バラスト材の繰り返し変形解析に用いる下負荷面モデルの改良とその効果

[土] 紅露一寬(新潟大), 〇[土] 福津佑太(新潟大), [土] 阿部和久(新潟大)

Improvement of subloading surface elastoplastic model for cyclic deformation analysis of railway ballast

Kazuhiro KORO (Niigata Univ.), Yuta FUKUTSU (Niigata Univ.), Kazuhisa ABE (Niigata Univ.)

The 3-D finite element analysis for cyclic vertical loading tests of a full-scale railway ballasted track is implemented using the extended subloading surface elastoplastic model with the modified material functions proposed by Hashiguchi¹¹. The modified function fulfills the convexity of the yield surface for a whole range of the friction angle. The vertical displacement of the bottom of the sleeper is good agreement to the experiment data under the prescribed cyclic loading. The large plastic strain extends from the edge of the sleeper to the bottom of the ballast layer; the frictional sliding zone can be found in the ballast layer.

キーワード: 有道床軌道, 道床沈下, 3次元繰り返し変形解析, 下負荷面モデル Key words: ballasted track, ballast settlement, 3-D cyclic deformation analysis, subloading surface model

1. はじめに

わが国においては、多くの軌道がまくらぎ下に単粒度 砕石を層状に敷設した有道床軌道となっている.バラス ト道床は輪重衝撃の吸収や騒音・振動の低減に対して安価 で効果的な構造であるが、列車の繰返し走行に伴ってバ ラスト粒子の移動・回転が生じ、道床上面において残留変 位が発生・累積する.特に鉛直方向の残留変位は道床沈下 と呼ばれ、軌道保守の重要監視項目となっている.

設計・管理実務においては, 道床沈下量の予測は重要 な技術課題であり、現状では経験則に頼っているのが現状 である¹⁾.しかし,経験則は道床上面の沈下量こそ与える が, 沈下発生時のバラスト層内の運動状態の評価に対し ては全く用いることができない.また,沈下対策工の開発 のためには道床内部の運動状態の把握が必要不可欠であ るが,実験によるバラスト粒子の運動の観測は現状では まだ研究途上にあり2),数値シミュレーション等を活用せ ざるを得ない、今日、バラスト道床層の残留変位の発現 に関するシミュレーションは、不連続変形法 (DDA)3)や 個別要素法 (DEM)^{4),5)}によるものが大半である.これら の手法はバラストの粒子集合体としての性質を容易に表 現できる解法であるが、粒子の接触を考慮することに起 因して計算負荷が大きくなる傾向にある. そのため、解 析モデルの作成と解析時の計算効率,既存のソフトウェア 資源の有効活用の面から,弾塑性連続体モデルに基づく 有限要素解析法の開発が合理性・実用性・有用性の面で重 要な研究課題である.

著者らはこれまで,弾塑性連続体モデルによるバラス ト材の力学特性の評価に関し,研究を進めてきた.構成 則として hypoplastic モデルと下負荷面モデルを対象に, 応力・ひずみ関係の再現性について検討した⁶⁾.また,連 続体モデルを採用した場合においてさらなる計算量の削 減を目指して,hypoplastic モデルを用いた要素試験解析 において時間域均質化法を適用し,定式化を示しその妥 当性について示した⁷⁾.さらに,回転硬化を考慮した拡張 下負荷面モデル⁸⁾を用いて,有道床軌道の繰返し鉛直載荷 試験の有限要素解析を実施し⁹⁾,解析結果の妥当性を実物 大試験軌道に対する繰返し載荷試験¹⁰⁾との比較を通して 検証してきた.

しかし、文献⁸⁾の弾塑性モデルで用いられている材料関 数では、物性値の設定によっては降伏面の凸性が保証でき なくなることがある.そこで本研究では、降伏曲面の基本 形状を文献¹¹⁾で橋口が提案した関数で与え、それを文献 ⁸⁾の拡張下負荷面モデルに導入し、上述の問題点の改善を 図る.これは、将来陰解法による応力積分を導入する際 に、解析の安定化に寄与するものと思われる.以下では、 当該モデルおよび定式化を示し、バラスト材の大型繰り 返し三軸試験¹²⁾の数値解析、および実物大試験¹⁰⁾を対象 とした弾塑性有限要素解析を試みる.

2. 構成モデル

本研究では,軌道バラスト道床部を弾塑性連続体とみ なし,拡張下負荷面下負荷面モデル⁸⁾により構成モデルを 与える.以下ではその詳細を示す.

2.1 亜弾性構成則

まず、ストレッチング(ひずみ速度)は、 $D = D^e + D^p$ のように、弾性成分 D^e と塑性成分 D^p との加算分解が可能であると仮定する.また、微小変形を仮定し、応力速度・ストレッチング関係を次式で与える.

 $\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(D_{kl} - D_{kl}^p) = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p), \quad (1)$

なお, ε_{ij} は微小ひずみである.

[No.09-65] 日本機械学会第16回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集〔2009-12.2~4. 東京〕

弾性係数テンソル E_{ijkl} は,対象とする砕石粒子集合体 の弾性挙動の圧力依存性を表現できるように,次式で与 える.

$$E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$K = \frac{p + p_{num}}{\gamma}, \quad G = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}K, \quad p = -\frac{\sigma_{kk}}{3},$$
(2)

ここで、 ν は Poisson 比、 γ は材料定数、 p_{num} は初期剛 性を与えるためのパラメータである.

2.2 回転硬化を考慮した下負荷面モデル

下負荷面モデルは, 塑性ストレッチング **D**^p を与える ために導入する.まず,許容応力空間を定めるために,次 式で表される正規降伏面を定義する.

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H), \quad F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right)$$
(3)

ここで, *H*, *β*はそれぞれ等方硬化変数,回転硬化変数, *F*, *F*₀は等方硬軟化関数その初期値, *δ*は正規降伏面上 の応力, *ρ*, *γ*は材料定数である.

次に,正規降伏面 (3) に対し, 収縮率 R で相似である 曲面を下負荷面と定義し,次式で与える.

$$f(\bar{\sigma},\beta) = RF(H) \tag{4}$$

ここで、下負荷面上の応力 ō は次式で与える.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - (1 - R)\boldsymbol{s} \tag{5}$$

なお, sは相似中心である.

各変数の発展則は次のように表される.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = b_r \left\| \boldsymbol{D}^{p*} \right\| \|\bar{\boldsymbol{\eta}}\| \,\bar{\boldsymbol{\eta}}_b$$

$$\dot{\boldsymbol{s}} = c \left\| \boldsymbol{D}^p \right\| \,\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{F} \left\{ \dot{F} - \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \boldsymbol{s}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = U(\boldsymbol{R}) \left\| \boldsymbol{D}^p \right\| \quad (\boldsymbol{D}^p \neq \boldsymbol{O})$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{D}_v^p + \mu \left\| \boldsymbol{D}^{p*} \right\| (\boldsymbol{m}_d - \frac{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|}{p}),$$
(6)

ここで、 D^{p*} は D^p の偏差成分、 $D_v^p = tr D^p$ であり、

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\bar{p}} - \boldsymbol{\beta}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{p}\boldsymbol{I}, \quad \bar{p} = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{\sigma}},$$
$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_b = \bar{m}_b \frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|} - \boldsymbol{\beta}, \quad c = \frac{c_1}{R^{c_3}} \exp\left(c_2 \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{N}}\right), \quad (7)$$
$$\dot{F} = -\frac{F}{\rho - \gamma}\dot{H}, \quad U(R) = u_1(1/R^{u_2} - 1)$$

となる. なお, b_r , μ , ϕ_b , ϕ_d , c_1 , c_2 , c_3 , u_1 , u_2 は材 料定数である.

2.3 材料関数の設定と修正

既往の研究⁹⁾では、上述の諸式に含まれる材料関数のうち、 $\bar{m}, m_s, \bar{m}_b, m_d$ は橋口ら⁸⁾で示された関数をそのまま用いていた.文献⁸⁾の材料関数は、回転硬化と相似中心移動を考慮しないとき、軸対称伸張・圧縮状態において $\|\sigma^*\|/p$ がモール・クーロンの破壊則に一致する.しかし、曲面形状の凸性を保証するためには、パラメータ a と 摩

擦角 φに関する制約条件を満足する必要がある.そのため本研究では、無条件で降伏面の凸性を保証する材料関数として、文献¹¹⁾で最も簡易な関数として提案している次の関数を適用する.

$$\begin{split} \bar{m} &= \zeta(\theta_{\sigma};\phi), \quad m_{s} = \zeta(\theta_{s};\phi), \\ \bar{m}_{b} &= \zeta(\bar{\theta}_{\sigma};\phi_{b}), \quad m_{d} = \zeta(\theta_{\sigma};\phi_{d}), \\ \sin 3\bar{\theta}_{\sigma} &= -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\bar{\eta}^{3}}{\|\bar{\eta}\|^{3}}, \quad \sin 3\theta_{s} = -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\eta_{s}^{3}}{\|\eta_{s}\|^{3}}, \\ \sin 3\theta_{\sigma} &= -\sqrt{6} \frac{\mathrm{tr}\sigma^{*3}}{\|\sigma^{*}\|^{3}}, \\ \zeta(\theta;\phi) &= \frac{14\sqrt{6}\sin\phi}{(3-\sin\phi)(8-\sin3\theta)}, \end{split}$$
(8)

2.4 関連流動則による塑性ストレッチングの導出

流動則は,関連流動則を採用する. **N** は下負荷面の外 向き単位法線ベクトル,λは正値の比例定数として次式で 与える.

$$D^{p} = \lambda \bar{N}, \quad \bar{N} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial f(\bar{p}_{s}, \bar{\chi}_{s})}{\partial \sigma},$$

$$\varphi = \left\| \frac{\partial f(\bar{p}_{s}, \bar{\chi}_{s})}{\partial \sigma} \right\|, \quad \lambda = \frac{\operatorname{tr}(\bar{N}ED)}{\operatorname{tr}(D_{p} + \bar{N}E\bar{N})}$$

$$\Xi \Xi \mathfrak{C},$$
(10)

 $D_p \equiv \operatorname{tr}(\bar{N}\bar{a})$

$$+\operatorname{tr}(\bar{N}\bar{\sigma})\left\{\frac{F'}{F}h - \frac{1}{RF}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\sigma},\beta)}{\partial\beta}b\right) + \frac{U}{R}\right\}$$
(11)

$$\bar{\boldsymbol{a}} \equiv (1-R)\boldsymbol{z} - U\boldsymbol{s}, \ \boldsymbol{b} = \frac{\beta}{\lambda} = b_r \left\|\bar{\boldsymbol{N}}^*\right\| \left\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\right\| \bar{\boldsymbol{\eta}}_b$$
$$\boldsymbol{z} \equiv \frac{\dot{\boldsymbol{s}}}{\lambda} = c\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{F} \left\{ F'h - \operatorname{tr}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{b}\right) \right\} \boldsymbol{s} \qquad (12)$$
$$\bar{\boldsymbol{N}}^* \equiv \bar{\boldsymbol{N}} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr}\bar{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{I}$$

また,負荷基準は次式で定める.

$$D^{p} \neq 0: \quad \bar{N}_{ij} E_{ijkl} D_{kl} > 0,$$

$$D^{p} = 0: \quad \bar{N}_{ij} E_{ijkl} D_{kl} \le 0,$$
(13)

3. つりあい問題の定式化

本研究では、準静的条件下でのつりあい問題を考える. 時刻 $t = t_{n+1}$ での仮想仕事式は、次式で与えられる.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(n+1)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i^{(n+1)} \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{b}_i^{(n+1)} \delta u_i d\Omega,$$
(14)

ただし、 δu_i は仮想変位、 $\delta \varepsilon_{ij}$ は仮想ひずみであり、 $\overline{t}_i, \overline{b}_i$ はそれぞれ作用表面力・物体力であり、 Ω は領域、 Γ_t は表面力規定部分境界である.

式(14)において、応力積分を陽解法で処理すると、次 の方程式を得る.本研究では式(15)を有限要素法を用い て解く.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^{(ep)}(t_n) \Delta \varepsilon_{kl}^{(n+1)} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i^{(n+1)} \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(n+1)} \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(n)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega$$
(15)

 Table 1 Material parameters for simulation of triaxial cyclic loading tests.

-	
Density	$1.74 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$
Shape of yield surface	$\phi = 31^{\circ}$
Isotropoc hardening/softening	$ ho = 100, \mu = 3.8, \phi_d = 20^\circ$
Rotational hardening	$b_r = 39, \phi_d = 46.4^{\circ}$
Evolution of R	$u_1 = 0.71, u_2 = 2.0$
Similarity center	$c_1 = 7.5, c_2 = 1, c_3 = 3$
Elasticity	$\gamma = 9.0 \times 10^{-5}, \nu = 0.15,$
•	$p_{\rm num} = 0.01 (\rm kPa)$

なお、 $\Delta \varepsilon_{kl}^{(n+1)} = \varepsilon_{kl}^{(n+1)} - \varepsilon_{kl}^{(n)}$ とし、 $E_{ijkl}^{(ep)}$ は次式で与えられる.

$$E_{ijkl}^{(ep)} = E_{ijkl} - \frac{(E_{ijrs}\bar{N}_{rs}) \cdot (\bar{N}_{pq}E_{pqkl})}{D_p + \bar{N}_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{N}_{\gamma\delta}}$$
(16)

4. 大型三軸繰り返し試験を対象とした要素解析

材料関数の変更による解析結果への影響を検討するために、まず大型繰返し三軸試験¹²⁾の数値解析を行った.実験では拘束圧を -19.6(kPa) で一定とし、等方応力状態を基準として応力比が 5 となるまで圧縮応力を作用させ、等方応力状態まで除荷する過程を 3000 回繰り返した.なお、各種制御変数の初期値は、 $\beta = 0, s = -0.5I$ (kPa), H = 0 とし、材料定数は Table1 に示す.

軸ひずみと軸差応力との関係を Fig. 1 に,軸ひずみと 体積ひずみとの関係を Fig. 2 にそれぞれ示す. Fig. 1 で は,繰り返し1回目,10回目では材料関数の変更による 結果への大きな影響は見られない. Fig.2 についても,繰 り返し1回目では,関数の修正前後で,ほぼ一致する結 果が得られている.しかし,Fig. 1 の繰り返し100回目 では,残留ひずみの累積速度に差異がみられる.この点に 関しては,積分計算の過程で誤差の累積があると考えら れる.以上から,繰り返し初期段階においては,材料関数 の変更による影響は小さいと言える.また,試験結果と 比較すると,定性的な再現性が得られているといえる.

5. 3次元繰返し変形解析

次に,文献¹⁰⁾で示された実物大有道床軌道の繰返し載 荷試験を対象に、3次元有限要素解析を行った.この試験 では、Fig. 3に示す試験軌道において、2本のレール各々 に最大 20kN の同じ大きさの鉛直荷重を作用させ、その載 荷・除荷を繰り返している.なお、載荷は、5kN 刻みで 最大荷重を漸増させ、20kN に達するまで載荷・除荷を繰 り返している.試験軌道に対応する解析領域は、軌道の 左右対称性、長手方向への連続性・周期性を考慮し、Fig. 4を設定した.まくらぎが剛であると仮定したことから、 軌道対称面・道床底面、まくらぎ側面はいずれも面外変位 を拘束する.まくらぎ下面は一様に強制変位を与える変 位規定境界としている.

まず, Fig. 5 にまくらぎ位置での鉛直荷重と鉛直変位 との関係を示す. 図から,要素解析と同様に繰り返しの初 期では,ほぼ一致する経路をたどっていることが分かり, 4回目の載荷時でも大きな差は見られない. 試験結果と比 較しても,残留変位の累積傾向や先行荷重超過時および



Fig. 1 Axial strain and deviator stress in the simulation of the triaxial cyclic loading test.



Fig. 2 Volumetric strain in the simulation of the triaxial cyclic loading test (1st cycle).



Fig. 3 Dimension of the full-scale track tests.



Fig. 4 Finite element model.

除荷時での比較的大きな剛性の低下といった現象が良好 に再現されている.

続いて,軌道内部における残留変形の発現傾向につい て検討する.材料関数の修正による影響は初期載荷時に は顕著にみられるものではない.道床内部の挙動に関し ても,既往の研究⁹⁾で得られたものと同様のものが得られ ている.ここで,今回行った解析の結果として,Fig. 6, Fig. 7 にそれぞれ塑性体積ひずみ,塑性偏差ひずみの分 布を,Fig. 8(a), (b) に縦断面,横断面における残留変位 の分布をそれぞれ示す.

Fig. 6 の塑性体積ひずみについて見ると、まくらぎ鉛

Table 2 Material parameters for FE analysis.

Density	$1.74 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$
Shape of yield surface	$\phi = 24^{\circ}$
Isotropic hardening/softening	$\rho = 0.1, \mu = 3.8, \phi_d = 20^{\circ}$
Rotational hardening	$b_r = 80, \phi_d = 32^{\circ}$
Evolution of R	$u_1 = 1.0, u_2 = 4.3$
Similarity center	$c_1 = 3.5, c_2 = 1.2, c_3 = 3.2$
Elasticity	$\gamma = 1.5 \times 10^{-4}, \nu = 0.15,$
	$p_{\rm num} = 0.01 (\rm kPa)$



Fig. 5 Vertical dislacement and loads in full-scale simulation.



-0.00100 0.00025 0.00150 0.00275 0.00400

Fig. 6 Volumetric permanent strain in the ballast layer.



Fig. 7 Deviator stress in the ballast layer.

直下での体積収縮が見られ,道床部バラスト材の圧縮によ る間隙の減少が予測される.また,Fig.7の塑性偏差ひ ずみの分布について見ると,まくらぎ端部から道床底面 に向け,帯状に進展しており,滑り面が発生していること も考えられる.Fig.5.,Fig.8の残留変位ベクトルに着 目すると,まくらぎ鉛直下では下方に残留変位が生じて いるが,特に塑性偏差ひずみの集中帯より外側では,バラ スト材が軌道外側に強く押し出されていることが分かる. これについては,底面での面内変位に関しては slip を許 容する境界条件とした影響ともいえる.

ここで得られた道床内部の挙動については実験との比



(b) x - z planc.

Fig. 8 Distribution of permanent displacement.

較によって検討するのが困難であるが, DEM など不連続 体モデルによる解析結果との比較によって, 粒子の移動 や回転, 間隙の変化を検討できるものと考えられる.



- 相川 明:鉄道バラストの三次元挙動測定装置の開発 溶 接継目衝撃荷重の現場測定と DDA パラメータ設定法の 提案 –. 土木学会応用力学論文集, Vol.11, pp.487-496, 2008.
- 石川達也,大西有三,堀池高広:不連続変形法 (DDA) による道床バラスト部繰返し塑性変形機構の検討.土木 学会論文集,No.645/III-50, pp.15-28, 2000.
- 4) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier, C., Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, pp.2841-2859, 2006.
- 5) 阿部和久, Syakir, M., 紅露一寛:二次元粒状体モデル によるバラスト道床の沈下解析. 土木学会鉄道力学論文 集, Vol.10, pp. 49-54, 2006.
- 紅露一寛,嘉数東陽,梶原宗光,阿部和久:鉄道におけるバラスト道床材の繰返し変形解析に用いる構成モデルの検討.計算数理工学論文集,Vol.7, No.1, pp. 31-36, 2007.
- 7) 紅露一寛, 嘉数東陽, 阿部和久:鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析のための時間域均質化法定式化. 土木学会応用力学論文集, Vol.11, pp.149-158, 2008.
- 橋口公一,上野正実,陳 忠平:下負荷面および回転硬 化の概念に基づく土の弾塑性構成式,土木学会論文集, No.547, III-36, pp.127–144, 1996.
- Koro, K., Fukutsu, Y., Abe, K.: 3-D FE simulation of cyclic loading tests of railway ballasted track using subloading surface elastoplastic model. *Proc. of STECH'09*, CD-ROM, 2009.
- 石川達也,名村 明: 実物大試験による道床バラスト部繰返し変形特性の検討,土木学会論文集,No.512, IV-27, pp.47-59, 1995.
- Hashiguchi, K.: A proposal fo the simplest convexconical surface for soils. Soils & Foundations, Vol.42, No.3, pp.107-113, 2002.
- 12) 石川達也,須長 誠,董 軍,名村 明:大型繰返し三 軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会 論文集, No.575, III-40, pp.169-178, 1997.