

1509 き電回路のインダクタンス算出に関する一考察

正〔電〕 森本 大観〇 (鉄道総研) 正〔電〕 森田 岳 (鉄道総研)

A Study on Calculation of Inductance of Feeding Circuit

Hiroaki MORIMOTO, Railway Technical Research Institute 2-8-38, Hikari-cho, Kokubunji City, Tokyo

Gaku MORITA, Railway Technical Research Institute

In general, railway electrical engineers determine the inductance of feeding circuit by means of measurements or calculation with Carson-Pollaczek's formula. On the other hand, we know round-trip inductance formulas in vacuum or above the complete conductor. This paper describes the relationship between several formulas, and that the effective inductance at low frequency is approximately equal to the value in vacuum, regardless of the existence of the soil. In addition, this paper shows a problem on the inductance measurement: the existence of external rail and soil, and the dc source voltage fluctuation in direct current method.

Keywords: inductance, earth-return impedance, Carson-Pollaczek's formula, Deri's formula

1. はじめに

電気鉄道分野において、直流高速度遮断器や故障点標定装置(ロケータ)等の評価に必要なき電回路インダクタンスは、実測によるほか、大地帰路を考慮して「カーソン・ポラチェックの式」による数値のリアクタンス分を周波数によって換算している。

一方、電磁気学では真空中および完全導体面上空の平行導体往復回路の計算式が知られている。

これらの関係について考察し、商用周波数領域において、導体内部インピーダンスを除いた作用インダクタンスは真空中の平行導体往復回路にほぼ等しいことを示す。また、被測定区間外のレールが値に与える影響と直流法(時定数法)による測定の問題点について指摘する。

2. き電回路のインダクタンス測定・計算の現状

電磁気学では真空中に置かれた平行導体往復導体および、大地を完全導体と見た場合の平行導体往復回路について、単位長さあたりのインダクタンス計算式が知られており⁽¹⁾⁽²⁾、それぞれ計算値は周波数に依存しない。

一方、電気鉄道におけるき電回路(以下本稿では特に断らない限り電車線路部分のみを指す)の直流から数kHz程度までの帯域において、外部インダクタンスは多くの場合「カーソン・ポラチェックの式」と呼ばれる大地帰路を考慮したインピーダンス計算式を用いてそのリアクタンス分より求めている⁽³⁾。また導体内部インダクタンスは、レール(鋼:強磁性体)では実測値を用い、他の非磁性体と見なせる導体では円柱・円筒導体・任意断面導体⁽⁴⁾における理論計算式を用いている。

交流き電回路では、商用周波数50/60Hzや検討対象となる周波数毎にインピーダンスを現地測定ないし計算で求めることにより、周波数ドメインでの検討は可能である。しかし、レールが大地上に存在することから生じる大地帰路や漏れコンダクタンス、レールが強磁性体であるに伴う表皮効果の影響により、高い周波数では抵抗が増加しインダクタンスは減少する。

この問題は直流き電回路でも同様であり、インダクタンスの値を一義に定めることができない⁽⁵⁾⁽⁶⁾。実用的に

は50/60Hzの低圧交流電源を用いた交流法による測定(図1)や、直流電源(バッテリー又は整流器)を用いた直流法(時定数法)による測定(図2)により見かけ上の値を求めており、1kmあたり1.0~2.5mH程度を採用するのが近似的に妥当といわれている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかし、実際には直流法(時定数法)で測定できる電流波形が一般に指数減衰関数と異なるため厳密には時定数を定義できないこと⁽⁷⁾等、多くの問題点がある。

電力系統分野では従来から様々な基礎検討がされており⁽⁸⁾、その結果の多くは電鉄き電回路にも適用できる。ただし、電鉄き電回路では大地に接する鋼製レールを主要な導体としていることが電力系統分野と大きく異なる。この点において、電鉄き電回路の過渡現象検討のためのき電回路インダクタンス測定・計算・モデル化の考察は必ずしも十分ではないのが現状である。

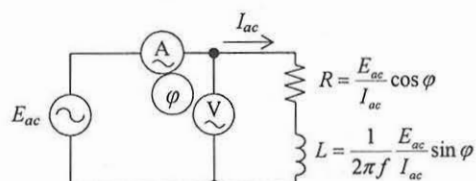


Fig.1 Alternative current method

図1 交流法

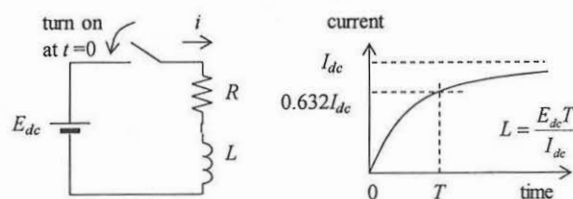


Fig.2 Direct current method (Time constant method)

図2 直流法(時定数法)

3. インダクタンスの計算式

図3に示す導体配置において、導体内部インピーダン

スを除いた（電流が導体の表面のみに流れている状態における）外部インピーダンス、外部インダクタンスの各種公知計算式を用いて、作用インダクタンスを求め、それらと比較する。なお、本章では基礎検討として、導体（レール）の対地コンダクタンスは無いものとする。

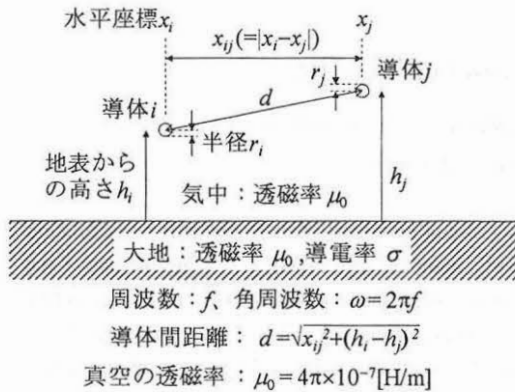


Fig.3 Sectional configuration of conductors
図3 導体配置の断面図

3.1 真空中の平行往復導体⁽¹⁾⁽²⁾

大地が存在しないとき、すなわち導電率 σ が零で透磁率が真空透磁率に等しいとき、導体 i を往復、導体 j を復路とする回路における単位長さあたりの作用インダクタンス L_e は式(1)で表される。（単位は [H/m]）

$$L_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d^2}{r_i r_j} \quad \dots\dots\dots (1)$$

3.2 完全導体面上の往復導体⁽¹⁾⁽²⁾

大地が完全導体（導電率 σ が無有限大）であると仮定するとき、導体 i の大地（完全導体）を帰路とする自己インダクタンス L_{ii} 、導体 i と導体 j の相互インダクタンス M_{ij} は、鏡像法（影像理論）に基づいて、各々式(2)、式(3)となる。（単位は [H/m]）

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{x_{ij}^2 + (h_i + h_j)^2}{x_{ij}^2 + (h_i - h_j)^2} \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{d^2 + 4h_i h_j}{d^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

したがって、導体 i, j の往復回路における単位長さあたりの作用インダクタンス L_e は、式(4)で表される。

$$L_e = L_{ii} + L_{jj} - 2M_{ij} \\ = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_j}{r_j} - 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{d^2 + 4h_i h_j}{d^2} \\ = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{4h_i h_j d^2}{r_i r_j (d^2 + 4h_i h_j)} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

3.3 カーソン・ポラチェックの式⁽⁸⁾⁽³⁾⁽⁹⁾

導電率 σ が有限の値であるとする。このとき、CarsonとPollaczekにより導出された導体の大地帰路インピーダンスは式(5)～(7)で表される⁽⁸⁾。以下これを原形式という（単位は [Ω/m]）。式(5)～(7)は図3の導体配置における電磁波伝搬に基づいて導出された厳密式である。

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{D_2}{D_1} + I \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$I = \int_0^\infty \frac{2e^{-H\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\Omega}} \cos(x\lambda) d\lambda \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\Omega = \omega\mu_0\sigma \quad \dots\dots\dots (7)$$

これは自己インピーダンスおよび相互インピーダンスに共通の式であり、導体 i の大地帰路自己インピーダンス Z_{ii} を得るには

$$D_1 = r_i \quad D_2 = 2h_i \\ H = 2h_i \quad x = 0$$

導体 i と導体 j の相互インピーダンス Z_{ij} を得るには

$$D_1 = \sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2} = d \quad D_2 = \sqrt{H^2 + x_{ij}^2} \\ H = h_i + h_j \quad x = x_{ij}$$

とする。インダクタンス L および抵抗 R を求めるには、

$$L = \frac{\text{Im}(Z)}{\omega} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{D_2}{D_1} + I \right] \\ R = \text{Re}(Z)$$

とすればよい。

式(5)～(7)は積分区間が半無限の積分項を含んでおり、それを解析的に評価することはできないことが知られている。そこで、低周波かつ導体間距離が相対的に大きくない場合に対しては級数展開による実用的な近似式として、自己インピーダンスの式(8)

$$Z_{ii} = \left[\omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4X' \cdot 2h_i}{3\sqrt{2}} \right) + j\omega \left(2 \ln \frac{2}{\gamma X' h_i} + \frac{4X' \cdot 2h_i}{3\sqrt{2}} + 1 \right) \right] \times 10^{-7} \quad \dots\dots\dots (8)$$

および相互インピーダンスの式(9)

$$Z_{ij} = \left[\omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4X' (h_i + h_j)}{3\sqrt{2}} \right) + j\omega \left(2 \ln \frac{2}{\gamma X' d} + \frac{4X' (h_i + h_j)}{3\sqrt{2}} + 1 \right) \right] \times 10^{-7} \quad \dots\dots\dots (9)$$

が与えられている（ここでは単位は [Ω/m] である）。ここで $\gamma = \exp(0.57721\dots) = 1.7811\dots$ であり（0.57721…はオイラー一定数）、

$$X' = 2\pi\sqrt{20\sigma f} \times 10^{-4} = \sqrt{4\pi^2 \cdot 2 \times 10^{-7} \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi}} \\ = \sqrt{\omega\mu_0\sigma} \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。式(8)～(10)が通常、電鉄分野の低周波領域で慣用的に使われている近似式であり⁽³⁾⁽⁹⁾、以下では原形式(5)～(7)と区別してC-P慣用近似式という。なお慣用的には式(8)(9)の末尾係数を「 $\times 10^{-4}$ 」に変更して単位[Ω/km]とし、自己インピーダンスの式(8)は更に項を整理した形で表す例⁽³⁾が多い。

高周波に対しては別の漸近展開式が与えられており、また中間的な領域ではケルビン関数の微係数を用いて表した近似式等がある⁽⁹⁾が、ここでは省略する。

導体 i, j の自己インピーダンスと相互インピーダンスより、往復回路における単位長さあたりの作用インピーダンス Z_e を求める。

$$Z_e = Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij} \quad \dots\dots\dots (11)$$

Z_e の抵抗分（実数部） R_e について

$$R_e = \text{Re}(Z_{ii}) + \text{Re}(Z_{jj}) - 2\text{Re}(Z_{ij}) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

Z_e のリアクタンス分 (虚数部) X_e について

$$\begin{aligned} jX_e &= j\{\text{Im}(Z_{ii}) + \text{Im}(Z_{jj}) - 2\text{Im}(Z_{ij})\} \\ &= j\omega \left(2\ln \frac{2}{\gamma X r_i} + 2\ln \frac{2}{\gamma X r_j} - 4\ln \frac{2}{\gamma X d} \right) \times 10^{-7} \\ &= j\omega \cdot 2\ln \frac{d^2}{r_i r_j} \times 10^{-7} \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

以上より式(14)が得られる。

$$L_e = \frac{Z_e}{j\omega} = \frac{jX_e}{j\omega} = \left(2 \times 10^{-7} \right) \ln \frac{d^2}{r_i r_j} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d^2}{r_i r_j} \quad \dots\dots\dots(14)$$

したがって、C-P 慣用近似式における作用インダクタンス計算結果(14)は真空中の平行往復導体での計算式(1)に一致する。また、抵抗分は作用インピーダンスに現れない。つまり、高周波での大地の影響は無視されている。

3.4 Deri の近似式⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾

Deri (デリ) の近似式は、IEEE Trans./PAS に 1981 年に提案された式である。カーソン・ボラチェックの原形式(5)~(7)における無限積分項を実用的精度で近似したもので、広範囲の周波数に適用でき、その精度は原形式に対して最大誤差 4%程度とされている⁽¹⁰⁾。

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(H+2p)^2 + x^2}}{D_1} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}} \quad \dots\dots\dots(16)$$

式(15),(16)は自己インピーダンスおよび相互インピーダンスに共通の式であり、導体 i の大地帰路自己インピーダンス Z_{ii} を得るには

$$D_1 = r_i, \quad H = 2h_i, \quad x = 0$$

導体 i と導体 j の相互インピーダンス Z_{ij} を得るには

$$D_1 = \sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2} = d$$

$$H = h_i + h_j, \quad x = x_{ij}$$

とする。

式(16)の p は Deri らによると、大地を分布して流れる帰路電流を、地表面から複素数の深さ p に置かれた完全導体平面に集中して流れる電流で近似することに相当する⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。

導体 i, j の自己インピーダンスと相互インピーダンスより往復回路における単位長さあたりの作用インピーダンス Z_e を求めると式(17)が得られる。

$$\begin{aligned} Z_e &= Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij} \\ &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{(2h_i+2p)^2}}{r_i} + \ln \frac{\sqrt{(2h_j+2p)^2}}{r_j} \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot 2\ln \frac{\sqrt{(h_i+h_j+2p)^2 + x^2}}{d} \right] \\ &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d^2}{r_i r_j} \cdot \frac{(2h_i+2p)(2h_j+2p)}{(h_i+h_j+2p)^2 + x^2} \right) \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2h_i+2p)(2h_j+2p)}{(h_i+h_j+2p)^2 + x^2} \\ &= \frac{4(h_i+p)(h_j+p)}{(h_i-h_j)^2 + x^2 + 4(h_i+p)(h_j+p)} \\ &= \frac{4(h_i+p)(h_j+p)}{d^2 + 4(h_i+p)(h_j+p)} \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

と定義すると

$$L_e = \frac{Z_e}{j\omega} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d^2}{r_i r_j} \cdot A \right) \quad \dots\dots\dots(19)$$

となる。 $\omega \rightarrow 0_+$ (極低周波数) または $\sigma \rightarrow 0_+$ (大地が絶縁体) のとき

$$p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{j \cdot 0_+}} = e^{(-j\pi/4)} \times \infty, \quad A \rightarrow 1$$

となり、計算結果は真空中の平行往復導体における計算式(1)に漸近する。また、 $\omega \rightarrow \infty$ または $\sigma \rightarrow \infty$ のとき

$$p \rightarrow 0, \quad A \rightarrow \frac{4h_i h_j}{d^2 + 4h_i h_j}$$

となり、計算結果は完全導体面上の平行往復導体における計算式(4)に漸近する。これは C-P 慣用近似式に比べて Deri の近似式が大地の存在に起因する高い周波数での挙動をより正確に反映していることを示し、総合的に優れた近似を与えるものである。

電気鉄道における具体事例として、 $h_i = 6[\text{m}]$ (トロリ線相当)、 $h_j = 1[\text{m}]$ (レール相当)、 $x = 0[\text{m}]$ (トロリ線は左右レールの中心線上)、 $\sigma = 0.01[\text{S/m}]$ (平均的な値) において、周波数 $f = 10[\text{kHz}]$ とすると $p = (25.2 - j25.2)[\text{m}]$ 、式(19)において $A = 1 + j0.008$ となり、このような条件下においては Deri の式による作用インダクタンス計算結果(19)が真空中平行往復回路での計算式(1)とほぼ一致する。よって、例えば、交流 AT き電回路の T-F 短絡のようにレールに電流が殆ど流れない回路では、導体内部分を除く作用インダクタンスは計算式(1)で十分求められる。

4. レール漏れ抵抗がインダクタンス測定に与える影響

前章の検討では、レールの対地漏れコンダクタンスは無いものとしていた。しかしレールは一般に、図 4 に示すようにまくらぎやバラスト等を介して大地と不完全な接触状態にあり、レール・大地間にコンダクタンスがある⁽³⁾⁽⁹⁾。これをレール漏れコンダクタンスと呼び、その逆数をレール漏れ抵抗と呼んでいる。なお、本稿ではレール漏れコンダクタンスは信号軌道回路で問題となる左右レール間のコンダクタンスではなく、レール 2 本一括と大地の間のコンダクタンスを指す。

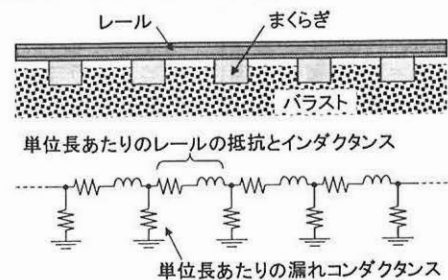


Fig.4 Ballast track and its equivalent circuit
図 4 バラスト軌道とその等価回路

レール漏れコンダクタンスはレールの全長にわたって

存在するため、図4に示すようにレールは分布定数的に接地されていると見なせる。また、レールは事実上無限遠まで接続されているため、例えば現地においてき電回路のインピーダンスを測定する場合には、測定対象区間のレールだけではなく、図5に示すように測定対象外のレールも加圧され、レール漏れコンダクタンスにより決まる漏れ電流が大地へ流出あるいは流入する。

図5で大地中の電流経路とレールが並列になっているため、架線とレールの電流は等しくない。よって、前章で求めた作用インピーダンスの式だけでき電回路全体の抵抗・インダクタンスを評価することはできない。

単位長さあたりの抵抗・インダクタンスを現地で測定するためには、測定対象区間の両端でレールを切断（インピーダンスボンドを開放）することが必要である⁽⁷⁾が、それでも測定対象区間内の漏れ電流の影響は残る。計算値と実測値の対応を調べる観点では、測定対象区間のレールの対地絶縁が良好であることが一つの条件となる。

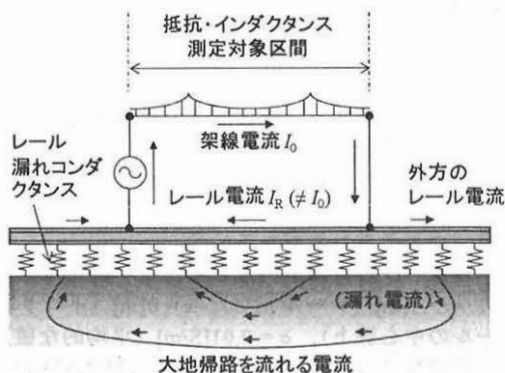


Fig.5 The influence by rail-earth conductance
図5 レール漏れ抵抗の影響

5. 直流法（時定数法）で用いる直流電源の問題

既に図2に示した直流法（時定数法）による測定では、大電流の直流電源が必要なため、自動車用バッテリーやシリコン整流器を用いることが多い。しかしこれらの電源は一般に図6に示すように電流を取ると電圧が低下し、その特性は複雑な時間変化を示す⁽⁷⁾。

直流法（時定数法）では電源電圧が変動しないことが前提となっているため、理想的には定電圧電源装置を用いて測定すべきである。しかし、測定に要する電流が大きい大型の電源装置が必要となり、それを動かすための十分な容量の発動発電機の確保など様々な問題がある。

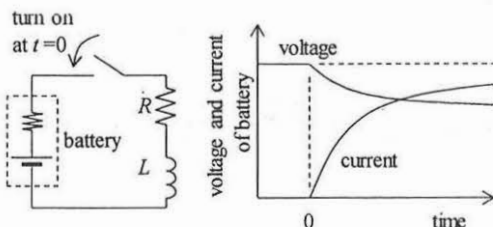


Fig.6 Voltage fluctuation of battery in measuring impedance by direct current method
図6 直流法におけるバッテリーの電圧変化

6. まとめ

以下に本稿で指摘した事項を要約する。

- (1) C-P 慣用近似式に基づいてき電回路の導体内部分を

除く作用インピーダンスを求めると、インダクタンス・抵抗とも周波数にかかわらず真空中往復回路と解析的に一致する。ただし、低周波用のC-P慣用近似式で高周波の挙動を十分に表すことはできない。

- (2) Deriの式に基づいてき電回路の導体内部分を除く作用インピーダンスを求めると、低周波ではインダクタンス・抵抗とも周波数にかかわらず真空中往復回路に漸近し、高周波では大地が完全導体の場合に漸近する。C-P慣用近似式に比べて大地の存在に起因する高い周波数での挙動がより正確に考慮される。
- (3) き電回路のインピーダンスは、レール漏れコンダクタンスが存在しないならば、概ね10kHz以下の低周波領域では、真空中往復回路の計算式を用いて算出しても、実用上ほぼ差し支えない。例えば交流ATき電回路のT-F短絡回路の作用インピーダンスは、真空中の平行往復導体での計算式で十分求められる。しかし、実際にはレール漏れコンダクタンスがあるため、き電回路のインピーダンスを真空中往復回路の計算式だけで評価することはできない。
- (4) 単位長さあたりの抵抗・インダクタンスを測定するためには、測定対象区間の両端でレールを切断（インピーダンスボンドを開放）することが必要であるが、それでも測定対象区間内の漏れ電流の影響は残る。
- (5) 直流法（時定数法）による定数測定では、理想的には定電圧電源装置を用いることが望ましい。

本稿では導体の内部インピーダンスと表皮効果についてはその存在を指摘するとともに、特にレールにおいてその影響は大きく、別途検討が必要である。

今後、電鉄き電回路の過渡現象検討のために、より適切なインピーダンス・インダクタンス測定方法の検討を行うとともに、過渡現象をより正確に表すことができるき電回路モデルを構築していく予定である。

参考文献

- 1) 電気学会：「電気学会大学講座 電気磁気学（第二次改訂版）」，1979。
- 2) 後藤，山崎：「詳解 電磁気学演習」，pp.276-279，1970。
- 3) 電気学会 電気鉄道における教育調査専門委員会編：「最新 電気鉄道工学」，コロナ社，pp.168-172，2000。
- 4) 雨谷，布施：「任意断面導体よりなる多導体系インピーダンス近似計算法」，電気学会論文誌B，Vol.111-B，No.8，pp.896-902，1991。
- 5) 電気学会電気規格調査会：「電気鉄道変電所用直流高速度気中遮断器」，JEC-7152-1991，1991。
- 6) 電気学会電気規格調査会：「電気鉄道変電所用直流高速度ターンオフサイリスタ遮断器」，JEC-7153-1991，1991。
- 7) 川原，奥井，安藤，長谷：「直流き電回路における線路インピーダンスの考察」，平成13年鉄道連合技術シンポジウム J-Rail'01，S1-3-8，pp.699-702，2001。
- 8) 野田：「架空送電線のための線路定数計算プログラムの開発—固有ベクトル正規化アルゴリズムと大地帰路インピーダンスの近似式—」，電力中央研究所報告H04014，2005.5。
- 9) 宮下：「誘導問題の考え方」，鉄道通信協会，1981.6。
- 10) 雨谷：「分布定数回路論」，コロナ社，1990。