

1506 レール温度座屈時の変形局所化に関する研究

[土] 〇田中洋介 (新潟大院), [土] 阿部和久 (新潟大),
[土] 西宮裕騎 (鉄道総研), [土] 紅露一寛 (新潟大院)

Deformation Localization in Track Buckling due to Temperature Stress

Yousuke TANAKA (Niigata University)
Kazuhiisa ABE (Niigata University)
Yuuki NISHINOMIYA (Railway Technical Research Institute)
Kazuhiro KORO (Niigata University)

The localization in the buckling of infinite rail due to temperature stress is studied. A tangent rail is modeled by a straight Bernoulli-Euler beam cramped by sleepers. The buckling load is derived theoretically for each wavenumber. The bifurcation path is also analyzed under periodic deformation. On that path, instability analysis is achieved for deformation rates with wavenumbers around the buckling point. From these results, a bifurcation set embedded in the space spanned by wavenumber, amplitude and temperature is developed. It is found that deformation modes corresponding to the all wavenumbers in the neighborhood of buckling point contribute to the growth of the localization in the rail deflection.

Key words : continuous welded rail, buckling due to temperature stress, localization

1. はじめに

ロングレールは列車走行時の振動・騒音の低減に有効であり、乗り心地の向上や軌道保守コストの縮減などの効果が期待できる。しかしその一方で温度変化から受ける影響が定尺レールよりも大きく、温度座屈を起こしやすいため、ロングレールを使用・管理するにあたって、温度変化を受けた際のレールの座屈挙動をより正確に把握することが重要である。

既往の研究¹⁾では、初期不整を有するレールの初期形状と座屈発生後のレールの変形形状とを想定し、たわみ近似式にエネルギー法を適用することで座屈発生荷重や各種軌道条件の寄与度を明らかにしている。レールの座屈荷重は初期不整鋭敏性を有するため、実務上はこのようにレールに適切な初期不整を与えた上での座屈荷重を評価することが必要である。

ここで、完全系の無限長レールを考えると、座屈の瞬間は Fig.1(a) のような一様な座屈変形が現れるはずである。しかし実際のレールにおいて、初期不整は敷設条件の違いなどによりレールによって様々である上に、必ずしも座屈モードに対応した形状を有しているとは限らないにも関わらず、Fig.1(b) もしくは (c) のような概ね同一の局所変形形状となる。このことから、レールの局所座屈は本来初期不整とは関係無く、必然的に発生する安定な現象であるということが考えられる。

そこで本研究では、ロングレールを無限周期構造によりモデル化し、完全系における温度座屈を対象に、変形

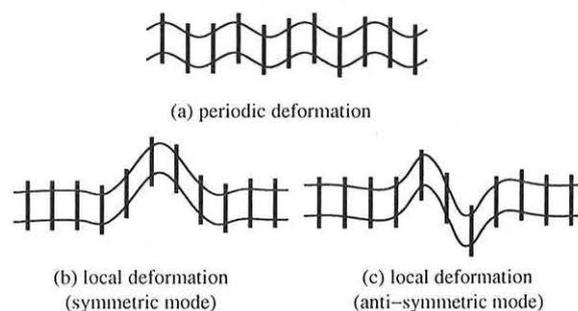


Fig.1 Buckling modes of railway track

の局所化の発生メカニズムを明らかにすることを目的とする。

そのために、完全系のロングレールははじめに Fig.1(a) のような形状を示した後に (b) または (c) の局所変形を示すという考えの下に、まず座屈発生時の荷重とモードとの関係を導き、そしてその座屈モードに基づく周期境界条件下で、座屈後のつり合い経路を求め、この経路上で剛性行列が特異となる変位速度モード波数を調べる。

2. 離散支持された無限長 Euler ばりの座屈

2.1 座屈荷重の導出

Fig.2 の様に支間長 L で周期的にバネ k により支持された曲げ剛性 EI のはりを考える。

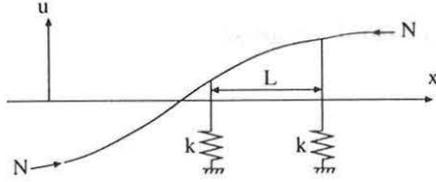


Fig.2 Periodically supported rail subjected to axial force

なお、はりには軸力 N が作用しているものとする。支持点間におけるつり合い式は次式で与えられる。

$$EIu'''' + Nu'' = 0 \quad (1)$$

また、各支間のたわみを $u_n(\bar{x})$ ($0 \leq \bar{x} \leq L$) とすると、支点での連続条件は次式で与えられる。

$$u_{n-1}(L) = u_n(0), \quad u'_{n-1}(L) = u'_n(0) \quad (2)$$

一方、力のつり合い条件は次式となる。

$$\begin{aligned} M_{n-1}(L) &= M_n(0) \\ Q_{n-1}(L) - Q_n(0) + ku_n(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、

$$M_x = EIu'', \quad Q_x = -M'_x = -EIu''' \quad (4)$$

であるから、式(3)より次式を得る。

$$\begin{aligned} u''_{n-1}(L) &= u''_n(0) \\ -EIu'''_{n-1}(L) + EIu'''_n(0) + ku_n(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

簡単のため $n = 1$ とすると、式(1)より2区間のたわみ u_0, u_1 は各々次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_0 &= A_0 + B_0\bar{x} + C_0\sin r\bar{x} + D_0\cos r\bar{x} \\ u_1 &= A_1 + B_1\bar{x} + C_1\sin r\bar{x} + D_1\cos r\bar{x} \end{aligned} \quad (6)$$

$$r = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

ここで、 A, B, C, D は定数である。式(6)を式(2),(5)の連続条件およびつり合い条件に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} A_0 + B_0L + C_0\sin rL + D_0\cos rL &= A_1 + D_1 \\ B_0 + r(C_0\cos rL - D_0\sin rL) &= B_1 + rC_1 \\ C_0\sin rL + D_0\cos rL &= D_1 \\ r^3(C_0\cos rL - D_0\sin rL - C_1) + \frac{k}{EI}(A_1 + D_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を整理して、次式を得る。

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{v}_0\} = \{\mathbf{v}_1\} \quad (8)$$

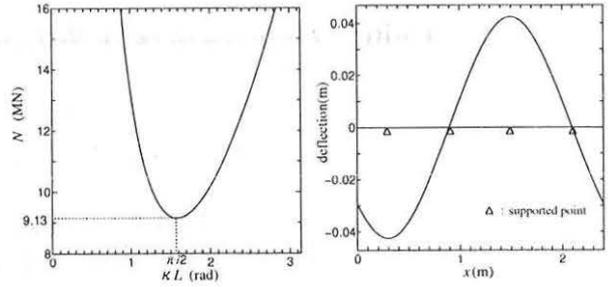


Fig.3 $\kappa - N$ curve Fig.4 Buckling mode

ここで、 $\{\mathbf{v}\} = \{A B C D\}$ 、 $[\mathbf{T}]$ は次の伝達行列である。

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 - \alpha L & -\alpha \sin rL & -\alpha \cos rL \\ \frac{\alpha}{r} & \frac{\alpha L}{r} & \cos rL + \frac{\alpha}{r} \sin rL & -\sin rL + \frac{\alpha}{r} \cos rL \\ 0 & 0 & \sin rL & \cos rL \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $\alpha = k/(r^2 EI)$ である。

今、隣接する支点間でのたわみの位相差が Floquet 波数 κ を用い $e^{-i\kappa L}$ に基づき与えられている変位モードを考え、 $\{\mathbf{v}_1\} = e^{-i\kappa L} \{\mathbf{v}_0\}$ とおくと、式(8)より次の固有値問題を得る。

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{v}_0\} = e^{-i\kappa L} \{\mathbf{v}_0\} \quad (10)$$

ここで、固有値 $e^{-i\kappa L}$ は次式の根として定義される。

$$|\mathbf{T} - e^{-i\kappa L} \mathbf{I}| = 0 \quad (11)$$

式(11)より、軸力 N における座屈モード波数 κ を求める。

2.2 $\kappa - N$ 曲線

50kgN レールを想定し、横方向の曲げ剛性 $EI = 663\text{kN} \cdot \text{m}^2$ 、まくらぎ間の距離 $L = 0.60\text{m}$ 、まくらぎのばね定数 $k = 19.3\text{MN/m}$ として分散曲線を求めた。

この結果を Fig.3 に示す。Fig.3 の曲線上で軸力が最小値となる点で座屈が起こるが、当該条件下では $N = 9.13\text{MN}$ 、 $\kappa = 1.57 = \pi/2$ という結果となった。この結果をもとに座屈モードを描くと、Fig.4 に示すように、まくらぎ4本分(4ユニット)で1周期を与える無限周期場を形成していることがわかる。

3. 座屈後の分岐経路解析

2.の結果を基に、分岐点の探索と、分岐後のつり合い経路の追跡を行う。

3.1 無限長レールのモデル化

初期座屈時、レールはまくらぎ4区間を1周期とするモードを形成するので、まくらぎ4区間を1ユニットとした無限周期構造と見なすことができる。そこで、Fig.5 に示すようにまくらぎ4区間を解析領域とし、その両端の

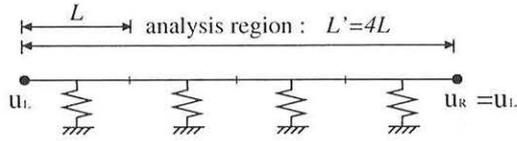


Fig.5 Modeling of infinite rail

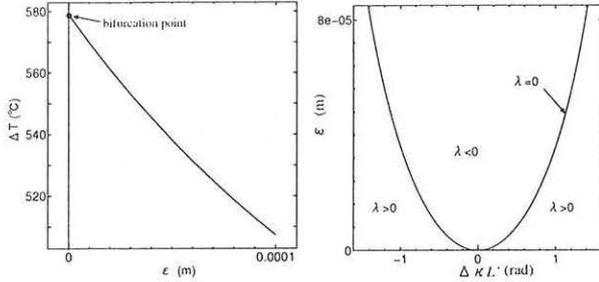


Fig.6 Bifurcation path

Fig.7 Bifurcation curve

節点変位が等しくなるような周期境界条件を課すことで、波長 $L' = 4L$ の下での無限長レールの一様な座屈状態を表現する。また、まくらぎ 1 本あたりのばね定数 k は文献²⁾を参考に、最終道床横抵抗力 $k_0 = 5786\text{N/m}$ 、係数 $a = 3 \times 10^{-4}\text{m}$ とし次式により与える。

$$k = k_0 \cdot \frac{u}{|u| + a} \quad (12)$$

ここで、 u はレールのたわみである。

3.2 分岐点の探索

まず、最初の分岐点(座屈点)を探索する。つり合い経路上の分岐点は次の条件式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u, t) &= 0 \\ \mathbf{K}(u, t)\phi_i &= \lambda_1 \phi_i, \quad \lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、第 1 式はつり合い条件、 \mathbf{K} は接線剛性行列、 λ_1 は \mathbf{K} の固有値 λ のうち最も小さい値となる固有値、 ϕ_i は λ_1 に対応する固有ベクトルである。本研究では上式によって与えられる分岐点を文献³⁾の手法を援用し求めた。

3.3 分岐経路の追跡

次にこの分岐点において、発現する座屈モードに対応したたわみ増分をレールに与えることで、分岐経路へとつり合い状態を切り替える。また、つり合い経路はたわみ振幅制御で Newton-Raphson 法により追跡した。

このつり合い経路上で、分岐の瞬間はただ一つの波数 κ_0 で座屈モードが与えられるが、新たな分岐モード波数 $\kappa_0 + \Delta\kappa$ が発生し、それらのモードの重ね合わせにより、最終的に現れる局所変形モードが表現されるというメカニズムが考えられる。そこで、新たな分岐モード波数増分 $\Delta\kappa$ の存在を調べるため、たわみ振幅増分段階で接線剛性行列 \mathbf{K} に波数 $\kappa_0 + \Delta\kappa$ の周期条件を課して得られる行列に対し、第一固有値が $\lambda_1 \leq 0$ を与える波数を調べた。

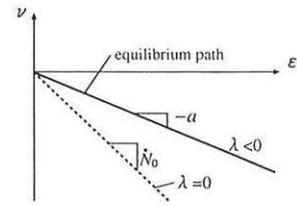


Fig.8 Equilibrium path and slice of bifurcation surface

3.4 解析結果

分岐点の探索、分岐経路の追跡を行った結果得られたつり合い経路を Fig.6 に示す。温度上昇量 $T = 578^\circ\text{C}$ で座屈を起こした後、たわみ振幅の増加に伴い温度が急激に低下しており、レールは不安定座屈の様相を呈しているが、これはまくらぎばね定数の非線形性に起因するものである。

Fig.7 はゼロ固有値を与える波数とたわみ振幅に関する曲線、すなわち分岐曲線である。図を見ると、座屈の瞬間は $\Delta\kappa L' = 0$ にのみ特異点が存在するが、その後無限小たわみの発生とともに、当該波数近傍の波数成分に負の固有値が分布し、その辺縁部に放物線状の分岐曲線が現れている。すなわちつり合い経路上では、新たな波数は離散的に現れるのではなく、連続スペクトルにより与えられることがわかる。

4. 局所変形の発生機構

4.1 分岐曲面

$\nu - \kappa - \epsilon$ 空間における分岐点近傍での分岐曲面を考える。ここで $\nu = N - N_0$ 、 $\kappa = k - k_0$ とし、それぞれ座屈点からの相対温度、相対波数と再定義する ($N_0 = 578^\circ\text{C}$ 、 $k_0 = \pi/2$)。このとき、曲面は次式のように与えられる。

$$\nu = \frac{1}{2} N_0'' \kappa^2 + \dot{N}_0 \epsilon \quad (14)$$

釣り合い経路が次式で与えられているものとする (Fig.8)。

$$\nu = -a\epsilon \quad (a > 0) \quad a < |\dot{N}_0| \quad (15)$$

式 (15) のつり合い経路上で、 $\lambda = 0$ を与える κ は、式 (14)、式 (15) より次式により与えられる。

$$-a\epsilon = \frac{1}{2} N_0'' \kappa^2 + \dot{N}_0 \epsilon \quad (16)$$

$$\therefore \epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{-N_0''}{(\dot{N}_0 + a)} \kappa^2 \quad (17)$$

ここで、 $\dot{N}_0 + a < 0$ 、 $N_0'' > 0$ より、 $-N_0''/(\dot{N}_0 + a) > 0$ となる。なお、 N_0'' 、 a 、 $-N_0''/2(\dot{N}_0 + a)$ は数値的に求めることができる。したがって、 \dot{N}_0 も決定可能である。また、曲面 S は Fig.9 のようである。

今、分岐点 $(\kappa, \epsilon) = (0, 0)$ 近傍のつり合い状態を考える。分岐点から無限小たわみ ϵ が発生すると、

$$\epsilon \geq b\kappa^2, \quad \left(b = \frac{-N_0''}{2(\dot{N}_0 + a)} \right) \quad (18)$$

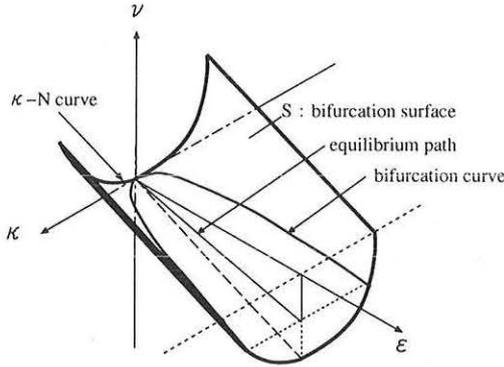


Fig.9 Overview of bifurcation surface

で与えられる κ の範囲内で $\lambda \leq 0$ となる。したがって、その際の変位増分は主にこの範囲内の波数成分により構成されることとなる。また、式 (18) の具体例を示したものが Fig.7 になる。

4.2 局所化の発生機構

以上より、微小たわみ振幅 ε における変位速度 $\dot{u}(\varepsilon)$ は、主に式 (18) で与えられる範囲内の波数成分により構成されることとなり、次の逆 Fourier 変換により近似できる。

$$\dot{u}(\varepsilon) = \int_{\kappa_0 - \kappa_\varepsilon}^{\kappa_0 + \kappa_\varepsilon} \dot{u}^* e^{ikx} dk \quad (19)$$

ここで、 $\kappa_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon/b}$ 、 \dot{u}^* は \dot{u} のスペクトル成分である。簡単のため $\dot{u}^* = A(\varepsilon)$ (k について定数項) で近似すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u}(\varepsilon) &= A(\varepsilon) e^{ik_0 x} \int_{-\kappa_\varepsilon}^{\kappa_\varepsilon} e^{i\kappa x} d\kappa \\ &= \frac{2A}{x} \sin \kappa_\varepsilon \cdot e^{ik_0 x} \end{aligned} \quad (20)$$

すると、変位はさらに次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \dot{u}(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{2A(\alpha)}{x} \sin \kappa(\alpha) x \cdot e^{ik_0 x} d\alpha \\ &= \frac{4b}{x} e^{ik_0 x} \int_0^{\kappa_\varepsilon} A\kappa \sin \kappa x d\kappa \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $A = A_0/\kappa$ (A_0 は定数) と仮定すると、

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= \frac{4b}{x} e^{ik_0 x} A_0 \int_0^{\kappa_\varepsilon} \sin \kappa x d\kappa \\ &= \frac{4bA_0}{x^2} e^{ik_0 x} (1 - \cos \kappa_\varepsilon x) \end{aligned} \quad (22)$$

さらに、 $x \ll 1$ においては次式を得る。

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= \frac{4bA_0}{x^2} e^{ik_0 x} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \kappa_\varepsilon^2 x^2 + \dots \right) \\ &\approx 2A_0 b \kappa_\varepsilon^2 e^{ik_0 x} \\ &= 2A_0 \varepsilon e^{ik_0 x} \end{aligned} \quad (23)$$

$\varepsilon = u(\varepsilon, x=0)$ という変位の適合条件を課すと、次式が得られる。

$$\varepsilon = 2A_0 \varepsilon \quad (24)$$

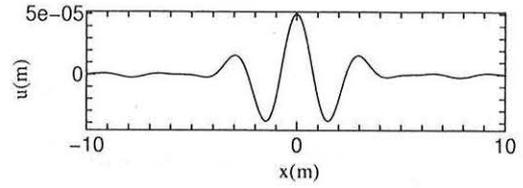


Fig.10 Deformation at post-buckling(eq(25))

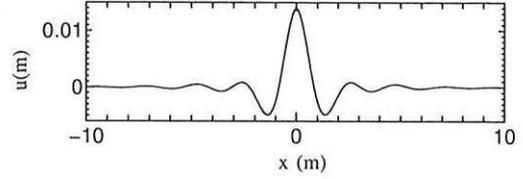


Fig.11 Finite element analysis with initial imperfection

したがって、 $A_0 = 1/2$ となる。

以上より、分岐直後のたわみ形状は次式で近似できる。

$$u(\varepsilon, x) = \frac{4b}{x^2} \sin^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{b}} \frac{x}{2} \cdot e^{ik_0 x} \quad (25)$$

この式で与えられる形状の一例 ($\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ cm) を Fig.10 に示す。図のように、わずかなたわみ振幅の下でもすでに変形の局所化が発生していることがわかる。また比較のため、有限長モデルに対しレール中央部に 4mm の初期不整を与えて有限要素解析を行って得られた結果 ($\varepsilon = 1.4$ cm) を Fig.11 に示す。Fig.10 の形状に比べたたわみ振幅が非常に小さいためたわみの減衰の様子が多少異なっているが、原点近傍での形状や局所化の範囲などは類似しており、式 (25) の妥当性が確認できる。

5. おわりに

本研究ではレール座屈時の変形局所化の発生メカニズムの考察を行った。まず座屈モード波数と座屈荷重との関係を理論的に求めた。この結果を基に周期境界条件を課し、分岐後のつり合い経路追跡を行った。その際、たわみ速度に新たな波数下での周期境界条件を課し、接線剛性行列が負の固有値を与える波数を求めることで、分岐モード波数を調べた。これらの結果から、レールが座屈した瞬間は一様なモードを示すが、たわみ振幅の増加に伴って分岐点連続スペクトルとして表れ、変形の局所化を起こすという一連の流れを明らかにすることができた。

参考文献

- 1) 宮井徹：エネルギー法による軌道座屈の数値解析，鉄道技術研究報告，No.1271(施設編第554号)，1984。
- 2) 片岡宏夫，柳川秀明，高原正樹：列車荷重を考慮したロングレールの座屈安定性解析，RTRI REPORT Vol.17 No.17, No.2, 2003. 2
- 3) 岡澤重信，藤井文夫，宇佐美勉：剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の清算法，構造工学論文集，Vol.43A, 311-320, 1997.3