

不均質部を有する無限軌道の動的応答解析

○ [土] 阿部和久 (新潟大学工学部), 藤下真悟 (新潟市), [土] 紅露一寛 (新潟大学大学院)

DYNAMIC ANALYSIS OF AN INFINITE RAILWAY TRACK HAVING AN IRREGULAR ZONE

Kazuhisa Abe, (Niigata University)

Shingo Fujishita, (Niigata City)

Kazuhiro Koro, (Graduate School, Niigata University)

This paper presents a numerical method to construct transmitting boundaries for periodic railway tracks. To achieve this, the Floquet transform is utilized. The developed method is applied to a periodically supported rail having a finite irregular zone subjected to harmonic loads. Through comparison with the present method and the conventional way of very long but finite railway modeling, the superiority over the truncated model is demonstrated.

キーワード：離散支持レール, 無限周期構造, 伝達境界, 振動応答解析

Key words : discretely supported rail, periodic structure, transmitting boundary, vibration analysis

1. はじめに

軌道系の動的応答特性の把握は, 周辺地盤や列車の振動抑制などの観点から重要であり, これまでに数値モデルによる動的解析が多くなされて来た. その多くはレールを有限長で打ち切ったモデルを採用している. なお, レール振動を Green 関数表現する場合¹⁾, これを無限長のはりとしてモデル化可能であるが, まくらぎ等による離散支持部の設定は有限区間に限られる. したがって, そのような手法によっても離散支持下の無限軌道を表現することはできない.

減衰系での応答解析の場合, 解析領域を十分に長くとれば打ち切り端からの反射波は消散することとなるため, 従来解法による有限長モデルでも適切な結果を得ることができる. しかし, モード解析など無減衰系により理想化し, 軌道系の基本的動特性を抽出しようとする場合, 打ち切り端の影響が応答全体に及ぶため, 有限長モデルによる解析は無意味となる.

鉄道軌道では, 一般にレールをまくらぎで離散支持する構造が用いられている. 当該構造は無限に長い周期構造により理想化することができる. 著者らは, この様な無限周期場の振動解析を通し, 波動伝播特性等について調べてきた^{2),3),4)}. 周期構造系の力学問題は, Floquet 解析手法により, それを構成する最小単位 (ユニットセル) における問題に帰着して解くことができる. したがって, この方法によれば無限周期軌道の力学解析が可能となる.

しかし, 一部に周期性から外れた不均質部を含む場合, もはや Floquet 解析は適用できない. 実際の軌道においては, レール継目に代表される様な非周期部を含む構造を有する場合がある. この様な箇所が軌道構造上の弱点となるケースが多く, したがって, 非周期部を含む無限軌道構造の応答特性の把握は重要である.

そこで本研究では, 上述の様に一部に他と異なる構造を

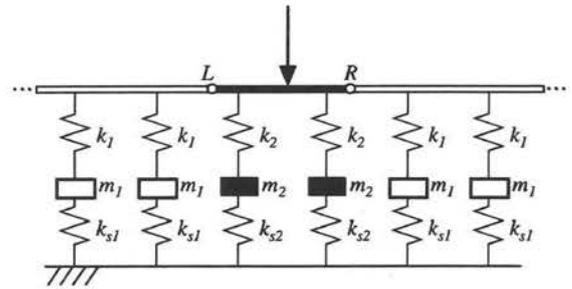


図 1 解析対象問題

含む無限軌道を対象とした解析手法を提案する. 具体的には, 非周期構造端に, その左右の周期軌道の動的応答を表現する伝達境界を接合する. なお, 半無限周期場の伝達境界は, Floquet 変換を用い構成する. 構成手法を継目の加振応答解析に適用し, 本手法の有効性を確認する.

2. 解析手法の概要

2.1 対象とする問題

図 1 の様に, 一部に他と異なる構造を含む無限軌道を考える. なお, 左右の半無限域は周期性を有するものとする. また, 調和外力は非周期部にのみ作用するものとする.

2.2 求解方程式

上述の問題の具体的解法を構成する. まず, 非周期域の部分構造における運動方程式が次式で与えられているものとする.

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{LL} & \hat{K}_{LH} & \hat{K}_{LR} \\ \hat{K}_{HL} & \hat{K}_{HH} & \hat{K}_{HR} \\ \hat{K}_{RL} & \hat{K}_{RH} & \hat{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_L \\ U_H \\ U_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ \bar{F}_H \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (1)$$

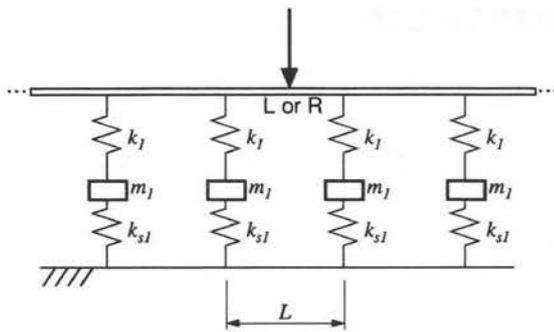


図2 無限周期軌道の加振問題

ここで、 $\hat{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$ 、 \mathbf{K}_{ij} 、 \mathbf{M}_{ij} はそれぞれ剛性および質量部分行列である。また、 ω は加振円振動数、 $\{\mathbf{U}\}$ 、 $\{\mathbf{F}\}$ は節点変位および節点力ベクトルである。なお、下添字 L, R, H は非周期部左右端節点、およびそれ以外の節点を意味する。今、当該域にのみ外力が作用しているので、 $\{\bar{\mathbf{F}}\}$ のみ既知量として与えられている。

左右の半無限周期構造端（結合点）における節点変位と節点力との関係が次式により与えられているものとする。

$$[\mathbf{K}_L]\{\mathbf{U}_L\} = \{\mathbf{F}_L\}, \quad [\mathbf{K}_R]\{\mathbf{U}_R\} = \{\mathbf{F}_R\} \quad (2)$$

すると、結合点での変位の連続条件と力のつり合い条件より、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{LL} + \mathbf{K}_L & \hat{\mathbf{K}}_{LH} & \hat{\mathbf{K}}_{LR} \\ \hat{\mathbf{K}}_{HL} & \hat{\mathbf{K}}_{HH} & \hat{\mathbf{K}}_{HR} \\ \hat{\mathbf{K}}_{RL} & \hat{\mathbf{K}}_{RH} & \hat{\mathbf{K}}_{RR} + \mathbf{K}_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{F}}_H \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式(3)を解くことで、非周期部を含む無限場の加振応答を求めることができる。

3. 伝達境界の構成

3.1 無限周期構造の加振問題

前節において設定した問題は、式(2)の伝達境界式を与える行列 $[\mathbf{K}_L]$ 、 $[\mathbf{K}_R]$ を求めることに帰着する。波動の伝播方向に一樣な半無限場の伝達境界はLysmerら⁵⁾によって提案され、現在広く用いられている。一方、周期構造系に対するものは、小自由度の単純な系に対し文献5)と同様の手法を適用した例があるのみである⁶⁾。ここでは、有限要素法などの汎用離散化手法の下に与えられる多自由度系に適用可能な一般的手法を構成する。

図2に示すような、図1の周期部のみで構成される無限系を与える。ここで、外力としては、図1の接合点 L または R に相当する節点における単一加振を考える。この外力に対する結合点での節点変位と内部節点力を $\{\mathbf{U}_i\}$ 、 $\{\mathbf{F}_i\}$ と置く。なお、内部節点力は L 点の場合、加振点を右端に持つ要素で、 R 点の場合は左端に持つ要素でそれぞれ求めるものとする。同様の解析を、接合点の全ての節点力成分 i に関する

単一加振に対して行う。この結果求められた $\{\mathbf{U}_i\}$ 、 $\{\mathbf{F}_i\}$ を並べて得られる行列を $[\mathbf{U}]$ 、 $[\mathbf{F}]$ と定義する。これにより、左右端の伝達境界に関する行列 $[\mathbf{K}_L]$ 、 $[\mathbf{K}_R]$ が次式により陰的に与えられることとなる。

$$[\mathbf{K}_L][\mathbf{U}_L] = [\mathbf{F}_L], \quad [\mathbf{K}_R][\mathbf{U}_R] = [\mathbf{F}_R] \quad (4)$$

式(4)を $[\mathbf{K}_L]$ 、 $[\mathbf{K}_R]$ について解くことで、当該行列を得る。

3.2 Floquet 変換による解析

前述のとおり、 $[\mathbf{K}_L]$ 、 $[\mathbf{K}_R]$ の計算は無限周期構造の加振応答解析によりなされることとなる。当該解析にFloquet変換を用いる。以下にその概要を述べる。

x 方向の無限域で定義された関数 $f(x)$ の、ある基準長 L におけるFloquet変換 \tilde{f} は次式で与えられる⁷⁾。

$$\tilde{f}(\bar{x}, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\bar{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (5)$$

ここで、 \bar{x} と κ はそれぞれ $-L/2 \leq \bar{x} \leq L/2$ 、 $0 \leq \kappa \leq 2\pi/L$ における実数であり、 κ をFloquet波数と呼ぶ。 \tilde{f} は \bar{x} について次のような周期性（第2種周期性）を有する。

$$\tilde{f}(\bar{x} + L, \kappa) = e^{-i\kappa L} \tilde{f}(\bar{x}, \kappa) \quad (6)$$

式(5)の特性により、周期長 L の無限周期構造における力学問題は、それを構成する1ユニットセルにおける力学問題に帰着して解くことができる。

$$\mathcal{L}(\bar{x})\tilde{u}(\bar{x}, \kappa) = \tilde{f}(\bar{x}, \kappa) \quad (7)$$

ここで、 \mathcal{L} は当該力学問題の支配方程式における微分演算子、 \tilde{u} 、 \tilde{f} は変位と外力のFloquet変換である。

式(7)の \tilde{u} に第2種周期条件を課して解くことで、 $\tilde{u}(\bar{x}, \kappa)$ を求めることができる。変位 $u(x)$ は次の逆Floquet変換により与えられる。

$$u(x) = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \tilde{u}(\bar{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (8)$$

以上の手順により、無限周期構造の加振応答解析がなされる。

3.3 逆 Floquet 変換の処理

式(8)の逆Floquet変換はFloquet波数域での積分計算により実行される。減衰系の様に \tilde{u} が波数一周波数空間で特異点を持たない場合、当該積分はFFTにより効率的に処理が可能である。しかし、無減衰系の場合、図2の無限場において、無限遠まで伝播して行く波動モードが存在するため²⁾、 $\kappa - \omega$ 空間の分散曲線上に特異点が分布することとなる。この特異性は一般に $1/\kappa$ のオーダーであるため、通常の積分では評価できない。ここでは κ の積分域を実数軸から複素平面に拡張し、積分区間における特異点（極）を迂回する方法を採った。なお、詳細については文献4)を参照されたい。

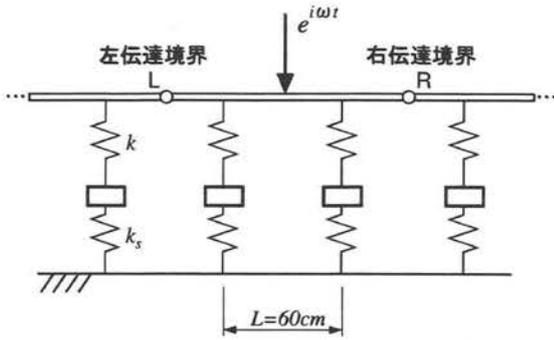


図 3 無限周期軌道の単位調和加振問題

4. 解析例

4.1 無限周期軌道の加振解析

図 3 に示す無限周期軌道の単位調和加振問題の解析に、本手法を適用した。当該軌道は完全な周期性を有しているため、本来伝達境界を設定しなくても、Floquet 解析のみで求解可能となる。ここでは、提案手法の妥当性を確認する目的で本問題を解析対象に選んだ。レールは 50N レールとし、まくらぎ質量を 80kg(レール 1 本当たり)、支持点におけるバネ定数 $k, k_s=60\text{MN/m}$ とした。また、解析においてレールは Euler ばりによりモデル化し、1 支間 ($L=60\text{cm}$) を 16 要素分割した。なお、減衰は一切考慮していない。

図 3 の L, R 両端点に伝達境界を設け、その内側を上述のように離散化して周波数応答解析を実施した。Floquet 解析により無限周期軌道の調和加振問題を直接計算した結果と合わせ図 4 に示す。図は、周波数 (0 ~ 500Hz) と加振点たわみ応答の実部との関係を示したものである。当然のことながら、両者は完全に一致しており、本手法が有効に機能していることを確認することができる。

当該軌道における波動伝播モードの分散曲線を文献 2) と同様の手法により求めたものを図 5 に示す。この図より、図 4 のたわみ応答に認められる共振点は、当該軌道における分散曲線のバンド端における定在波モードに対応していることがわかる。なお、110Hz 付近の共振点はまくらぎが大きく振動するモードに、275Hz 付近の共振点はまくらぎは殆ど振動せず主にレールが大きく振動するモードにそれぞれ対応している²⁾。

次に通常に加振周波数応答解析による結果を図 6 に示す。なお、ここではレールを 30 スパンの有限長で打ち切っている。図 4 の応答結果と異なり非常に多くの共振点が存在しており、無限長軌道における応答を全く再現できていないことがわかる。なお、有限長モデルによる従来解析法では、軌道の打ち切り長を長くとる程複雑な応答を示し、無限長モデルとの差異が拡大する傾向が認められた。このことより、モデルの長大化が本質的解決になり得ないことが窺える。

4.2 レール継目部の加振応答解析

図 7 に示す継目部の加振問題に本手法を適用した。なお、解析における軌道部の各種物性値は表 1 のように設定した。継目部前後のまくらぎ 3 本を含む有限領域の両端に図 7 のように伝達境界を設けた。それより左右外側の軌道は半無

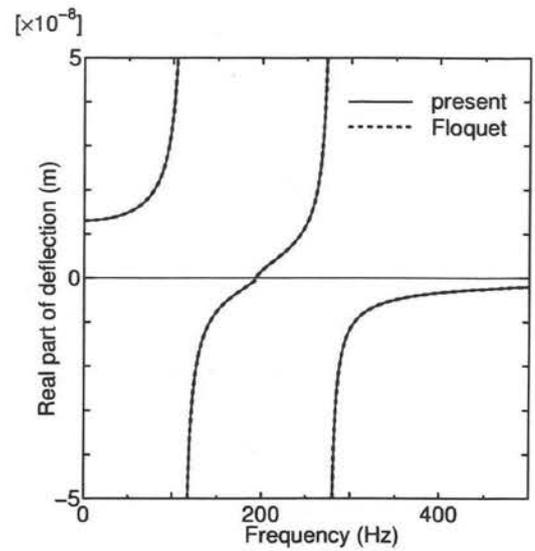


図 4 加振点たわみの周波数応答 (無限周期構造)

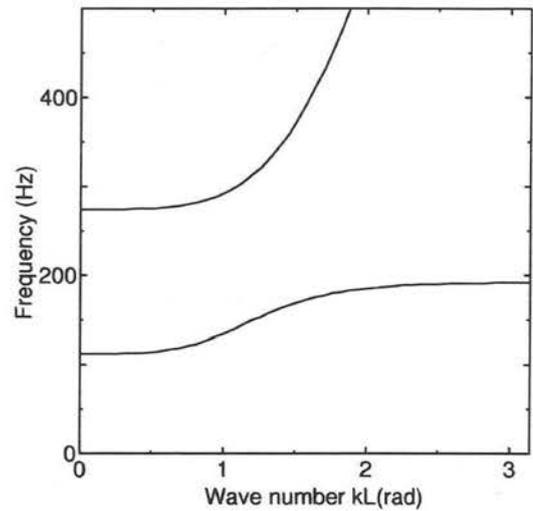


図 5 無限周期軌道の波動分散曲線

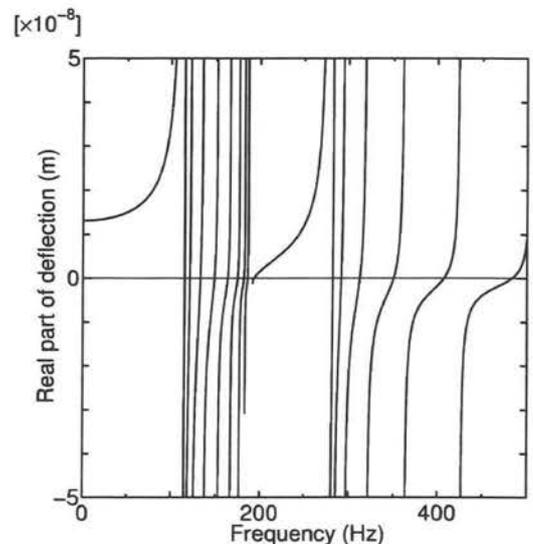


図 6 加振点たわみの周波数応答 (有限長モデル)

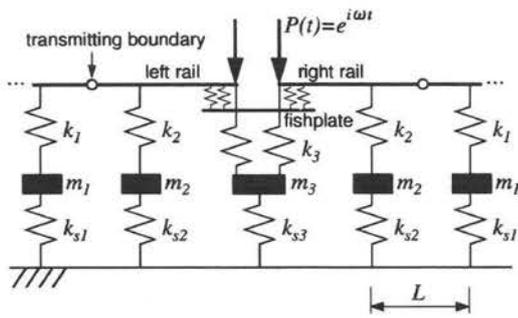


図 7 レール継目の加振問題

表 1 継目を有する軌道モデルの解析条件

k_1	MN/m	110
k_2	MN/m	47.3
k_3	MN/m	35.5
k_{s1}	GN/m	10
k_{s2}	MN/m	133.3
k_{s3}	MN/m	200
m_1	kg	80
m_2	kg	43.75
m_3	kg	117.58

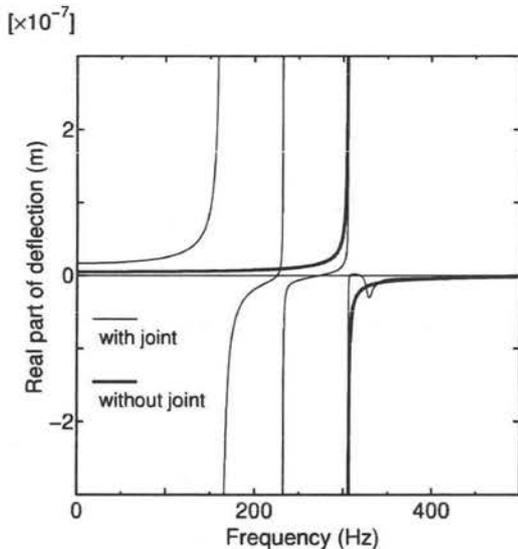


図 8 レール継目における加振点たわみの周波数応答

限周期構造を有するものとした。

加振周波数と加振点 (継目部) におけるレールたわみ応答の実部との関係を図 8 に示す。なお、比較のため図には無限周期軌道の加振応答も示した。継目の導入により、300Hz 付近の共振点の他に、160Hz と 230Hz 付近にも新たな共振点が発生していることがわかる。

次に、レールを 30 スパンで打ち切った有限長モデルによる解析結果を図 9 に示す。4.1 の解析結果と同様に、有限長レールでは軌道系の卓越振動特性を適切に捉えられてお

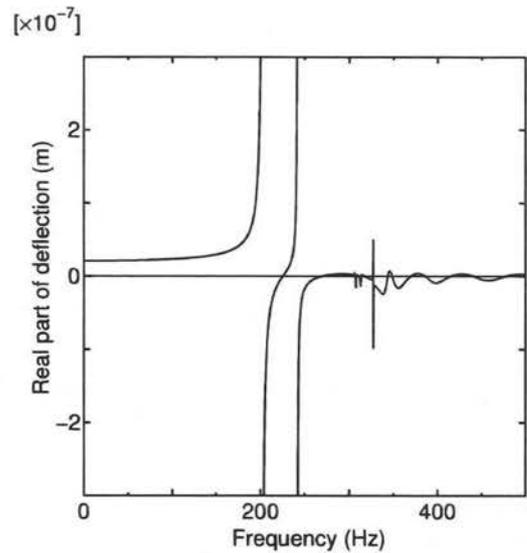


図 9 レール継目における加振点たわみの周波数応答 (有限長モデル)

らず、打ち切り端の存在が結果に大きく影響していることがわかる。

5. おわりに

無限周期軌道に対する伝達境界を、Floquet 解析法に基づき構成した。また、それを用い、一部に非周期構造を含む無限軌道の加振応答解析を試みた。解析例を通し、構成手法の妥当性を確認することができた。さらに、有限長モデルによる従来解析手法との比較を行い、無減衰系の解析による卓越応答評価には、無限長軌道の適切な考慮が不可欠であり、本手法が有効となることが確認できた。

参考文献

- 1) 阿部和久, 古田 勝: 時間域積分表現式による軌道振動解析法, 構造工学論文集, Vol.43A, 365-372, 1997.
- 2) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, Vol.10, 1029-1036, 2007.
- 3) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析, 計算数理工学会論文集, Vol.7, No.1, 25-30, 2007.
- 4) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造における表面波モード解析手法, 応用力学論文集, Vol.11, 1031-1038, 2008.
- 5) Lysmer, J. and Waas, G.: Shear waves in plane infinite structures, Proc. ASCE, EM.98, 85-105, 1972.
- 6) 李 相勲, 田邊忠顕: 3 自由度はり要素モデルを用いた離散系における伝達境界の定式化, 土木学会論文集, No.745, 25-38, 2003.
- 7) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D.: Periodic BEM and FEM-BEM coupling, Comput. Mech., Vol.25, 567-577, 2000.