有限要素法に基づく架線・パンタグラフ系の運動シミュレーション（基本的な定式化）

○［機］池田　充

On the Formulation of Finite-Element Method for Pantograph-Catenary Dynamic Interaction

○Mitusuru IKEDA　(Railway Techniacal Research Institute)

It is important to evaluate dynamic behavior of pantograph and overhead catenary system in estimating its contact performance. The numerical simulation has been used in parallel with the theoretical analysis and the experiment. The authors are developing a new simulation technique based on the finite element method, while currently-used simulation technique is based on the difference method. This paper reports on the formulation of the new simulation method and its validation result.

キーワード：電気鉄道，集電，架線，パンタグラフ，シミュレーション，有限要素法

Key Words：Electric railway, Current collection, Pantograph, Simulation, Finite-element method

1．はじめに

架線・パンタグラフ系の性能を評価する上で，その動的挙動を調べることは非常に重要である．そのためのツールとして，理論解析，実験とならんで数値シミュレーションが古くから用いられてきた．

日本では，1960年代後半に東京大学の藤井，江原らによって差分法に基づく架線・パンタグラフ系の動的シミュレーション手法が開発され[1]，様々な改良を加えながら今日に至っており[2]，架線・パンタグラフ系の性能向上に大きな貢献を果たしてきた．また，開発当初は大型計算機でしか取り扱うことができなかったが，その後の目覚ましい計算機の性能向上により，パソコン上で動作するバージョンも開発され[3]，現在では鉄道会社の担当者が自分で数値シミュレーションを実施できる環境になっている．

しかしながら，このシミュレーション手法は差分法を基本としているため，線条や架線金具など系の構成要素をモデル化する際には個別に定式化を行う必要がある．そのため，カテナリ式剛体架線のような新しいタイプの架線形式への対応や3次元計算への変更などが煩雑であった[4]．また，架線の静構造計算については，曲げ剛性を無視して2次関数によって線条の変位を近似し，支持点高さやハンガ下点高さなどの境界条件を与えて各線条の静高さを求めているため，カテナリ式剛体架線のように曲げ剛性の影響が強く表れる架線構造には適用することができなかった．

そこで筆者らは，差分法ではなく有限要素法に基づいた架線・パンタグラフ系の運動シミュレーション手法の開発を進めている．本報では，有限要素法に基づいた架線の定式化方法について報告する．

2．基礎方程式

2.1 線条の基礎方程式

以下では，架線種別をシンプルカテナリ架線として定式化の説明を行うが，その他の架線形式でも取扱いは同様である．

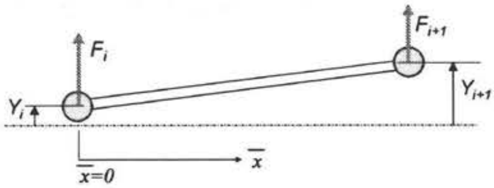
架線を構成する線条の基礎方程式として，以下に示す曲げ剛性を考慮した波動方程式を用いる．

$$\rho\ddot{y} + EIy'''' - Ty'' = f(x,t) \tag{1}$$

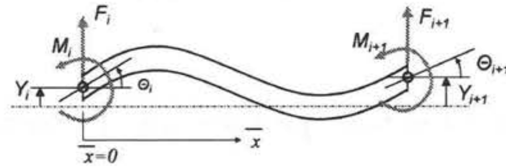
ただし $y(x, t)$は水平方向座標xにおける線条の上下変位，ρは線条の線密度，EIは線条の曲げ剛性，Tは線条の張力，fは外力である．この方程式は各断面に平面保持の仮定が当てはまる場合に成り立つ近似式（Euler 梁）であるが、架線のようにたわみ角の小さな場合には、各線条を Euler 梁と仮定しても実用上十分な精度で解が得られる。

2.2 有限要素モデルの導入による基礎方程式の離散化

従来のシミュレーションでは，線条を集中質量モデルに(図 1(a))よって表現し，上記方程式を差分法により離散化する．これに対して有限要素法では離散的に定義した節点



(a) 線条の集中質量モデル



(b) 線条の有限要素モデル(Euler 梁モデル)

図1 線条のモデル化

の変位によって線条の変位を表現する．ここでは図1(b)に示すEuler梁を仮定し，$\bar{x}$ を有限要素上の水平方向局所座標と定義すると，線条各点の上下変位 $y(\bar{x},t)$ は節点ベクトル $y_i=(Y_i, \theta_i)^T$ によって次式のように近似できる．

$$y(\bar{x},t)=[\Psi_1(\bar{x})\quad \Psi_2(\bar{x})\quad \Psi_3(\bar{x})\quad \Psi_4(\bar{x})]\begin{bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ Y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

ただし Ψ_i $(i = 1\sim4)$ は形状関数であり，ここでは3次のHermite多項式を適用する．

有限要素法では，連続体に対する方程式(1)を節点ベクトル y_i と各節点に作用する外力ベクトル $F_i=(F_i, M_i)^T$ により表現される離散的な方程式により近似する．そのため，有限要素に対して仮想変位の原理を適用し，式(1)の各項について節点ベクトルと外力ベクトルとの関係をあらかじめ求める必要がある．たとえば，式(1)の左辺第2項は曲げ剛性により生じるせん断力と外力とつりあいを示す項であるから，節点変位に作用する外力がなす仕事と曲げ剛性によって生じるせん断力がなす仕事とが等しいとおけば，次式により F_i と y_i との間の係数行列(曲げ剛性による剛性行列)を決定できる．

$$\mathbf{K}_{\mathrm{EI}\,ij}=\int_0^{\Delta L} EI(\bar{x})\Psi_i''(\bar{x})\Psi_j''(\bar{x})d\bar{x} \quad (i,j=1..4) \tag{3}$$

このようにして，最終的には次式の離散方程式を得る．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{K}_{EI}\mathbf{y}-\mathbf{K}_T\mathbf{y}=\mathbf{F} \tag{4}$$

ただし $\mathbf{M}$ は整合質量行列，$\mathbf{K}_\mathrm{T}$ は整合形状剛性行列である．

2.3 パンタグラフモデル

本研究の主目的は架線の定式化に対して有限要素モデルを導入することにある．そこで今回は，パンタグラフモデルとして従来より用いられているばね・質点モデルを使用する．たとえば，2元系パンタグラフの場合，パンタグラフの力学モデルは次式で表現する(図2).

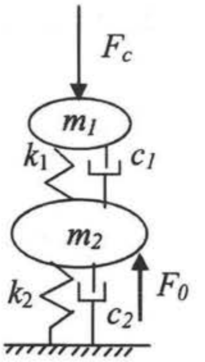


図2 パンタグラフモデル（2元系）

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} +\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -F_c \\ F_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

ただし，m_1, m_2 はそれぞれ舟体と枠組の等価質量，k_1, k_2 はそれぞれ復元ばねと主ばねの等価ばね定数，c_1, c_2 はそれぞれ復元ばねとパンタグラフダンパの減衰係数，F_0 は静押上力，F_c は接触力である．

2.4 架線とパンタグラフの連成

パンタグラフが摺動したときの架線・パンタグラフ系の動的挙動は，式(4)と式(5)を与えられた境界条件のもとで連立させて解く．境界条件とは，吊架線の支持点変位，および各線条の両端の変位である．

いま，時刻 t においてパンタグラフが位置 x_p にあるとき，この位置におけるトロリ線の鉛直変位を $y_t(t, x_p)$ と表すと、パンタグラフ最上部の質点と架線との間には以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} y_1 &= y_t \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_t \\ \ddot{y}_1 &= \ddot{y}_t \\ \mathbf{F_c} &= \mathbf{Q}F_c \end{aligned} \quad (\text{着線時}) \tag{6}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} y_1+g_c &= y_t \\ \mathbf{F_c} &= \mathbf{Q}F_c=\mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{離線時}) \tag{7}$$

ここで g_c はパンタグラフの最上部節点とトロリ線との鉛直方向距離である．なお，Q は以下に示すように形状関数で定義されるベクトルである．

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \Psi_1(\overline{x_p}) \\ \Psi_2(\overline{x_p}) \\ \Psi_3(\overline{x_p}) \\ \Psi_4(\overline{x_p}) \end{bmatrix} \tag{8}$$

ただし $\bar{x}_p$ はパンタグラフの着力点位置を有限要素の局所座標で表したものである。

さらに，パンタグラフ位置 x_p におけるトロリ線変位 y_t は，パンタグラフと接しているトロリ線要素の節点変位ベ

クトル $\mathbf{y_c}=(Y_j, \theta_j, Y_{j+1}, \theta_{j+1})^T$ に対して次式により関係づけられる.

$$y_t = \mathbf{Q}^T \mathbf{y_c} \tag{9}$$

したがって，パンタグラフが架線と着線している場合には式(6)と式(8)から次式が拘束条件として与えられる.

$$y_1 = \mathbf{Q}^T \mathbf{y_c} \tag{10}$$

式(4)と式(5)に対してこの拘束条件式を付加するとともに、接触力 F_c を未知量として導入したうえで，境界条件のもとで連立して解けば，架線とパンタグラフの動的挙動が求められる．一方，パンタグラフが架線から離線した場合には接触力を 0 で与えたうえで，式(4)と式(5)を連立しないで解けばよい.

なお，式(10)に対して

$$\dot{y}_1 \neq \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{c} \tag{11}$$

であることに注意が必要である．なぜなら、パンタグラフの最上部要素はトロリ線要素に沿って水平方向に移動しているためであり，この場合には

$$\dot{y}_1 = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{c} + v\mathbf{Q}'^T \mathbf{y_c} \tag{12}$$

を与える必要がある．同様に

$$\ddot{y}_1 = \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{c} + 2v\mathbf{Q}'^T \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{c} + v^2\mathbf{Q}''^T \mathbf{y_c} \tag{13}$$

を与える.

3．方程式の数値解法

方程式の数値解法には種々の方法があるが，ここでは陰解法の一つである Newmark の β 法を用いる．この方法では，時間ステップ k における変位ベクトルを $\boldsymbol{d_k}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{d}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{d}}_k + (1-\gamma)\ddot{\mathbf{d}}_k \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{k+1}\Delta t \\
\mathbf{d}_{k+1} &= \mathbf{d}_k + \dot{\mathbf{d}}_k \Delta t + (1/2-\beta)\ddot{\mathbf{d}}_k \Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{d}}_{k+1}\Delta t^2 \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{k+1} &+ \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1}
\end{aligned} \tag{14}$$

によって k+1 ステップ目の挙動を求める．なお，$\mathbf{C}$ は系の減衰能を表す行列である．γ，β は任意パラメータであるが，γ については 0.5 以外を与えると γ-1/2 の大きさの見かけ上の減衰が生じていることになるため，ここでは γ=0.5 とおく．また，β については 1/4 以上の値を与えれば絶対安定となる.

ただし，パンタグラフと架線が着線している場合と離線している場合とがあるので注意が必要である．特に，k ステップ目においてパンタグラフが離線状態にあり，k+1 ステップ目では着線状態となる場合，式(14)で使用する系の支配方程式を 2.4 節で述べた方法に従って単純に切り替えると，k ステップ目においてすでにパンタグラフの最上部節点がトロリ線と同一変位，同一速度，同一加速度であったと見なして解いていることになるため，その影響によって解に無視できない誤差が生じる可能性がある．そこで，着線時の挙動を表現する方法としてペナルティ法を適用する．これは架線とパンタグラフとの間に仮想的な接触ばね，接触ダンパを設けることに相当する．すなわち，接触力を次式により表現する.

$$F_c = -\alpha(\mathbf{Q}^T \mathbf{y}_c - y_1) - \beta(\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{y}}_c + v\mathbf{Q}'^T \mathbf{y}_c - \dot{y}_1) \tag{15}$$

ただし

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{x}_c - y_c > 0 \quad \text{のときは} \quad \alpha = 0$$
$$\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{x}}_c + v\mathbf{Q}'^T \mathbf{x}_c - \dot{y}_c > 0 \quad \text{のときは} \quad \beta = 0$$

なお，α，β はペナルティ係数である．ただし、ペナルティ係数の値については十分な検討が必要である．また，k+1 ステップ目で着線状態に移行した後もそのまま式(15) を用いる方法も考えられるが、物理的な根拠があいまいなペナルティ係数を使用し続けることは望ましくないと思われるため，k+2 ステップ目については式(10)の拘束条件を与えて解くこととする.

3．架線の静構造計算

架線の静構造解析は，線条に加わる重力を外力として与えるとともに，吊架線の支持点高さを境界条件として与え，架線を構成する各線条の静的変位を式(4)から直接計算する．その際，ちょう架線の支持点高さとハンガ長さを与えて架線の静高さを求める方法と，ちょう架線の支持点高さとトロリ線のハンガ下点高さを与えて架線の静高さを求める方法とがある．前者はトロリ線のハンガ下点高さと吊架線のハンガ点高さとの間に幾何学的拘束条件を与えて解くことになり，後者ではハンガ軸力を未知数として導入するかわりにハンガ下点高さを境界条件として与えて解くことになる.

図 3 は後者の方法により求めたシンプルカテナリ架線(吊架線 St90，トロリ線 GT110，張力はともに 9.8kN）の静高さである．図 2 に，ハンガ間のトロリ線のディップを拡大して示すとともに，曲げ剛性を無視した従来の計算プ

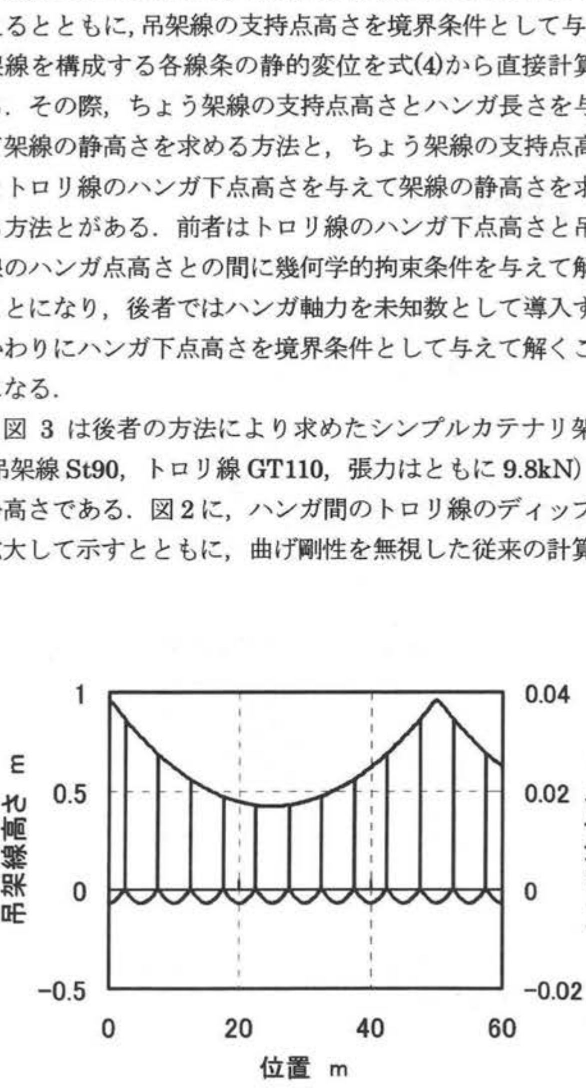


図 3 シンプルカテナリ架線の静高さ

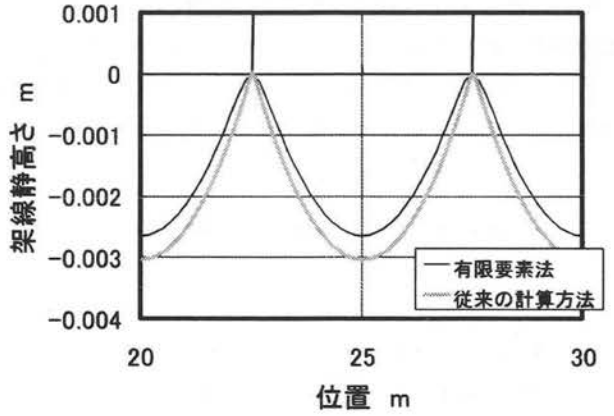


図4　トロリ線の静高さ（拡大図）

ログラムで計算した結果も合わせて示す．従来のプログラムでは既述のとおり線条の曲げ剛性を無視して計算を行っているため，ハンガ点でトロリ線が鋭角に折れ曲がる．そのため，曲げ剛性を考慮して求めた有限要素法による解析結果に対してハンガ間のディップを約 15%過大評価していることがわかる．一方ハンガの長さは，曲げ剛性を考慮しない従来の方法による計算結果は，曲げ剛性を考慮した有限要素法による計算結果よりも約 8mm 程度長い値となる．しかし，これは第 1 ハンガから第 10 ハンガまで同様であるため，従来の方法によりハンガ長さを求め，これに基づいて架線を実際に構成しても，トロリ線静高さは8mm程度低くなるものの，ホグやサグとなる恐れはない．

4. 動的挙動解析

今回示した計算手続きの妥当性を検証するため，過去に十分な検証が行われている従来の差分法に基づくシミュレーション結果と比較を行った．解析対象とした架線・パンタグラフ系を表 1 および表 2 に示す．

表1　架線の諸元

	線種	線密度 kg/m	張力 N	曲げ剛性 Nm^2	減衰係数
トロリ線	GT110	0.9877	9800	300	1×10^{-2}
吊架線	St90	0.697	9800	0	5×10^{-2}

表2　パンタグラフの諸元

m_1	10kg
m_2	10kg
k_1	10000N/m
k_2	0
c_1	10Ns/m
c_2	80Ns/m（両効き）

ただし，有限要素法では架線の減衰を比例減衰として与えており，吊架線では

$$\mathbf{C} = 0.005\mathbf{M} + 0.005(\mathbf{K}_{EI} + \mathbf{K}_T) \tag{16}$$

トロリ線では

$$\mathbf{C} = 0.001\mathbf{M} + 0.001(\mathbf{K}_{EI} + \mathbf{K}_T) \tag{17}$$

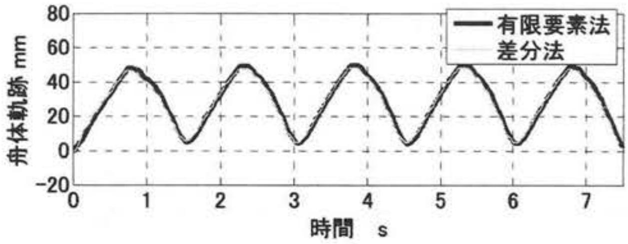


図5　パンタグラフの舟体軌跡

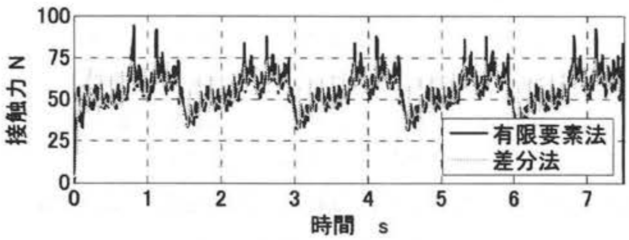


図6　接触力の時刻歴波形

とした．また，架線は 50m 径間 5 スパンとし，1 個のパンタグラフが 120km/h で走行するものとした．なお，有限要素法，差分法のいずれについても節点間隔（差分法では質点間隔）は 0.5m とした．

図 5 にパンタグラフの舟体軌跡を，図 6 に接触力の軌跡を，それぞれ示す．これより，有限要素法に基づく解析結果は従来の差分法による計算結果とよく一致していることがわかる．したがって，ここで示す計算手続きは妥当なものであると考える．

5. まとめ

架線・パンタグラフ系の運動シミュレーション手法として，従来用いてきた差分法ではなく，有限要素法に基づいた計算方法について提案するとともに，その検証を行い，その妥当性を示した．

ただし，離線発生時における取り扱いの検証はいまだ不十分であり，今後検証を進めていきたい．また，要素サイズの設定方法や減衰の取り扱いなどについても検討を進めていく予定である．

参考文献

1) 江原信郎：高速集電の動力学研究（第 1 報，高速集電系のモデルとその検討），日本機械学会論文集(第 1 部)，36 巻 287 号，pp.1067-1074，1970
2) 網干光雄：動特性計算による架空電車線凹凸の評価法，電気学会論文誌(D 部門)，Vol.126，No.7，pp.983-988，2006
3) 真鍋克士：架線・パンタグラフ系の運動シミュレーション，平成 7 年電気学会産業応用部門全国大会，1995
4) 網干光雄，大浦泰：地震時における電車線路の運動シミュレーション手法，平成 20 年電気学会産業応用部門大会，2008