

S2-2-3. 動的計画法と最尤法を用いた軌道検測データの位置照合法

○神山 雅子 (鉄道総合技術研究所) 樋口 知之 (統計数理研究所)

Position Matching for Track Geometric Data Sets with Dynamic Programming and Maximum Likelihood Method
Masako Kamiyama (Railway Technical Research Institute) & Tomoyuki Higuchi (The Institute of Statistical Mathematics)

A procedure is described for adjusting sampling locations in one track-geometric data set to those in another set when these sets are obtained with a track inspection car. This is because the set of sampling locations on the rail changes slightly with each measuring run, although it is desirable that these locations be fixed so that variations in track geometry may be observed. It is difficult to adjust these location gaps after the discretization, since some sampling intervals shorten or lengthen locally due to slipping or sliding of the car wheel. Our procedure formulates this adjustment into an optimization form that can be solved by dynamic programming. Unknown parameters involved in the form can be identified using the maximum likelihood method. This procedure is based on the fact that the optimal solution in dynamic programming is equivalent to the "Maximum A Posteriori (MAP) estimation" in a Bayesian framework.

キーワード：離散化、サンプリング、位置照合、動的計画法、最尤法

Keywords: discretization, sampling, position matching, dynamic programming, maximum likelihood method

1. 研究の目的

軌道は日々の列車荷重によってわずかながら変形するため、軌道検測車によって定期的に測定（検測）され、結果は等距離間隔に離散化されてコンピュータに記録される。その離散化の位置が、図 1 に示すように検測のたびに異なるため、同じ区間を複数回検測して得られたデータセットを用いて計算（例えば引き算）するときには、位置のずれを無視したり、データセットを何 100m かの区間代表値に直してから比較したりする。しかし、区間代表値に直すと情報が減少するため、検測結果を最大限に活用するには、離散化の位置を揃えるのが望ましい。しかし、離散化位置を決めるのは、図 2 に示す、検測走行と同時に収録した速度発電機のパルスであり、これは車輪回転に連動しているため再現性がない。そこで筆者らは、離散化されたデータセットの位置ずれを推定して補正するアルゴリズムを開発した。

もし全てのデータ間の離散間隔が均一であれば、2 データセット間の検測位置のずれは、相互相関係数から推定できる。これまで開発された軌道検測データの位置補正^{1), 2)}は、共にこの方式である。すなわち、2 データセットをそ

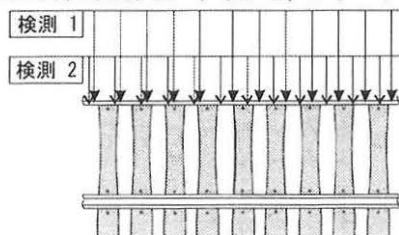


図 1 検測に伴う離散位置のずれの例

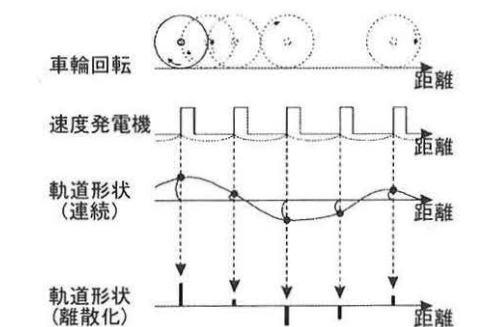


図 2 速度発電機による軌道検測結果の離散化

れぞれ細かく区切り、位置ずれを相互相関係数から推定するものであり、区切られたデータの中には離散間隔の局所的な伸縮がないという前提にたっている。

しかし、速度発電機は列車走行に伴ってパルスを発生させるため、車輪が滑走したとき、図 3 に示すように離散間隔が局所的に伸びてしまう。一方、パルスの発生に用いられる車軸は駆動力をもたないため、空転するとは考えにくい。しかしノイズの混入などにより、離散間隔が局所的に縮んでしまうなどの、(見掛け上の)空転が伴うことがある。

図 4 に、約 1km 離れた 2 つの位置検知装置（軌道上に固定）の間を 44 回検測したときの、データ個数の分布を示す。データは等間隔で離散化されているにもかかわらず、個数にばらつきが見られる。頻度が 1・2 番目に高い、データ数 3201 点・3202 点のときには車輪が滑走せずに検測したと仮定すれば、それよりデータ数が少ない 3 回の検測では滑走したと考えられる。また、1 回だけデータが 3202 点得られた検測があり、前述の「見掛け上の空転」と考えられる。

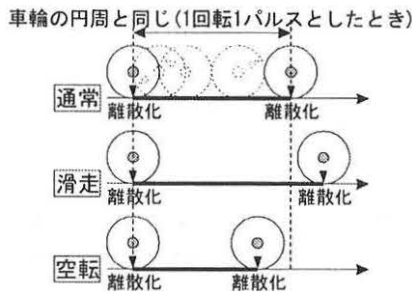


図3 車輪回転に伴う離散間隔の変化

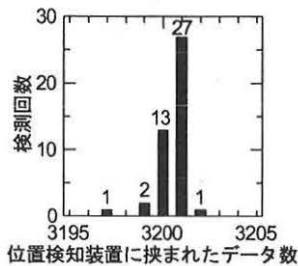


図4 同一の軌道区間における検測データ数の分布例

図5に検測データセットの例を示す。上2段のデータセット(A)(B)は、前述の軌道区間の軌間狂いを、8日間隔で2回検出したものである。波形だけを見ると(A)(B)は似ており、軌間は8日程度ではほとんど変形しないという知見と合っている。しかし、(B)を構成するデータ数の方が(A)より4点(約1m分)少ない。一方、図5の上から3段目に示す両者の差からわかるように、(A)(B)それぞれの1番目近傍のデータ間の差は小さい。同様に、同じ図5の上から4段目に示すように、(A)(B)それぞれの終端近傍のデータ間の差も小さい。よって、(A)(B)の検測位置はデータの両端近傍では互いに近いと推定され、にもかかわらずデータ数が4点異なる原因は、(A)(B)いずれかの検測走行中に、離散化の間隔が局所的に伸縮したからと考えられる。

筆者らは、このようなデータセットの検測位置を、数理計画法の一種である動的計画法(Dynamic Programming, 以下DP)³⁾と、統計的推定法の1つである最尤法⁴⁾を用いて

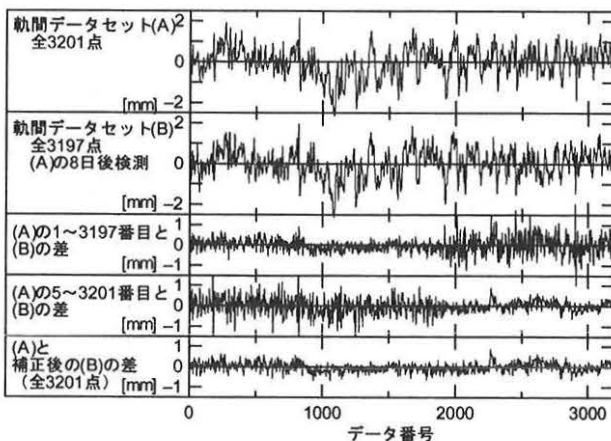


図5 同一の軌道区間における検測データセットの例

近似的に揃えるアルゴリズムを開発した。本アルゴリズムを用いて、データセット(B)の検測位置を(A)に合わせた結果を、図5の5段目に示す。

本論文では、開発したアルゴリズムを2章に、結果と考察を3章に示す。

2. 動的計画法と最尤法による検測位置の照合

筆者らは、アルゴリズムの開発を以下のように行った：

- (1)従来の知見・経験的事実をモデル化する。
 - (2)位置照合の問題を最適化問題に定式化する。この問題はDPによって解けるが、式に含まれる未知のパラメータがDPの結果に影響するため、解が一意には定まらない。
 - (3)上記のパラメータが対数尤度によって評価できることを利用し、最尤法で未知のパラメータを推定する。
 - (4)(3)で推定したパラメータを用いて(2)の最適化問題を解く。
- 以下、(1)から(3)について順に説明する。

<2.1>問題のモデル化

筆者らはこの位置照合を、図6に示すように、点数が α 倍になるように補間した軌間データセットの中から、模範となる他の軌間データ1つ1つに相当するデータを探索する問題とみなすことにした。軌間の検測結果には、離散化前にアナログローパスフィルタがかけられているため、保管は空間周波数成分を変えないように行った。なお、模範となるデータセットを「教師データセット $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T, Y_T\}$ 」(T はデータ数)、補間された後に探索されるデータセットを「学習データセット $\{X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_N\}$ 」と呼ぶことにする。 N (ただし $N \approx \alpha T$)は補間後の学習データの個数である。また、集合としてのデータセットと、1つずつのデータを区別するため、今後は $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T, Y_T\}$ をまとめたものを $Y_{1:T}$ と表記する(他の変数も同様)。

前述の補間の結果、本問題は、 Y_i に相当する学習データのデータポイントを n_i としたとき(相当するデータの値は X_{n_i})、考え得る数列 $n_{1:T}$ の中から最適な数列(これを $n_{1:T}$ とする)を探索する問題になる。ここで、 $Y_i - X_{n_i}$ を e_i とし、

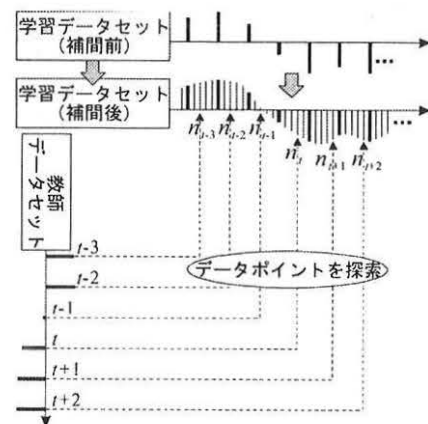


図6 位置照合問題の考え方

$e_t = \sum_{i=1}^k a_i e_{t-i} + w_t$ ($w_t \sim N(0, \sigma^2)$) とおく。なお k は自己回帰 (AR) モデル⁴⁾の次数で、ここでは $k=1$ とした。

次に n_{1T} の性質について考察する。離散間隔の実際の分布は不明であるが、滑走や空転に伴う走行距離は、非常に小さいと経験的にいわれている。よって、離散間隔に相当する n_{1T} の 1 階差分 $\Delta n_t \stackrel{\text{def}}{=} n_t - n_{t-1}$ は、ほとんどの t で α と推測される。また Δn_t のとり得る値の範囲を、 $1 \leq n_t \leq 2\alpha - 1$ と仮定し、 Δn_t が α 以外の値をとる確率は全て一定とした。

次に、 n_{1T} の 2 階差分 $\Delta^2 n_t \stackrel{\text{def}}{=} n_t - 2n_{t-1} + n_{t-2}$ は、ほとんどの t で 0 と推定される。なぜなら列車が滑走、もしくは (見掛け上) 空転せずに走行しているときは $\Delta n_t = \Delta n_{t-1} = \alpha$ と考えられるから $\Delta^2 n_t = 0$ になり、また滑走中の車輪の回転速度も (通常より遅いながらも) ほぼ一定と考えれば、 $\Delta n_t \neq \alpha$ ではあっても $\Delta n_t = \Delta n_{t-1}$ と考えられるためである。

<2.2> 動的計画法による位置照合

以上の知見より、最適なデータポイントを示す数列 n_{1T} の性質を以下のようにモデル化する：

- $\Delta n_t = n_t - n_{t-1}$ は、ほとんどの t で α 。
- $\Delta^2 n_t = n_t - 2n_{t-1} + n_{t-2}$ は、ほとんどの t で 0。
- $w_t \sim N(0, \sigma^2)$ (ただし $e_t = Y_t - X_{n_t}$ かつ $e_t = \sum_{i=1}^k a_i e_{t-i} + w_t$)。

このとき n_{1T} を「実行可能解 n'_{1T} の中で $\sum w_t^2$ を最小にするもの」と考えることにすると、以下の評価関数 $\sum F(n'_t)$ の最適化によって求められる。

$$\begin{aligned}
 n_{1T} &= \arg \min_{n'_{1T}} \sum_{t=1}^T F(n'_t) \\
 &= \arg \min_{n'_{1T}} \left\{ \sum_{t=1}^T \left[(Y_t - X_{n'_t}) - \sum_{i=1}^k a_i (Y_{t-i} - X_{n'_{t-i}}) \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mu_1 \sum_{t=2}^T \xi(\Delta n'_t - \alpha, \alpha - 1) + \mu_2 \sum_{t=3}^T \xi(\Delta^2 n'_t, 2\alpha - 2) \right\},
 \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、

$$\xi(n, \gamma) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (0 < |n| \leq \gamma) \\ \infty & (\gamma < |n|) \end{cases}, \quad (2)$$

$$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad (3)$$

$$n'_t \in S_t \quad (S_t \text{ は適宜定めた } n'_t \text{ の探索領域}). \quad (4)$$

このとき $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ は、 $\Delta n'_t \neq \alpha, \Delta^2 n'_t \neq 0$ になるたびに加算されるペナルティである。

教師・学習データセットの両端のデータは、固定された位置検知装置から一定距離範囲内で検出されているため、 n_{1T} の境界条件は以下になる。

$$\begin{aligned}
 n_1 &\in S_1 = \{1, 2, \dots, 2\alpha - 2, 2\alpha - 1\}, \\
 n_T &\in S_T = \{N - (2\alpha - 1) + 1, \dots, N - 1, N\}.
 \end{aligned} \quad (5)$$

n_1 と n_T の確率分布は、ともに一様分布とする。

次に、式(1)~(5)を満たす n_{1T} を求める離散最適化問題の解き方を考える。離散最適化問題は、一般に解法が煩雑で、

しかも局所最適解しか求められないことが多い。しかし、本問題には最適性の原理³⁾が成り立つため DP が使用でき、確実に大域的最適解 n_{1T} を求められる。

ただし、この位置照合問題を解くには、パラメータ μ_1, μ_2, a_{1k} の値を決めなければならない。なぜなら、パラメータに伴って最適解 n_{1T} が変わるからである。図 7 に、図 5 に示したデータセット(B)を $\alpha=5$ 倍に補間したものを学習データセットとし、異なる μ_1, μ_2, a_{1k} を適用した上で、教師データセット(A)に対応する n_{1T} を求めた例を示す。

<2.3> パラメータの評価

パラメータ μ_1, μ_2, a_{1k} の値を合理的に決めるには、パラメータ自体の評価関数が定義されるのが望ましい。そこで、定義のために、前節で求めた n_{1T} の統計的意味を考察する。

$w_t = e_t - \sum_{i=1}^k a_i e_{t-i}$ (ただし $e_t = Y_t - X_{n_t}$) の標準偏差を σ^2 とし、式(1)に $-1/(2\sigma^2)$ をかけて exp をとると、

$$\begin{aligned}
 n_{1T} &= \arg \max_{n'_{1T}} \left\{ \prod_{t=1}^T \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} w_t^2 \right] \right\} \\
 &\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mu_1 \sum_{t=2}^T \xi(\Delta n'_t - \alpha, \alpha - 1) + \mu_2 \sum_{t=3}^T \xi(\Delta^2 n'_t, 2\alpha - 2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

になる。右辺の前半 (最初の $\{\}$) は n'_{1T} が全て与えられたときの教師データセット Y_{1T} の尤度 $p(Y_{1T} | n'_{1T})$ の定数倍、後半の $\{\}$ はベイズ統計における n'_{1T} の事前分布 $p(n'_{1T})$ の定数倍とみなせる。よって式(6)は事後分布 $p(n'_{1T} | Y_{1T}) \propto$

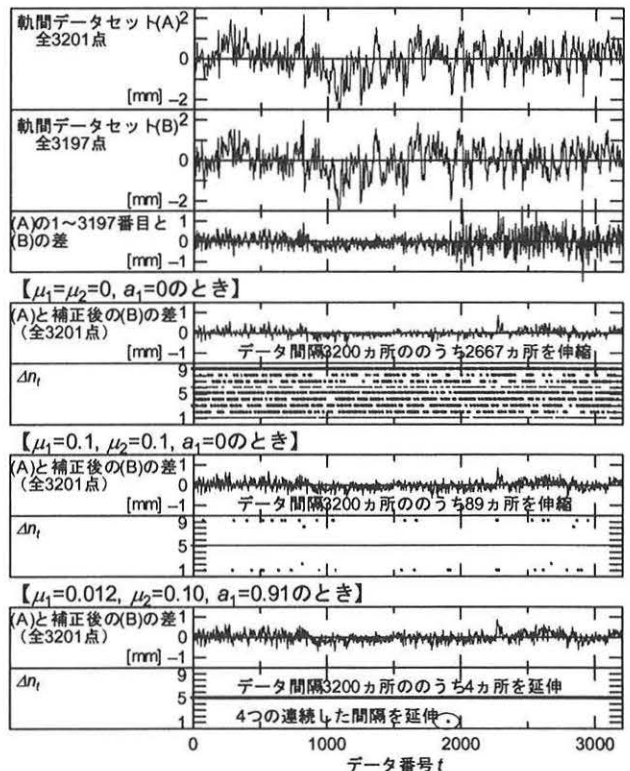


図 7 パラメータの変化に伴う位置照合結果の変化 (データセット(B)を 5 倍に補間して(A)と照合したとき)

$p(\mathbf{Y}_{1:T}|\mathbf{n}'_{1:T})p(\mathbf{n}'_{1:T})$ を最大化する $\mathbf{n}_{1:T}$ (Maximum A Posteriori

estimate, MAP 推定値)⁴⁾の探索と解釈できる⁵⁾。このとき、 $\mu_1, \mu_2, \mathbf{a}_{1:k}, \sigma^2$ は事前分布を与えるパラメータ (パラメータの分布を与えるので超パラメータと呼ばれる) となる⁶⁾。

このとき、超パラメータの値そのものを $\mathbf{Y}_{1:T}$ の対数尤度

$$LL(\mu_1, \mu_2, \mathbf{a}_{1:k}, \sigma^2) \stackrel{\text{def}}{=} \log p(\mathbf{Y}_{1:T}|\mu_1, \mu_2, \mathbf{a}_{1:k}, \sigma^2)$$

で評価する (最尤法)。すなわち、 LL を大きくする超パラメータ ($\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mathbf{a}}_{1:k}, \tilde{\sigma}^2$ と表記) ほど良いと解釈する。

対数尤度 LL を求めるには、 $\mathbf{Y}_{1:T}$ の同時分布を求める必要がある。ここで、同時分布が以下の条件付き確率分布の和に分解できる⁷⁾ことを利用する：

$$LL(\mu_1, \mu_2, \mathbf{a}_{1:k}, \sigma^2) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mu_1, \mu_2, \mathbf{a}_{1:k}, \sigma^2).$$

右辺の $t \in \{1, 2, \dots, T-1, T\}$ に対する条件付き確率分布は、式(6)の統計モデルが一般状態空間表現に変換できることを利用して計算できる⁸⁾。

ところで、本モデルは検測データセットの差 $\mathbf{e}_{1:T}$ を時不変の 1 次 AR モデルで近似しているのに対し、実際の検測データセットには列車速度に伴って特性が変化するローパスフィルタがかかっている。このモデルの違いが推定値に与える影響を低減するには、AR パラメータ $\mathbf{a}_{1:k}$ 、 σ^2 を別途

推定し ($\hat{\mathbf{a}}_{1:k}, \hat{\sigma}^2$ と表記)、それを用いて $LL(\mu_1, \mu_2 | \hat{\mathbf{a}}_{1:k}, \hat{\sigma}^2)$ を最大にする $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ を探索すればよいことがわかっている⁹⁾。また、この方が、全パラメータを同時に探索するより計算時間も短くなる。

最後に、本来の目的である位置照合を表すデータポイントを推定するには、求められた $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \hat{\mathbf{a}}_{1:k}$ を式(1)に代入して DP による最適化を行えばよい。

3. 結果と考察

表 1 に、図 5 に示したデータセット(A)を教師データセットとし、(B)を $\alpha=5$ 倍に補間したものを学習データセットとして、位置照合のパラメータを推定した値を示す。その結果、図 7 の下 2 段に示した結果が採用される。また、図 8 に、(B)と同時に検測された高低狂い(B')の離散化の位置を、(A)(B)の位置照合結果を用いて (B')の値は参照せずに) 補正した例を示す。その結果、(A)と同時に検測された高低狂い(A')との差の振幅が小さくなっており、位置照合結果は妥当と判断できる。かつ、この軌道区間の高低狂いは検測の間の 8 日間にほとんど変わらなかったと推定される。

また、離散間隔の補正結果より、データセット(B)の検測走行時に、軌道検測車が $t=1900$ 近辺で 4 点相当 (約 1m) 滑走したと推定される。そこで、図 8 最下段に、(B)と(B')検測時の軌道検測車の速度 (単位時間内に発生した速度発電機のパルス数から逆算したもの) を示すと、推定された

表 1 パラメータの推定結果 (図 5 のデータセット(B)を 5 倍に補間して(A)と照合したとき)

パラメータ	μ_1	μ_2	a_1	σ^2
推定値	0.012	0.1	0.91	0.0081

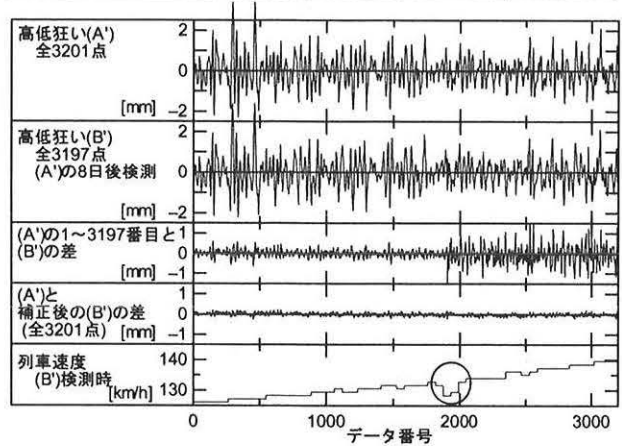


図 8 図 5(A)(B)と同時に検測した高低狂いの位置照合

近辺で列車速度が不自然に低下している。これは、車輪が本当に滑走し、パルスの発生が走行距離に対して一時的に減少した可能性が高いことを示唆している。

参考文献

- 1) 細川 岳洋：波形比較による軌道狂い位置の補正方法，新線路，pp.21-23，1999.3
- 2) 福島 誠志：軌道検測データのサンプリング間隔補正とその軌道管理への応用，第 10 回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集，pp.183-186，2003.12
- 3) 茨木 俊秀：離散最適化法とアルゴリズム，岩波講座 応用数学[方法 8]，岩波書店，pp.61-64，1993
- 4) 廣田 薫・生駒 哲一：確率過程の数理，朝倉書店，2001
- 5) S. Godsill, A. Doucet, M. West: "Maximum a posteriori sequence estimation using Monte Carlo particle filters," Ann. Inst. Statist. Math., vol.53, no.1, pp.82-96, 2001.3
- 6) H. Akaike: "Likelihood and the Bayes procedure," Bayesian Statistics, J. M. Bernardo, et al., pp.143-166, University Press, Valencia, 1980
- 7) 北川源四郎：FORTRAN77 時系列解析プログラミング，pp.214-217，岩波書店，1993
- 8) Masako Kamiyama, Tomoyuki Higuchi: "Adjustment of Nonuniform Sampling Locations in Spatial Data Sets," IEEE Signal Processing Magazine Special Issue on Signal Processing for Mining Information, pp.47-56, 2004.5
- 9) 神山 雅子・樋口 知之：動的計画法と非線形フィルタを用いた鉄道路線形状測定位置の補正，電子情報通信学会論文誌 D-II, vol.J87-D-II, no.6, pp.1199-1207，2004.6