらぎ下パッドのバネ定数はいずれも $k_1 = k_{s1} = 60(\text{MN/m})$ と与えた。 Ω_H 区間でも $k_2 = k_{s2} = 60(\text{MN/m})$ と設定した均一な系を Case1、 $k_2 = 30, k_{s2} = 5(\text{MN/m})$ として両方のパッドの剛性を低減させたものを Case2 として、これらの解析を行った。また、まくらぎ間隔 $L = 60\text{cm}$ の下、まくらぎ質量はレール 1 本当り 80kg とし質点でモデル化し、道床は剛体で与えた。

4.2 透過率

波動がある点を通過する際の時間平均エネルギーは次式で与えられる。

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T E dt \quad (22)$$

ここで、 $T = 2\pi/\omega$ は波動の周期である。

左半無限系における伝播モード $\mathbf{u}'_l$ が Γ_L に入射する際の時間平均エネルギー $\bar{E}_i$ と、右半無限系左端 Γ_R を透過して行く波動エネルギー $\bar{E}_t$ は次式により求めることができる。

$$\bar{E}_i = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}'_l^* \mathbf{K}_{LR} \mathbf{u}'_l), \quad \bar{E}_t = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}_3^* \mathbf{K}_{RR} \mathbf{u}_3) \quad (23)$$

ここで、 $\text{Im}(\cdot)$ は虚部、 $(\cdot)^*$ は共役転置である。

透過率 E_r はこれらの比により定義する。

$$E_r = \frac{\bar{E}_t}{\bar{E}_i} \quad (24)$$

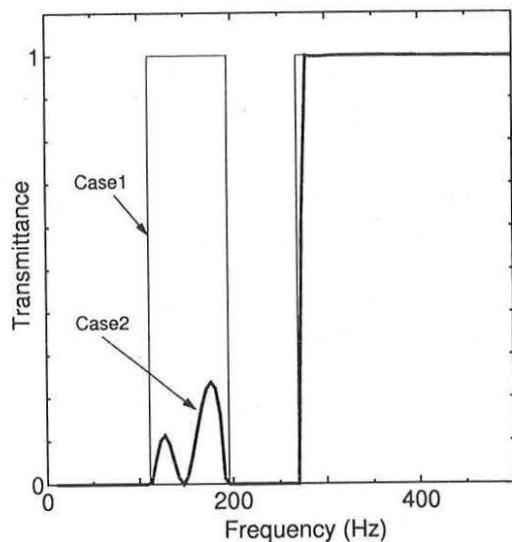


Fig. 4 Transmittance of wave modes

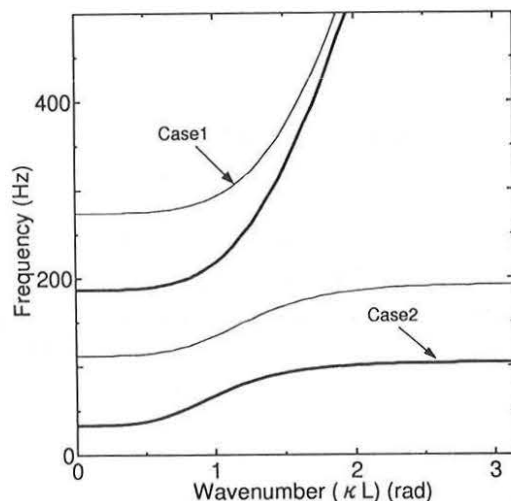


Fig. 5 Dispersion curves

4.3 解析結果

左右の半無限系に対応する無限周期構造内を減衰せずに伝播する波動モードを入射波として用い、500Hzまでの範囲で解析を行った。Case1とCase2における透過率を比較した結果をFig.4に示す。

なお、周波数によってはCase1の無限周期系内を伝播して行く波動モードが存在しない場合がある。このような周波数帯をストップバンドと呼び、逆に伝播モードの存在する周波数帯をパスバンドと呼ぶ。Case1の周期軌道と、Case2における Ω_H を無限に連ねて得られる周期軌道における伝播モードの分散曲線を求めたものをFig.5に示す。図より、Case1では112~192Hzおよび、274Hz~の周波数域に分散曲線が存在しており、すなわちこれらの周波数帯がパスバンドを形成していることが確認できる。逆に、112Hz以下と192~274Hzの範囲において、伝播モードの存在しない周波数帯であるストップバンドが

分布していることとなる。Fig.4において、Case1における透過率がパスバンド域にのみ存在し、その周波数域で完全に透過する結果を得たのは、このことによるものである。また、理論と矛盾のない結果を得ていることから、本手法の妥当性が確認できる。

一方、Case2の Ω_H に対応する周期軌道系においては、ストップバンドが34Hz以下と104~187Hzの帯域とに分布している。以上のことより、1つ目のパスバンド域については、Case1とCase2の Ω_H に相当する無限系とで重複する周波数域が存在していないことがわかる。なお本来、無限に続く周期軌道であれば、ストップバンドの周波数帯における波動は減衰して完全に伝わらない。ただしCase2での Ω_H の領域はまくらぎ2区間と短く、そのため当該構造のストップバンド内の周波数であっても、波動が幾らかは透過して行くこととなる。しかしFig.4より、Case1の最初のパスバンド内の波動エネルギーが、Case2の軌道に対して殆ど遮蔽される結果となっており、僅か2区間であっても異なる軌道構造が介在することにより、波動エネルギーのほとんどが遮蔽されていることがわかる。

274Hz以上の周波数域は、Case1および、Case2の Ω_H に相当する周期軌道の両者に対してパスバンドを与えている。そのため、この周波数域の波動モードはほぼ完全に透過している。

5. おわりに

本研究では、左右の半無限周期軌道の間に、他の構造を有する有限軌道が存在する場合を対象に、入射波動に対する応答解析手法を構成した。その際に必要となる半無限系に関するインピーダンス行列の導出過程の計算軽減を図るため、モード重畳による解法を採用した。解析を通し、透過率と軌道構造の分散特性との対応について考察した。短い軌道区間であっても、異なる構造を挿入することで軌道内を伝播する波動を大幅に遮蔽し得ることがわかった。

参考文献

- 1) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, Vol.10, 1029-1036, 2007.
- 2) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析, 計算数理工学会論文集, Vol.7, No.1, 25-30, 2007.
- 3) 阿部和久, 藤下真悟, 紅露一寛: 不均質部を有する無限軌道の動的応答解析, J-RAIL2008, 541-544, 2008.
- 4) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D.: Periodic BEM and FEM-BEM coupling, Comput. Mech., Vol.25, 567-577, 2000.
- 5) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造を対象とした表面波モード解析法の改善, 応用力学論文集, Vol.12, 1013-1020, 2009.
- 6) 李 相勲, 田邊忠顕: 3自由度はり要素モデルを用いた離散系における伝達境界の定式化, 土木学会論文集, No.745, 25-38, 2003.