バラスト道床の弾塑性連続体モデル化に基づいた3次元繰り返し変形解析

[土] 紅露一寛 (新潟大学), ○ [土] 福津佑太 (新潟大学), [土] 阿部和久 (新潟大学)

3-D FE analysis of cyclic vertical loading tests of railway ballasted track using subloading surface model

Kazuhiro KORO (Niigata University), Yuta FUKUTSU (Niigata University), Kazuhisa ABE (Niigata University)

The 3-D simulation of cyclic vertical loading tests of a full-scale railway ballasted track is attempted using the finite element method (FEM). The ballast layer is modeled as the continuum body of which the elastoplastic behavior is described by the subloading surface model with rotational hardening. The variation tendency in the relation between the vertical displacement of the bottom of the sleeper and vertical load can be simulated using the present FE model. The simulated permanent displacement is comparable to those of test results. The large plastic strain extends from the edge of the sleeper to the bottom of the ballast layer; the frictional sliding zone can be found in the ballast layer.

キーワード: 有道床軌道, 道床沈下, 3次元繰り返し変形解析, 下負荷面モデル

Key words : *ballasted track, ballast settlement, 3-D cyclic deformation analysis, subloading surface model*

1. はじめに

現在, わが国において広く用いられているバラスト道床には, 列車の繰り返し走行に伴い残留変位が累積し, 道床上面の沈下・不整による軌道狂いを引き起こす. これは列車の安全性・快適性を損ねるものであり, 重要な保守項目となっている. 道床の沈下現象は, 専ら道床部を構成するバラスト粒子の再配置によって生じたものであることは明らかである. しかし, 対象が粒径数センチ程度の砕石粒子の集合体であることもあって実験・解析ともに困難が多く, 道床内部の3次元的な変形機構は未解明な点が数多く残されている.

特に, 道床内部の運動状態の評価を目的として, 不連続変形法 (DDA)[1]や個別要素法 (DEM)[2),3]などによる不連続体解析が試みられている. 一方, 著者らは道床沈下量予測手法の構築を目指し, これまで弾塑性連続体としてモデル化する方法の実用化に取り組んできた. 検討の第一段階として, 繰り返し三軸試験結果との比較を通し, hypoplasticモデルや下負荷面モデルの適用可能性について検討してきた[4),5].

そこで本研究では, 回転硬化を考慮した下負荷面モデル[6]をバラスト道床部の弾塑性構成モデルに採用し, 有道床軌道の繰返し変形解析を試みる. 石川らによる実物大試験軌道に対する繰返し載荷試験[7]との比較を通して, その有効性や適用可能性について検討する.

2. 構成モデル

本研究では, バラスト道床部を連続体とみなし, その弾塑性挙動を回転硬化を考慮した下負荷面モデル[6]を用いて表現する. 当該モデルでは, 弾塑性変形における許容応力空間を規定する降伏曲面 (正規降伏面) を定めた上で, 現応力点を通りそれと相似な曲面 (下負荷面) を定義し, 塑性負荷・除荷状態の判定および塑性流動を規定するのに用いる.

2.1 亜弾性構成則

本研究で採用する構成モデルでは, 応力速度とストレッチング (ひずみ速度) との間に亜弾性関係を仮定する. まず, ストレッチング (ひずみ速度) は, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p$ のように, 弾性成分 $\boldsymbol{D}^e$ と塑性成分 $\boldsymbol{D}^p$ との加算分解が可能であると仮定する. また, 今回は微小変形を仮定することで, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{D} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}$: 微小ひずみテンソル) とみなし, 応力速度・ストレッチング関係を次式で与える.

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(D_{kl} - D^p_{kl}), \tag{1}$$

ここで, 弾性係数テンソル E_{ijkl} は体積弾性係数 K, せん断弾性係数 G, 静水圧応力 p を用いて圧力依存性を有する形で次のように与える.

$$\begin{gathered} E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ K = \frac{p + p_{num}}{\gamma}, \quad G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K, \quad p = -\frac{\sigma_{kk}}{3}, \end{gathered} \tag{2}$$

なお, ν は Poisson 比, γ は材料定数, p_{num} は圧力ゼロのときの剛性を与えるためのパラメータ, δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

2.2 回転硬化を考慮した下負荷面モデル

下負荷面モデルは, 塑性ストレッチング $\boldsymbol{D}^p$ を与えるために導入する. まず, 許容応力空間を定めるために, 次式で表される正規降伏面を定義する.

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\beta}) = F(H), \quad F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right), \tag{3}$$

ここで, H, $\boldsymbol{\beta}$ はそれぞれ等方硬化変数, 回転硬化変数, F, F_0 は等方硬軟化関数その初期値, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は正規降伏面上の応力, ρ, γ は材料定数である.

次に，正規降伏面 (3) に対し，収縮率 R で相似である曲面を下負荷面と定義し，次式で与える．

$$f(\bar{\sigma},\beta)=RF(H), \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{s}$ は相似中心応力，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(1-R)\boldsymbol{s}$ を正規降伏面上の応力零の点に対応する下負荷面上の共役点として，下負荷面上の応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は次式で与える．

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}\equiv\boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{5}$$

各変数の発展則は次のように表される．

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}}=b_r\left\|\boldsymbol{D}^{p*}\right\|\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|\bar{\boldsymbol{\eta}}_b,\\
&\overset{\circ}{\boldsymbol{s}}=c\left\|\boldsymbol{D}^p\right\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{1}{F}\left\{\dot{F}-\mathrm{tr}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}}\right)\right\}\boldsymbol{s},\\
&\dot{R}=U(R)\left\|\boldsymbol{D}^p\right\|\quad(\boldsymbol{D}^p\neq\boldsymbol{O}),\\
&\dot{H}=D^p_v+\mu\left\|\boldsymbol{D}^{p*}\right\|(m_d-\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|}{p}),\\
&\overset{\circ}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}=\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}-(1-R)\overset{\circ}{\boldsymbol{s}}+\dot{R}\boldsymbol{s}.
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{D}^{p*}$ は $\boldsymbol{D}$ の偏差成分，$D^p_v=\mathrm{tr}\boldsymbol{D}^p$ であり，

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{\eta}}=\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\bar{p}}-\boldsymbol{\beta},\ \ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\equiv\bar{\boldsymbol{\sigma}}+\bar{p}\boldsymbol{I},\ \ \bar{p}=-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{\sigma}},\\
&\bar{\boldsymbol{\eta}}_b=\bar{m}_b\frac{\bar{\boldsymbol{\eta}}}{\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|}-\boldsymbol{\beta},\ \ \bar{m}_b=f_m\left(\sin3\bar{\theta}_\sigma;\phi_b\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_d=f_m(\sin3\theta_\sigma;\phi_d),\ \ \sin3\theta_\sigma\equiv-\sqrt{6}\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^{*3}}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^3},\\
&f_m(\sin3\theta_\sigma;\phi)=\frac{2\sqrt{6}\sin\phi}{3\left\{1+a\left(1-\sin^2 3\theta_\sigma\right)\right\}-\sin\phi\sin\theta_\sigma},\\
&c=\frac{c_1}{R^{c_3}}\exp\left(c_2\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{N}}\right),\ \ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{s},\\
&\dot{F}=-\frac{F}{\rho-\gamma}\dot{H},\ \ U(R)=u_1(1/R^{u_2}-1),
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．なお，b_r，μ，ϕ_b，ϕ_d，c_1，c_2，c_3，u_1，u_2 は材料定数である．

流動則は，関連流動則を採用する．$\bar{\boldsymbol{N}}$ は下負荷面の外向き単位法線ベクトル，λ は正値の比例定数として，

$$\boldsymbol{D}^p=\lambda\bar{\boldsymbol{N}}, \tag{8}$$

$$\bar{\boldsymbol{N}}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial f(\bar{p}_s,\bar{\chi}_s)}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\ \ \varphi=\left\|\frac{\partial f(\bar{p}_s,\bar{\chi}_s)}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\|, \tag{9}$$

$$\lambda=\frac{\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D})}{\mathrm{tr}(D_p+\bar{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{N}})}, \tag{10}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
D_p\equiv\ &\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{a}})\\
&+\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\sigma}})\left\{\frac{F'}{F}h-\frac{1}{RF}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial f(\bar{\sigma},\beta)}{\partial\beta}\boldsymbol{b}\right)+\frac{U}{R}\right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{a}}\equiv=(1-R)\boldsymbol{z}-U\boldsymbol{s},\ \ \boldsymbol{b}=\frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}}}{\lambda}=b_r\left\|\bar{\boldsymbol{N}}^*\right\|\|\bar{\boldsymbol{\eta}}\|\bar{\boldsymbol{\eta}}_b,\\
&\boldsymbol{z}\equiv\frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{s}}}{\lambda}=c\tilde{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{1}{F}\left\{F'h-\mathrm{tr}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{b}\right)\right\}\boldsymbol{s},\\
&\bar{\boldsymbol{N}}^*\equiv\bar{\boldsymbol{N}}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{I}.
\end{aligned} \tag{12}$$

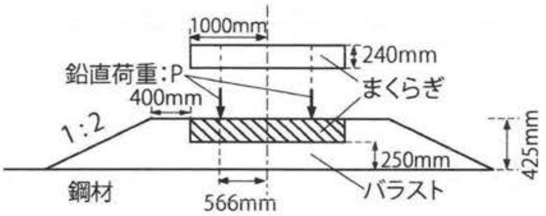

図1　試験軌道の概略図．

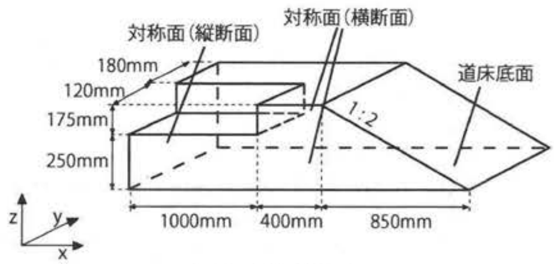

図2　解析領域．

また，塑性負荷状態の判定は，次式を用いて行なう．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}^p\neq\boldsymbol{0}:&\quad\bar{N}_{ij}E_{ijkl}D_{kl}>0,\\
\boldsymbol{D}^p=\boldsymbol{0}:&\quad\bar{N}_{ij}E_{ijkl}D_{kl}\leq0,
\end{aligned} \tag{13}$$

3.　つりあい問題の定式化

本研究では，準静的条件下でのつりあい問題を考える．仮想仕事式が時刻 $t=t_{n+1}$ で成り立つものとして，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\sigma^{(n+1)}_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega\\
&\quad=\int_{\Gamma_t}\bar{t}^{(n+1)}_i\delta u_i d\Gamma+\int_\Omega\bar{b}^{(n+1)}_i\delta u_i d\Omega,
\end{aligned} \tag{14}$$

ただし，δu_i は仮想変位，$\delta\varepsilon_{ij}$ は仮想ひずみであり，$\bar{t}_i$, $\bar{b}_i$ はそれぞれ作用表面力・物体力であり，Ω は領域，Γ_t は表面力規定部分境界である．

式 (14) において，応力積分を陽解法で処理すると，次の方程式を得る．

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\delta\varepsilon_{ij}E^{(ep)}_{ijkl}(t_n)\Delta\varepsilon^{(n+1)}_{kl}d\Omega=&\int_{\Gamma_t}\bar{t}^{(n+1)}_i\delta u_i d\Gamma\\
&+\int_\Omega b^{(n+1)}_i\delta u_i d\Omega-\int_\Omega\sigma^{(n)}_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega
\end{aligned} \tag{15}$$

なお，$\Delta\varepsilon^{(n+1)}_{kl}=\varepsilon^{(n+1)}_{kl}-\varepsilon^{(n)}_{kl}$ とし，$E^{(ep)}_{ijkl}$ は次式で与えられる．

$$E^{(ep)}_{ijkl}=E_{ijkl}-\frac{(E_{ijrs}\bar{N}_{rs})\cdot(\bar{N}_{pq}E_{pqkl})}{D_p+\bar{N}_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{N}_{\gamma\delta}} \tag{16}$$

本研究では式 (15) を有限要素法を用いて解く．

4.　実物大試験の繰り返し変形解析

4.1　解析条件

本研究では，実物大バラスト有道床軌道を対象とした繰返し載荷試験[7]を解析対象とした．この試験では，**図1** に示す試験軌道において，2本のレール各々に最大 20kN

表1 解析における物性値.

バラスト質量密度	$1.74 \times 10^3 (\mathrm{kg/m^3})$
降伏面形状	$\phi = 31°$
等方硬軟化	$\rho = 100$, $\mu = 3.8$, $\phi_d = 20°$
回転硬化	$b_r = 50$, $\phi_d = 46.4°$
R の発展	$u_1 = 0.7$, $u_2 = 4.2$
相似中心の移動	$c_1 = 7.5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3$
弾性定数	$\gamma = 9.0 \times 10^{-5}$, $\nu = 0.15$, $p_{\mathrm{num}} = 0.01(\mathrm{kPa})$

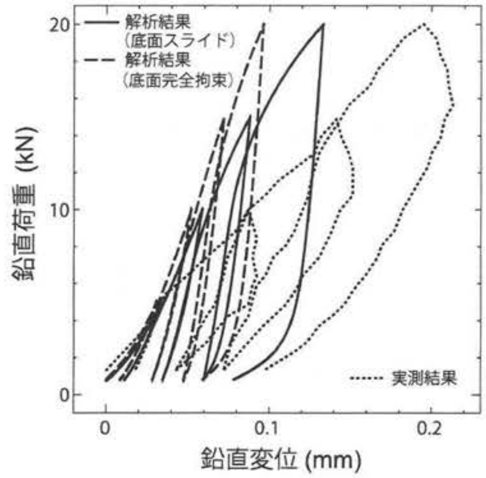

図3 鉛直変位と鉛直荷重との関係.

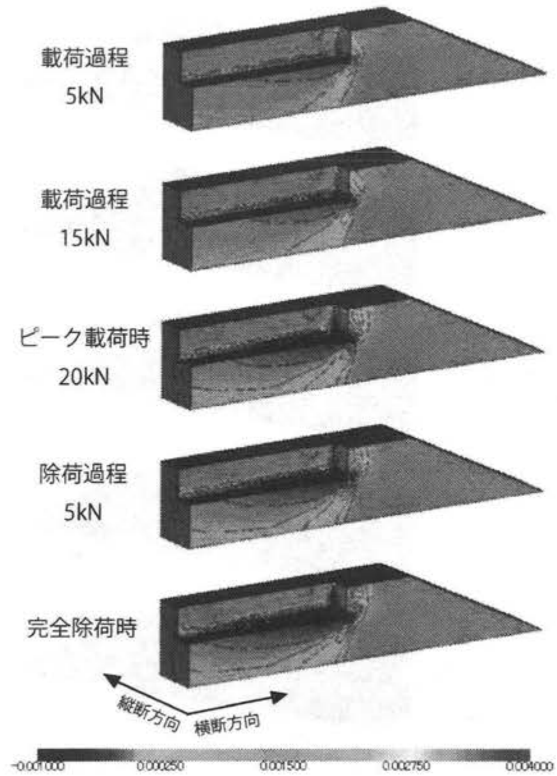

図4 繰り返し負荷時における塑性体積ひずみの進展傾向.

の同じ大きさの鉛直荷重を作用させ，その載荷・除荷を繰り返している．なお，載荷は，5kN 刻みで最大荷重を漸増させ，20kN に達するまで載荷・除荷を繰り返した．解析にあたり，試験軌道に対応する解析領域として**図2**を考えた．ここで，軌道横断面の対称性，縦断方向についての連続性・周期性を考慮し，まくらぎが剛であると仮定したことから，軌道対称面・道床底面，まくらぎ側面はいずれも面外変位を拘束する．まくらぎ下面は一様に強制変位を与える変位規定境界としている．

また，材料定数は**表1**に示す値を用いた．解析の手順では，最初にバラストの自重を所定値まで漸増させることで作用させた．その後，まくらぎ下面位置に鉛直下向きの強制変位を与え，下面での反力がまくらぎ重量（160kgf/本相当）となった時点で外力を受けない初期状態とし，繰り返し解析の初期応力・形状に設定した．繰り返し過程はまくらぎ下面で強制変位を与える変位制御解析とした．

4.2 荷重－変位関係

まず，まくらぎ位置での鉛直変位と鉛直荷重との関係を**図3**に示す．なお，図中にはバラスト底面において面外変位のみを拘束する完全スライド条件とした結果とあわせて，完全拘束とした場合の結果も参考のために示す．試験結果では，載荷時には鉛直変位に対して概ね線形に荷重が増加していき，残留変形が生じても剛性の低下は比較的小さいことがわかる．一方，除荷時には，当初は載荷時の剛性を維持して推移するが，鉛直荷重が0となる付近で剛性が急激に低下する．これは，除荷によってバラスト道床内部の拘束圧が低下することで巨視的弾性係数が小さくなること，それに伴い除荷時にも比較的大きな残留変形が発生することが原因であると考えられる．解析結果では，載荷・除荷を通して試験結果の傾向は概ね良好に表現できており，各繰り返し段階での残留変位も概ね同程度となっている．しかし，弾性応答が実測よりも剛に評価されている上，載荷時の塑性変形が実際よりも大きく評価されている可能性がある．

4.3 残留変形の発現傾向と軌道破壊

次に，軌道内部における残留変形の発現傾向について検討する．4回目の繰り返し載荷・除荷時における塑性体積ひずみを**図4**に，偏差塑性ひずみの2次不変量を**図5**に示す．

図4より，塑性体積ひずみはまくらぎ端部において集中して発生している．載荷・除荷1サイクルにおいては，載荷過程で先行荷重を下回っている $P = 5\mathrm{kN} \rightarrow P = 15\mathrm{kN}$ では変化があまり見られないのに対し，先行荷重を超過した $P = 15\mathrm{kN} \rightarrow P = 20\mathrm{kN}$ では塑性体積ひずみの累積が進行している．一方，除荷過程では $P = 20\mathrm{kN} \rightarrow P = 5\mathrm{kN}$ へ除荷しても塑性変形の進展がほとんど見られないが，載荷重がわずかとなった $P = 5\mathrm{kN} \rightarrow P = 0\mathrm{kN}$ では再び塑性変形が生じている．前項の**図3**では先行荷重超過時・除荷時の荷重ゼロ時点近傍において大きな変位の進行が見られたが，これらは塑性変形の発生に起因するものとして説明できる．特に除荷過程では，拘束圧の低下による剛性の低下と併せて，より大きな変形を示したといえる．

一方，**図5**より，塑性偏差ひずみはまくらぎ端部に集中して発生し，一連の載荷・除荷過程における発生傾向は塑性体積ひずみと同様となる結果を得た．なお，ひずみの集中域は，応力集中箇所であるまくらぎ端部から道

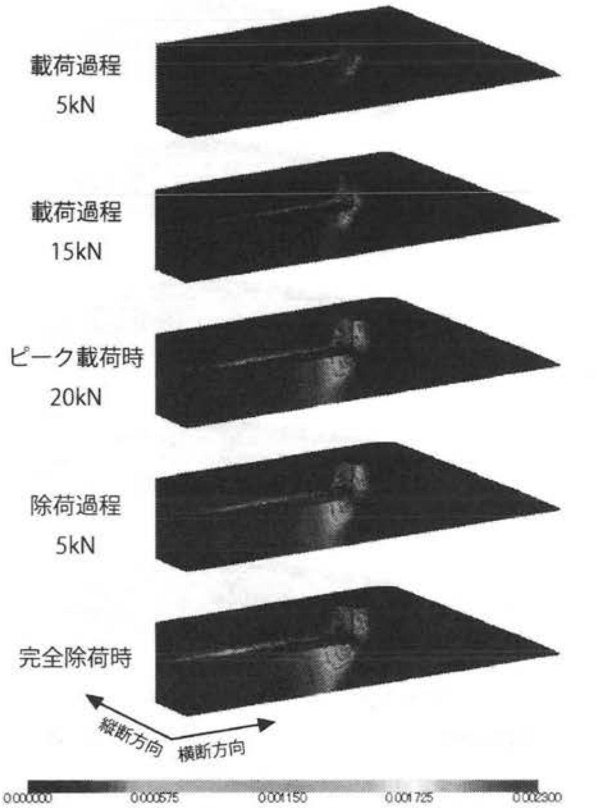

図 5 繰り返し負荷時における塑性偏差ひずみの進展傾向．

床底面に向けて帯状に生じ，軌道長手方向に面的に広がった滑り面の様相を呈している．

4.4 バラスト材内部の発生変位

最後に，バラスト材の変位ベクトルについて考える．繰り返し終了時点での軌道縦断面・横断面における面内変位ベクトルの分布をそれぞれ図 **6**，図 **7** に示す．図 **6** より，縦断面内では，載荷に伴ってまくらぎにより下方に押し込まれたバラスト材が，まくらぎ間へ回り込むように移動し，まくらぎ間中央部では上方へ移動する変形状態となっている．一方，図 **7** より，横断面内では，軌道中心線付近ではほぼ直下にバラスト材が移動するが，法面に近づくにつれて，水平方向の変位が卓越し，外側へ押し出されるように移動している．これを塑性偏差ひずみの分布（図 **5**）と併せて考えると，一連の載荷・除荷時における変位ベクトルの発現は，このひずみ集中面の存在に影響を強く受けており，底面の境界条件が水平面内に変位を拘束していないことも原因の一つと考えられる．

5. おわりに

本研究では，回転硬化を考慮した下負荷面モデルを用いて，バラスト道床を有する軌道の繰り返し変形解析を試みた．実軌道での繰返し変形挙動は，先行荷重超過時・除荷過程における剛性の大きな低下，残留変位の蓄積傾向について良好な再現が得られ，本モデルが実現象を概ね再現し得るものであることを確認できた．

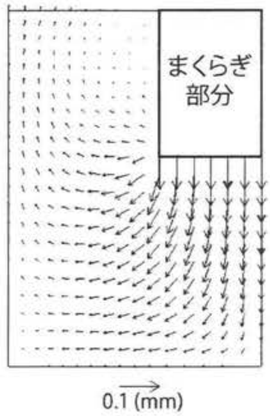

図 6 ピーク載荷時の縦断面における変位ベクトルの分布．

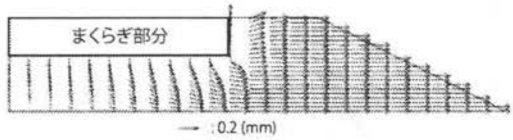

図 7 ピーク載荷時の横断面における変位ベクトルの分布．

参考文献

1) 石川達也，大西有三，堀池高広：不連続変形法 (DDA) による道床バラスト部繰返し塑性変形機構の検討．土木学会論文集，No.645 / III-50, pp.15–28, 2000.

2) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier, C., Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, pp.2841–2859, 2006.

3) 浦川文寛，相川 明，名村 明：レール圧力実測波形を用いた三次元個別要素法による，バラスト軌道の動的挙動解析，土木学会第 63 回年次学術講演会概要集, IV-069, 2008.

4) 紅露一寛，嘉数東陽，梶原宗光，阿部和久：鉄道におけるバラスト道床材の繰り返し変形解析に用いる構成モデルの検討．計算数理工学論文集，Vol.7, No.1, pp.31–36, 2007.

5) 紅露一寛，梶原宗光，阿部和久：下負荷面モデルを用いた鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析，土木学会鉄道力学論文集，Vol.11, pp.7-13, 2007.

6) 橋口公一，上野正実，陳 忠平：下負荷面および回転硬化の概念に基づく土の弾塑性構成式，土木学会論文集，No.547, III-36, pp.127–144, 1996.

7) 石川達也，須長 誠，董 軍，名村 明：大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討．土木学会論文集，No.575，III-40，pp.169–178，1997.