# 1210 車輪・レール間の非 Hertz 接触計算手法の研究

正［機］○葛田 理仁 （鉄道総研）　　正［機］ 藤岡 健彦 （東京大学）

## Research on Numerical Method for Non-Hertzian Contact Problem between Wheel and Rail

Masahito KUZUTA, Railway Technical Research Institute 2-8-38, Hikari-cho, Kokubunji City, Tokyo
Takehiko FUJIOKA, The University of Tokyo

Contact problem between a wheel and rail is a fundamental problem of railway vehicle dynamics. J.J.Kalker proposed the method for solving the contact problem considering the three-dimensional elastic theory using the active set method for optimal calculations required in solving the problem. It is shown that the proposed method using the primal-dual interior point method for optimal calculations is better in calculating speed than Kalker's original method. It is also found that the area which has to be analyzed can be calculated reasonably and automatically using our proposed method. We have concluded that one can solve the contact problem by our proposed method about 2 to 10 times faster than by Kalker's original algorithm.

*Keywords:* Railway, Contact problem, Numerical Analysis, Computational Method, Optimization Problem, Wheel, Rail

### 1．緒言

鉄道車両の運動を考えるうえで，走行シミュレーションを行うような場合，車輪とレールの間の接触問題，特に，車輪とレールの接触領域でどのような弾性変形やそれに伴うクリープ力が生じているのかという問題を精度よく高速に解けることが重要である．

過去のシミュレーションでは，殆どのケースにおいて，車輪とレールの接触領域と接触圧分布の計算には Hertz 接触が，接触領域内の接線力の計算には Kalker が提案した FASTSIM が用いられてきた．この計算方法では車輪とレールの接触領域は常に Hertz 接触解による楕円形となる．実際の接触形状や接触面内の圧力分布は Hertz 接触解と大きく異なる場合があることが知られ，このときのクリープ力を正確に求めるのは困難である．現実の接触状態に向けてより厳密な解が求まる方法として，Kalker が提案した，弾性学の理論に基づく EXACT THEORY を用いるとより正確な計算ができるとされている．しかし，EXACT THEORY では各時間ステップにおいて最適問題を解く必要があり，FASTSIM に比べて計算時間が必要であり，現状では EXACT THEORY を時刻歴の車両運動シミュレーション解析などに適用した計算例は殆どない．

そこで，本研究では Kalker の EXACT THEORY について，(1) EXACT THEORY の内部で行う最適計算のアルゴリズム，(2) 接触領域を効果的に見積もる方法，の検討を行った．本報告では，提案した計算手法について記し，それが実際の車輪とレールの接触計算にも十分に適用できることを述べる．

### 2．EXACT THEORY による接触問題の定式化

Kalker は，Fichera，Duvaut-Lions らのエネルギ原理に関する理論をもとに，EXACT THEORY では，ある時刻 $t$ における圧力分布 $p$ が，各時間ステップにおいて式(1)に示す最適問題を，$p$ を変数として解くことにより得られることを示した[1]．

$$\min \quad C = \frac{1}{2}p_{Ii}A_{IiJj}p_{Jj} + h_J p_{J3} + (W_{J\tau} - u'_{J\tau})p_{J\tau}$$
$$sub \quad p_{J3} \geq 0, \quad |p_{J\tau}| \leq \mu p_{J3}, \quad dQ\sum_{J} p_{I3} = P, \quad for\ J = 1...MN \quad (1)$$

但し，記号は $p$：接触面内の圧力，$h$：車輪・レールの法線方向距離，$\mu$：摩擦係数，$W$：剛体すべり，$u'$：1ステップ前の時刻における変位，$A$：影響係数行列，また I (I=1,2,3,…MN), J (I=1,2,3,…MN) (添字)：解析対象領域面内にとったグリッド番号で MN はグリッド総数，i (i=1,2,3)，j (j=1,2,3) (添字)：$x,y,z$ 方向，$\tau$ ($\tau$=1,2) (添字)：$x,y$ 方向，$dQ$：1つのグリッドの面積を表す．なお，影響係数行列は対称行列である．

本研究では，車輪とレールは同一の物性値をもつものとして扱う．その場合，式(1)は「法線方向の問題(NORM)」(式(2))および「接平面内の問題(TANG)」(式(3))に示す2つのプロセスに分かれ，各時間ステップにつき1回ずつこれらのプロセスを計算すればよい．

・法線方向の問題(NORM)

$$\min \quad \phi = \frac{1}{2}p_{I3}A_{I3J3}p_{J3} + h_J p_{J3}$$
$$sub \quad p_{J3} \geq 0 \quad for\ J = 1...MN, \quad dQ\sum_{I} p_{I3} = P \quad (2)$$

・接平面内の問題(TANG)

$$\min \quad \phi = \frac{1}{2}p_{I\tau}A_{I\tau J\tau}p_{J\tau} + (W_{J\tau} - u'_{J\tau})p_{J\tau}$$
$$sub \quad |p_{J\tau}| \leq \mu p_{J3} \quad for\ J = 1...MN \quad (3)$$

### 3．接触問題の求解アルゴリズム

式(2)，(3)の解は，それぞれ式(5)～(8)，式(9)～(12)に掲げる，最適性の条件（KKT 条件：カルーシュ・キューン・タッカー条件）を満たすような $p$ として求められる．但し，$z$ は不等式条件に対応するラグランジュ乗数，$y$ は等式条件に対応するラグランジュ乗数，$g_I = \mu p_{I3}$ である．

・式(2)の KKT 条件

$$A_{I3J3}p_{J3} + h_I - y - z_I = 0 \quad (5)$$
$$P - dQ\sum_{I} p_{I3} = 0 \quad (6)$$
$$\begin{pmatrix} z_1 p_1 = 0 \\ z_2 p_2 = 0 \\ \vdots \\ z_{MN} p_{MN} = 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$
$$p_I \geq 0, \quad z_I \geq 0 \quad (8)$$

・式(3)の KKT 条件

$$\begin{pmatrix} A_{I1J1}p_{J1} + A_{I1J2}p_{J2} + (W_{J1} - u'_{J1}) + 2\begin{pmatrix} z_1p_{11} \\ z_2p_{21} \\ \vdots \\ z_2p_{MN1} \end{pmatrix} \\ A_{I1J2}p_{J1} + A_{I2J2}p_{J2} + (W_{J2} - u'_{J2}) + 2\begin{pmatrix} z_1p_{12} \\ z_2p_{22} \\ \vdots \\ z_2p_{MN2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

$$z_I \geq 0 \tag{10}$$

$$g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) \geq 0 \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} (g_1^2 - (p_{11}^2 + p_{12}^2))z_1 = 0 \\ (g_2^2 - (p_{21}^2 + p_{22}^2))z_2 = 0 \\ \vdots \\ (g_{MN}^2 - (p_{MN1}^2 + p_{MN2}^2))z_{MN} = 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

式(5)～(8)，および式(9)～(12)の求解のためのアルゴリズムについて，Kalker が文献[1]で述べている方法を用いた場合と，本研究で適用した主双対内点法による方法を用いた場合について 3.1 節，3.2 節に述べる．

### 3.1 Kalker の計算方法

Kalker の計算手法は，いわゆる有効制約法のアルゴリズム[2]を一部修正したものである．具体的なアルゴリズムについては文献[3]に述べられているので，ここでは計算の流れを簡潔に記す．

#### 3.1.1 法線方向の問題に対する Kalker のアルゴリズム

step1: $p_{I3} > 0$ となる $p_{I3}$ が $I = 1,2,3,\dots,m$ と m 個あるとする．すると，残りの MN-m 個の $p_{I3}$ は $p_{I3} = 0$ であり，これら MN-m 個の不等式条件が有効制約である．式(7)から，$p_{I3} > 0$ となる $p_{I3}$ に対応する $z_I$ は $z_I = 0$ を満たす．

step2: 未知の量は m 個の $p_{I3}$，MN-m 個の $z_I$，および $y$ であり，式(5)，(6)の方程式の数が MN+1 であることから解を求めることができる．即ち

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c} A_{1313} & \cdots & & A_{13m3} & 0 & \cdots & & 0 & -1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & -1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & -1 \\ A_{m313} & \cdots & & A_{m3m3} & 0 & \cdots & & 0 & -1 \\ \hline A_{m+1313} & \cdots & & A_{m+13m3} & -1 & & & & -1 \\ \vdots & & & \vdots & & -1 & & & -1 \\ \vdots & & & \vdots & & & \ddots & & -1 \\ A_{MN313} & \cdots & & A_{MN3m3} & & & & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} p_{13} \\ \vdots \\ \\ p_{m3} \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ \\ z_{MN} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_{I1} \\ -h_{I2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ -h_{IMN} \\ \hline \frac{P}{dQ} \end{pmatrix} \tag{13}$$

を解く．

step3: m 個の $p_{I3}$ が

・$p_{I3} \geq 0$ を満たせば step4 へ

・満たさない場合，$p_{I3} \geq 0$ を満たさない $p_{I3}$ に対応する $I$ を全て新たに有効制約に加えて step1 へ

step4: MN-m 個の $z_I$ が

・$z_I \geq 0$ を満たせば $p_{I3}, z_I, y$ は式(2)の最適解

・満たさない場合，$z_I \geq 0$ を満たさない $z_I$ に対応する $I$ を全て，有効制約から外して step2 へ

#### 3.1.2 接線方向の問題に対する Kalker のアルゴリズム

step1: $g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) > 0$ を満たす $p_{I1}$，$p_{I2}$ がそれぞれ $I = 1,2,3,\dots,m$ と m 個あるとすれば，残りの MN-m 個の $p_{I1}$，$p_{I2}$ は $g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) = 0$ を満たし，これらの MN-m 個の不等式条件が有効制約である．式(12)から，$g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) > 0$ を満たす $p_{I1}$，$p_{I2}$ に対応する $z_I$ は $z_I = 0$ を満たす．

step2: 未知の量はそれぞれ MN 個の $p_{I1}$，$p_{I2}$，MN-m 個の $z_I$ であり，式(9)の方程式の数が 2MN 個，また $g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) = 0$ が MN-m 個の $p_{I1}$，$p_{I2}$ について成り立つので解を求めることができる．即ち

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 2z_{m+1}p_{m+11} \\ \vdots \\ \\ 2z_{MN}p_{MN1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 2z_{m+1}p_{m+12} \\ \vdots \\ \\ 2z_{MN}p_{MN2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{I1J1} & A_{I1J2} \\ A_{I2J1} & A_{I2J2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \\ \hline p_{m+11} \\ \vdots \\ \\ p_{MN1} \\ \hline p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{m2} \\ \hline p_{m+12} \\ \vdots \\ \\ p_{MN2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} - u'_{11} \\ W_{21} - u'_{21} \\ \vdots \\ W_{m1} - u'_{m1} \\ \hline W_{m+11} - u'_{m+11} \\ \vdots \\ \\ W_{MN1} - u'_{MN1} \\ \hline W_{12} - u'_{12} \\ W_{22} - u'_{22} \\ \vdots \\ W_{m2} - u'_{m2} \\ \hline W_{m+12} - u'_{m+12} \\ \vdots \\ \\ W_{MN2} - u'_{MN2} \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

及び

$$\begin{cases} g_{m+1}^2 - (p_{m+11}^2 + p_{m+12}^2) = 0 \\ g_{m+2}^2 - (p_{m+21}^2 + p_{m+22}^2) = 0 \\ \vdots \\ g_{MN}^2 - (p_{MN1}^2 + p_{MN2}^2) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

を解く．

step3: m 個の $p_{I1}$，$p_{I2}$ が

・$g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) \geq 0$ を満たせば step4 へ

・満たさない場合，$g_I^2 - (p_{I1}^2 + p_{I2}^2) \geq 0$ を満たさない $p_{I1}$，$p_{I2}$ に対応する $I$ を全て，新たに有効制約に加えて step1 へ

step4: MN-m 個の $z_I$ が

・$z_I \geq 0$ を満たせば $p_{I1}, p_{I2}, z_I$ は式(3)の最適解

・満たさない場合，$z_I \geq 0$ を満たさない $z_I$ に対応する $I$ を全て，有効制約から外して step2 へ

法線方向の問題との違いは不等式条件が有効制約となっていても直ちには $p_{I\tau}$ は分からない点，それに関連して式(14)，式(15)から分かるように方程式は連立二次方程式になっている点である．Kalker は文献[3]において“We have had excellent results using a Newton-Raphson technique to solve it.”と述べている．そこで本研究でも方程式の求解にはニュートン・ラプソン法を用いた．ニュートン・ラプソン法を適用するためには式(14)，式(15)のヤコビ行列が必要であり，そのサイズは 3MN-m である．

### 3.2 主双対内点法による計算方法

1980 年代後半に提案されて現在も数学の分野で研究が行われている，内点法の一種である主双対内点法を本

研究に用いて独自に実装を行った．主双対内点法では，KKT 条件のうちの不等式制約に関する相補性の条件，式(7)，(12)の右辺を正のパラメータ $\mu$ で置き換え，$\mu$ を逐次小さくしながら KKT 点に収束する点列を生成し，ある小数 $\xi$ に対し $\mu<\xi$ となった段階で収束したものと判定する．式(2)，(3)の求解のために主双対内点法を適用した場合の計算の流れは次のように表される．

### 3.2.1 法線方向の問題に対する主双対内点法のアルゴリズム

step1: $p_{I3}, z_I, y, \mu$ の初期値を定める．

step2: $k$ 回目の反復においては

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc|c} & & & -1 & & & & -1 \\ & A_{I3J3} & & & -1 & & & -1 \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & -1 & -1 \\ \hline & -1\ -1 \ldots -1 & & & & 0 & & 0 \\ \hline z_1 & & & p_{13} & & & & \\ & z_2 & & & p_{23} & & & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & z_{MN} & & & & p_{MN3} & \end{array}\right)\begin{pmatrix} dp \\ dz \\ dy \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} A_{I3J3}p_{J3}+h_I-y-z_I \\ \hline \frac{p}{\partial Q}-\sum_I p_{I3} \\ \hline z_1p_1-\mu \\ z_2p_2-\mu \\ \vdots \\ z_{MN}p_{MN}-\mu \end{array}\right)_k \tag{16}$$

を解いて $p_{I3}, z_I, y$ の進む方向を求める．但し，$\boldsymbol{p}=(p_{13},p_{23},\ldots,p_{MN3})'$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_{MN})'$，右辺右下の $k$ は“$k$ 回目の反復における値”を意味する．

step3: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{z}$ については，最大のステップサイズを 1 として，非負条件を満たすように $d\boldsymbol{p}, d\boldsymbol{z}$ 方向に進む．

step4: $\sum_i p_i z_i<\xi$ が
- 満たされていれば $p_{I3}, z_I, y$ は式(2)の最適解
- そうでなければ $\mu\leftarrow\alpha\sum_i p_i z_i<\xi$ として step2 へ

式(16)左辺の係数行列は，サイズが 2MN+1 であるが，実際にはよりサイズの小さな方程式を解けばよい．式(16)内の左辺の各ブロック行列を $B_{11},B_{12},\ldots,B_{33}$，右辺の各ブロック行列を $C_1,C_2,C_3$ と表せば，式(16)は

$$\begin{cases} B_{11}d\mathbf{p}+B_{12}d\mathbf{z}+B_{13}y &= C_1 \\ B_{21}d\mathbf{p} &= C_2 \\ B_{31}d\mathbf{p}+B_{32}d\mathbf{z} &= C_3 \end{cases} \tag{17}$$

の形に書ける．3 番目の式から $dz$ は容易に消去できるので，結局，係数行列のサイズが MN+1 である

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{I3J3}+\begin{pmatrix} \frac{z_1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{z_2}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{z_{MN}}{p_{MN}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{array} \\ \hline -1\ \ -1\ \ \ldots\ \ -1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} d\mathbf{p} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1-B_{32}^{-1}C_3 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

を解けばよいことが分かる．

### 3.2.2 接線方向の問題に対する主双対内点法のアルゴリズム

step1: $p_{Ir}, z_I, \mu$ の初期値を定める．

step2: $k$ 回目の反復においては式(19)を解く．但し，$\boldsymbol{p}_1=(p_{11},p_{21},\ldots,p_{MN1})'$，$\boldsymbol{p}_2=(p_{12},p_{22},\ldots,p_{MN2})'$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_{MN})'$，右辺右下の $k$ は“$k$ 回目の反復における値”を意味する．

$$\mathbf{D}\begin{pmatrix} d\mathbf{p}_1 \\ d\mathbf{p}_2 \\ d\mathbf{z} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} A_{I1J1}p_{J1}+A_{I1J2}p_{J2}+(W_{J1}-u'_{J1})+2\begin{pmatrix} z_1p_{11} \\ z_2p_{21} \\ \vdots \\ z_2p_{MN1} \end{pmatrix} \\ \hline A_{I1J2}p_{J1}+A_{I2J2}p_{J2}+(W_{J2}-u'_{J2})+2\begin{pmatrix} z_1p_{12} \\ z_2p_{22} \\ \vdots \\ z_2p_{MN2} \end{pmatrix} \\ \hline (g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2))z_1-\mu \\ (g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2))z_2-\mu \\ \vdots \\ (g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2))z_{MN}-\mu \end{array}\right)_k \tag{19}$$

ここで $\mathbf{D}$ は

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{I1J1}+2\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & \ddots \\ & & & z_{MN} \end{pmatrix} & A_{I2J1} & \begin{array}{cccc} 2p_{11} & & & \\ & 2p_{21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2p_{MN1} \end{array} \\ \hline A_{I2J1} & A_{I2J2}+2\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & \ddots \\ & & & z_{MN} \end{pmatrix} & \begin{array}{cccc} 2p_{12} & & & \\ & 2p_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2p_{MN2} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} -2p_{11}z_1 & & & \\ & -2p_{21}z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2p_{MN1}z_{MN} \end{array} & \begin{array}{cccc} -2p_{12}z_1 & & & \\ & -2p_{12}z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2p_{MN2}z_{MN} \end{array} & \begin{array}{cccc} g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2) & & & \\ & g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2) \end{array} \end{array}\right)$$

である．

step3: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{z}$ については，最大のステップサイズを 1 として，非負条件を満たすように $d\boldsymbol{p}, d\boldsymbol{z}$ 方向に進む．

step4: $\sum_i p_i z_i<\xi$ が
- 満たされていれば $p_{I1}, p_{I2}, z_I$ は式(3)の最適解
- そうでなければ $\mu\leftarrow\alpha\sum_i p_i z_i<\xi$ として step2 へ

式(19)左辺の係数行列は，サイズが 3MN であるが，実際にはよりサイズの小さな方程式を解けばよい．式(19)内の左辺の各ブロック行列を $B_{11},B_{12},\ldots,B_{33}$，右辺の各ブロック行列を $C_1,C_2,C_3$ と表せば，式(19)は

$$\begin{cases} B_{11}d\mathbf{p}_1+B_{12}d\mathbf{p}_2+B_{13}d\mathbf{z} &= C_1 \\ B_{21}d\mathbf{p}_1+B_{22}d\mathbf{p}_2+B_{23}d\mathbf{z} &= C_2 \\ B_{31}d\mathbf{p}_1+B_{32}d\mathbf{p}_2+B_{33}d\mathbf{z} &= C_3 \end{cases} \tag{20}$$

の形に書ける．3 番目の式から $dz$ は容易に消去できるので，結局，係数行列のサイズが 2MN である

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{I1J1}+\begin{pmatrix} \frac{4p_{11}^2z_1}{g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2)^2} & & & \\ & \frac{4p_{21}^2z_1}{g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{4p_{MN1}^2z_1}{g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2)^2} \end{pmatrix} & A_{I1J2}+\begin{pmatrix} \frac{4p_{11}p_{12}z_1}{g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2)^2} & & & \\ & \frac{4p_{21}p_{22}z_1}{g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{4p_{MN1}p_{MN2}z_1}{g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2)^2} \end{pmatrix} \\ \hline A_{I2J1}+\begin{pmatrix} \frac{4p_{11}p_{12}z_1}{g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2)^2} & & & \\ & \frac{4p_{21}p_{22}z_1}{g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{4p_{MN1}p_{MN2}z_1}{g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2)^3} \end{pmatrix} & A_{I2J2}+\begin{pmatrix} \frac{4p_{12}^2z_1}{g_1^2-(p_{11}^2+p_{12}^2)^2} & & & \\ & \frac{4p_{22}^2z_1}{g_2^2-(p_{21}^2+p_{22}^2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{4p_{MN2}^2z_1}{g_{MN}^2-(p_{MN1}^2+p_{MN2}^2)^2} \end{pmatrix} \end{array}\right)\begin{pmatrix} d\mathbf{p}_1 \\ d\mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_1-B_{13}B_{33}^{-1} \\ C_2-B_{23}B_{33}^{-1} \end{pmatrix} \tag{21}$$

を解けばよいことが分かる．

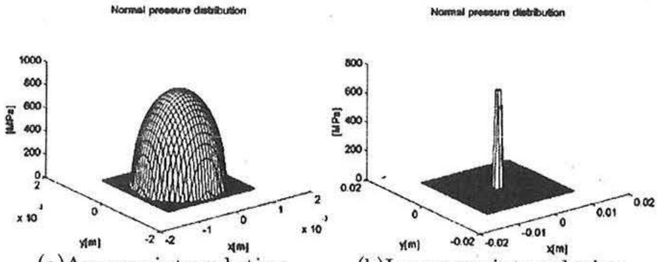
### 3.3 両者のアルゴリズムの比較

3.1 節，3.2 節で述べたことから，解析対象領域に同一数のグリッドがとってあり，かつ計算が収束するまでの反復回数が両者で仮に同程度であれば，主双対内点法による解法を用いたほうが，①法線方向の問題については，方程式の係数行列のサイズは同じだが，係数行列が対称

行列に書けるため，理想的には計算時間がKalkerの方法の半分程度になると考えられる，②接線方向の問題に対してはよりサイズの小さな，しかも連立線型方程式を解くのみでよいので数倍～数十倍高速である，という予想ができる．実際に2球の接触問題において数値実験を行ったところ，計算時間をKalkerのアルゴリズムよりも法線方向の問題では2/3程度に，接線方向の問題では，問題にもよるが1/2～1/10程度にできることを確かめた．

## 4．解析の対象領域を効率的に見積もる方法

法線方向の問題については，第3章で述べたことから分かるように，予め定めた解析の対象領域内で $p_{13} > 0$ の部分と $p_{13} = 0$ の部分を分けることで接触領域の判別が行われる．一般の物体同士の接触については，接触領域をHertz接触の場合のように見積もることはできない．解析の対象領域に，真の接触領域以外の部分の割合が実際の接触領域に比べて多くなると，接触圧力分布など，接触の様子を上手く表せなくなる．そのような例を図1に掲げる．(a)と(b)とでは，初めに定めた解析対象領域のみが異なり，(b)は上手く接触状態が求まっていない．



(a)Appropriate solution　(b)Inappropriate solution

Fig.1　Optimized result for problem "NORM"

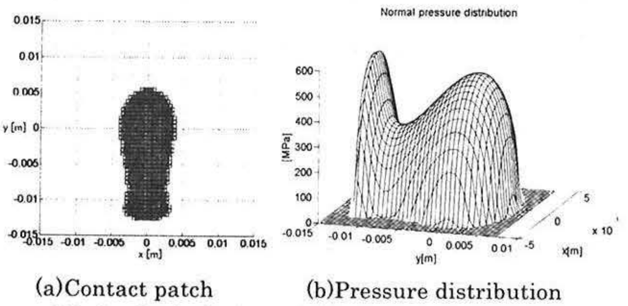
本研究で用いた主双対内点法による計算では，真の接触領域外の部分の接触圧力分布は初期値(正)→0となる．そこで，1回の最適計算を進める中で周囲よりも圧力が小さい部分を削除するような解析対象領域の更新を行い，残った領域に新たに元と同一数のグリッドを生成して計算を進める方法を実装した．その結果，図1(b)と同様の初期条件からスタートした場合でも最終的に図1(a)と同様な結果が，機械的に得られることを確かめた．

## 5．車輪とレールの接触計算への適用

本研究で提案した計算手法を実際の車輪とレールの接触領域を求める問題に適用した例を掲げる．

例として，欧州で用いられているS1002踏面形状の車輪とUIC60レールの組合せにおける右側車輪の接触圧力分布の計算をとりあげる．

### 5.1 本研究で提案した計算方法による結果



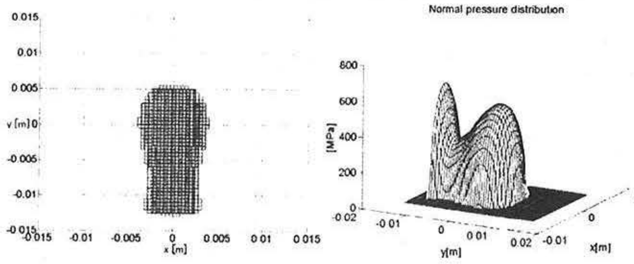
(a)Contact patch　(b)Pressure distribution

Fig.2　Optimized result for problem "NORM"

計算条件は，中止位置で軸重78.5kNとした．最初の解析の対象領域は概ねレール長手方向に40mm，断面方向に70mm程度であり，レール長手方向に30個，断面方向に40個のグリッドをとって離散化している．計算時間は4.29sであった．求まった接触領域の形状と接触圧力分布を図2に示す．

### 5.2 Kalkerの計算方法による結果

5.1節の計算を行えば，真の接触領域を含む長方形のサイズが分かるので，続いてその長方形を解析の対象領域として，5.1節と同様の計算条件のもとでKalkerのアルゴリズムを用いて計算を行った．計算時間は5.26sであった．接触領域の形状と接触圧力分布を図3に示す．



(a)Contact patch　(b)Pressure distribution

Fig.3　Optimized result for problem "NORM"

図3より，Kalkerのアルゴリズムで計算を行った場合も，接触領域と圧力分布について同様の結果が得られることが分かる．

なお，この接触計算については文献[4]等に計算例が示されており，本研究における計算結果はそれらの計算結果とも一致している．

## 6．結論

本研究の主な結論は次のとおりである．

1. 接触計算のアルゴリズムについては，本研究で採用した主双対内点法を用いたアルゴリズムを用いたほうが，Kalkerの計算方法よりも，法線方向の問題，接線方向の問題ともに高速化される．
2. 主双対内点法の計算の進み方を生かして，解析の対象領域を1回の最適計算の内部で修正していくことでグリッドを有効に使う方法について考察し，実際の数値実験によって提案した方法が有効であることを示した．
3. 代表的なレールと車輪の組合せに対して接触計算の過程及び結果を示し，本研究で提案した計算方法が，従来知られている方法よりも高速で効率の良い手法であることを示した．

## 参考文献

[1] J.J.Kalker: Survey of Wheel-Rail Rolling Contact Theory, Vehicle System Dynamics, vol5, 1979

[2] Philip E. GILL : Walter MURRAY, NUMERICALLY STABLE METHODS FOR QUADRATIC PROGRAMMING, Mathematical Programming, vol14, p349-p372, 1978

[3] J.J.Kalker : Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Kluwer Academic Publishers, 1990

[4] J. PIOTROWSKI, H. CHOLLET : Wheel rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact, Vehicle System Dynamics, vol43, No.6-7, 2005