

Development of Timoshenko beam finite elements
for vehicle/track vibration analysis

正 [土] ○紅露一寛 (新潟大), 正 [土] 阿部和久 (新潟大), 正 [土] 石田 誠 (鉄道総研), 正 [土] 鈴木貴洋 (鉄道総研)

Kazuhiro KORO, Niigata Univ., 8050, Igarashi 2-Nocho, Niigata, 950-2181

Kazuhisa ABE, Niigata Univ.

Makoto ISHIDA, RTRI, 2-8-38, Hikari-cho, Kokubunji, Tokyo, 185-8540

Takahiro Suzuki, RTRI

A Timoshenko beam finite element suitable for vehicle/track vibration analysis is proposed. In the present analysis the Timoshenko beam is introduced to model a rail. Since the rail is usually subjected to several moving and stationary concentrated loads, the slope deflection of the Timoshenko beam has discontinuity at the acting points of these concentrated loads. Hence, the use of the finite element (FE) incompatible with the slope discontinuity causes fictitious responses. In this paper the FE which is compatible with the deflection of Timoshenko beam subjected to concentrated loads is developed using the TIM7 element and the pyramid-shape function. Numerical results show that the proposed FE can remove the non-physical response.

Key words : Timoshenko beam, moving loads, discontinuity in slope deflection, fictitious response

1. はじめに

せん断変形の影響を考慮に入れる Timoshenko ばりモデルは、特に動的問題において Bernoulli-Euler ばりモデルよりも高い周波数の応答成分まで再現できる特長を有している。そのため、今日では、レールの動的応答を評価する際に、当該のばりモデルが広く用いられている。

Timoshenko ばりの動的応答を有限要素法を用いて解析する場合、要素分割されたはり全体にわたり、たわみと断面回転角を近似する必要がある。近似関数が 3 次 Hermite 補間によって構成されることが一般的な Bernoulli-Euler ばりとは異なり、Timoshenko ばりでは補間関数の構成方法や補間次数、連続性に依りて多様な有限要素が提案されている。代表的なものとしては、静的釣り合い式の同次解から構成した要素¹⁾や、Euler ばりと同様に 3 次 Hermite 補間によってたわみ・断面回転角を近似する要素²⁾、たわみを 3 次 Hermite 補間、断面回転角を 2 次 Lagrange 補間で近似する TIM7 要素³⁾などがある。また、動的解析においては、像空間における釣り合い式の同次解から近似関数を構成した要素⁴⁾も提案されている。

Timoshenko ばりを有限要素法で離散化する場合、要素の選択や配置によっては不自然な応答が発生することがある。今日、この応答はせん断ロック⁵⁾またはたわみの補間の不適合性⁶⁾に起因して発生することが知られている。せん断ロックについては原因・対処法とも既に確立されており、ノンロック要素を使用する⁵⁾か、または低減積分⁷⁾を適用することで回避することができる。

一方、たわみの補間の不適合性は、はりに集中力が作用する場合において、力の作用点や要素端点で発生する。

Timoshenko ばりのたわみは、集中力が作用しない点においては少なくとも C^1 連続となるが、集中力の作用点ではたわみ角が不連続となり、たわみの連続性は C^0 級に緩和される。特に、レールを Timoshenko ばりとしてモデル化し、レールへの作用力がすべて集中力で与えられることが一般的である軌道振動解析においては、この変形特性を考慮した有限要素を導入して解析を行なわない限り、たわみ角の不連続性に起因する不自然な応答を完全に除去することができない。

そこで本研究では、軌道振動解析においてレールを Timoshenko ばりとしてモデル化する場合を想定し、Timoshenko ばり特有の不自然な応答を完全に除去し得る有限要素を構成する。まず、集中力が作用しない箇所でのたわみの C^1 連続性を表現するために、前述の TIM7 要素³⁾を導入する。TIM7 要素ではたわみ・断面回転角の他にたわみ角の節点値を用いて近似関数を定義している。そのため、作用点が移動しない集中力に関するたわみ角の不連続性については、作用点を要素節点に選んだ上でたわみ角について二重節点とすることで表現する。ただし、この対処法は移動しない集中力に対しては有効であるが、軌道振動解析のように移動集中荷重を取り扱わねばならない場合には、集中力の移動とともに有限要素節点の更新が必要となる。そこで、移動集中荷重に関するたわみ角の不連続性を表現するために、荷重作用点で頂点をとる三角形の補間関数を新たに導入する。さらに、これを重合要素として前述の TIM7 要素と併用することで、不連続性をもれなく表現する。この方法を採用することで、質量・剛性行列の更新を最小限に抑えることができる。なお、本

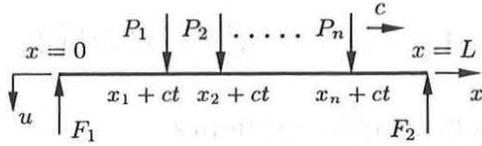
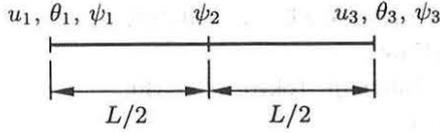
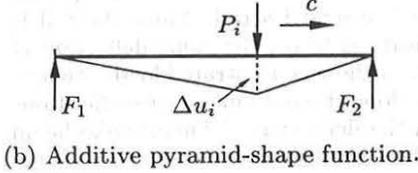


Fig. 1 A Timoshenko beam subjected to moving- and non-moving concentrated loads.



(a) TIM7 element.



(b) Additive pyramid-shape function.

Fig. 2 Definition of the present finite element.

手法の有効性については、数値例を通して検討する。

2. 移動集中荷重が作用する Timoshenko ばりの有限要素定式化

まず、Fig.1 に示すような長さ L の Timoshenko ばりについて考える。なお、このはりの左右端点には反力 F_1 , F_2 が作用し、 n 個の集中荷重 P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) がはりを速度 c で走行しているものとする。この場合、運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx + \int_0^L GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta \psi dx \\ & - \int_0^L GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \\ & + \int_0^L \rho A \ddot{u} \delta u dx + \int_0^L \rho I \ddot{\psi} \delta \psi dx \quad (1) \\ & = \sum_{i=1}^n \delta u(x_i + ct) P_i(t) \\ & \quad - \delta u(0) F_1(t) - \delta u(L) F_2(t), \end{aligned}$$

ここで、 u , ψ ははりのたわみ、断面回転角であり、 δu , $\delta \psi$ はそれらの仮想変位とする。なお、 EI は曲げ剛性であり、 ρA ははりの単位長さあたりの質量である。 K はせん断係数である。また、 t は時間を表わし、 x_i は移動集中荷重 P_i の $t = 0$ における位置を表わす。さらに、 $(\dot{\quad}) = \partial/\partial t$ とする。

まず、有限要素法に基づく離散化により、式(1)の偏微分方程式を t に関する常微分方程式へ変換する。はり内部における変形量を次式のように近似する。

$$u \approx \mathbf{N}(x)\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(x)\Delta\mathbf{u}(t), \quad \psi \approx \phi(x)\psi(t), \quad (2)$$

なお、本手法では TIM7 要素を使用するため、 \mathbf{N} は 3 次 Hermite 補間多項式、 ϕ は 2 次 Lagrange 補間多項式でそれぞれ与えられる。また、 \mathbf{u} , ψ はそれぞれ u , ψ に関する節点値ベクトルである。Fig.2(a) に示すように、このベクトルの成分は両端のたわみ u_1, u_3 、たわみ角 θ_1, θ_3 、断面回転角 ψ_1, ψ_3 とはりの中央点における断面回転角 ψ_2 の 7 成分からなる³⁾。一方、 $\mathbf{w} = \{w_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ は、移動集中荷重の作用点で高さが 1 となる三角形の関数であり (Fig.2(b) 参照)、 \mathbf{w} に対応するたわみの補正量を収納したベクトルを $\Delta\mathbf{u}$ としている。なお、解析においては、 w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の定義域ははりの支持点間とし、TIM7 要素の要素長と必ずしも一致せず、 w_i の形状と定義域は各時刻で変化することを指摘しておく。

ここで、式(1)の仮想変位を $\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{u} + \mathbf{w}\delta\Delta\mathbf{u}$, $\delta\psi = \phi\delta\psi$ で与え、式(2)と合わせて式(1)へ代入すると、時刻 t に関する次の常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Delta\mathbf{M}^T(t) \\ \Delta\mathbf{M}(t) & \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Delta\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \Delta\mathbf{K}^T(t) \\ \Delta\mathbf{K}(t) & \boldsymbol{\kappa}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (3) \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_P(t) \\ \Delta\mathbf{T}_P(t) \end{bmatrix} \{\mathbf{P}(t)\} - \begin{bmatrix} \mathbf{T}_F \\ \Delta\mathbf{T}_F(t) \end{bmatrix} \{\mathbf{F}(t)\}, \end{aligned}$$

式(3)において、 \mathbf{M} , \mathbf{K} は TIM7 要素に関する質量行列・剛性行列であり、この小行列成分は時間依存しない。一方、 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{K}$ は TIM7 要素、重合要素双方の補間関数を用いて生成された質量行列・剛性行列であり、 $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\kappa}$ は重合要素に関する質量行列・剛性行列である。そのため、これらの行列成分は各時刻での更新が必要となる。なお、 \mathbf{U} は全ての節点値を収納したベクトルであり、ベクトル \mathbf{F} の成分ははりの支持反力で与えられる。 \mathbf{T}_P , $\Delta\mathbf{T}_P$, \mathbf{T}_F , $\Delta\mathbf{T}_F$ は、集中荷重 \mathbf{P} , \mathbf{F} を節点力に変換するための行列である。

次に、式(3)に直接積分法を適用し、 t に関する連立常微分方程式を代数方程式に変換する。その際、本手法では積分方程式に基づく時間積分法⁸⁾を適用する。その結果、第 M 時間ステップ ($t_M = M\Delta t$, Δt : 時間ステップ間隔) におけるはりの変形量は、次の連立方程式から計算することができる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{(M)}\mathbf{X}_{(M)} \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{B}_P(t_M)\mathbf{P}_{(M)} - \mathbf{B}_F(t_M)\mathbf{F}_{(M)}) \quad (4) \\ & = \mathbf{C}_{(M)}\mathbf{X}_{(M-1)} + \Delta t \mathbf{D}_{(M)}\dot{\mathbf{X}}_{(M-1)}, \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{X} = \{\mathbf{U}, \Delta\mathbf{u}\}^T$, $\mathbf{B}_P = [\mathbf{T}_P^T, \Delta\mathbf{T}_P^T]^T$, $\mathbf{B}_F = [\mathbf{T}_F^T, \Delta\mathbf{T}_F^T]^T$ であり、下添字は対象としている時刻を表わす。また、行列 $\mathbf{A}_{(M)}$, $\mathbf{C}_{(M)}$, $\mathbf{D}_{(M)}$ は次式で定義する。

$$\mathbf{A}_{(M)} := \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4}\mathbf{K} & \Delta\mathbf{M}_{(M)}^T + \frac{\Delta t^2}{4}\Delta\mathbf{K}_{(M)}^T \\ \text{Symm.} & \boldsymbol{\mu}_{(M)} + \frac{\Delta t^2}{4}\boldsymbol{\kappa}_{(M)} \end{bmatrix},$$

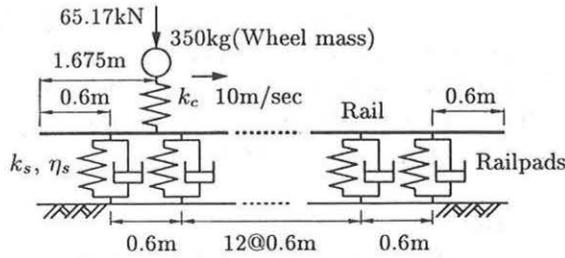


Fig. 3 Numerical example.

$$C_{(M)} := \begin{bmatrix} M - \frac{\Delta t^2}{4} K & \Delta M_{(M)}^T - \frac{\Delta t^2}{4} \Delta K_{(M)}^T \\ \text{Symm.} & \mu_{(M)} - \frac{\Delta t^2}{4} \kappa_{(M)} \end{bmatrix},$$

$$D_{(M)} := \begin{bmatrix} M & \Delta M_{(M)}^T \\ \text{Symm.} & \mu_{(M)} \end{bmatrix},$$

なお、式(4)の速度ベクトル $\dot{X}_{(M)}$ については、次の連立方程式を各時間ステップで解くことで得られる。

$$D_{(M)} \dot{X}_{(M)} = D_{(M)} \dot{X}_{(M-1)} - \frac{\Delta t}{2} G_{(M)} (X_{(M)} + X_{(M-1)}) + \Delta t (B_P(t_M) P_{(M)} - B_F(t_M) F_{(M)}), \quad (5)$$

ただし、 $G_{(M)}$ は、式(3)の剛性行列を $t = t_M$ として得られる行列である。

3. 本手法の有効性

本手法の有効性を確認する目的で、Fig.3に示す解析例を対象に数値実験を行なった。解析例ではレールを Timoshenko ばり、軌道パッドを Voigt ユニットでモデル化している。軌道パッドは剛な基礎に連結されているものとする。また、車両についてはばね下質量(車輪)に作用する慣性力を考慮し、その他台車・車両の影響は上載荷重として与えている。さらに、車輪とレールが接触する際に発生する接触力は、ばね定数 k_c なる線形ばねの復元力として評価されている。その結果、車輪・レール接触力は移動集中荷重、レールの支持反力は移動しない集中荷重として表現される。解析においては $\Delta t = 1/8000(\text{sec})$ とし、レールは15点で支持されているものとした。また、レールの物性値は、 $\rho = 7.880(\text{t/m}^3)$, $A = 64.05 \times 10^{-4}(\text{m}^2)$, $E = 206(\text{GPa})$, $I = 1,960 \times 10^{-8}(\text{m}^4)$, $G = 77.3(\text{GPa})$, $K = 0.34$ とし、ばね定数・減衰係数は $k_c = 2(\text{GN/m})$, $k_s = 110(\text{MN/m})$, $\eta_s = 100(\text{kN}\cdot\text{sec/m})$ に設定した。

本手法の有効性を論じるに当たっては、車輪・レール接触力に関する解析結果に基づいて議論を進めることとする。なお、前述の不自然な応答が含まれていない数値解析結果として、時間域積分方程式法⁹⁾を適用して得られた結果をあわせて示す。

まず、本手法を適用して得られた結果を Fig.4に示す。なお、離散支持点間(0.6m 間隔)は3要素に分割されており、離散支持点はたわみ角について二重節点となるように

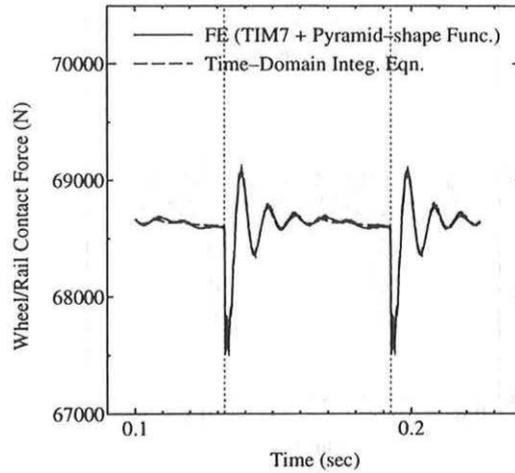


Fig. 4 Wheel/rail contact force calculated by the present finite element model. The dotted lines indicate the passing time of the wheel on the support points.

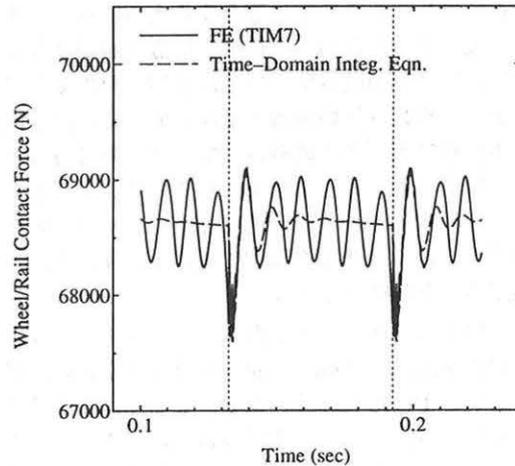


Fig. 5 Wheel/rail contact force calculated using the TIM7 finite element. The dotted lines indicate the passing time of the wheel on the support points.

有限要素方程式を構成している。解析結果より、本手法を適用した場合には不自然な応答は全く認められず、接触力の時刻歴は積分方程式法の場合とほぼ同一となっていることが確認できる。なお、本手法では移動集中荷重に関するたわみ角の不連続性を三角形の重合要素を用いて表現しているため、有限要素方程式の剛性行列・質量行列の更新を必要最小限にとどめることができる。そのため、各時間ステップにおける係数行列の更新と三角分解の計算はわずかなものとなり、重合要素の導入が計算効率の面で障害となることはなかった。

次に、TIM7要素を導入し、はりの支持点でのたわみ角の不連続性は考慮しているが、前節で構成した重合要素を導入しない場合の解析結果を Fig.5に示す。ここでは

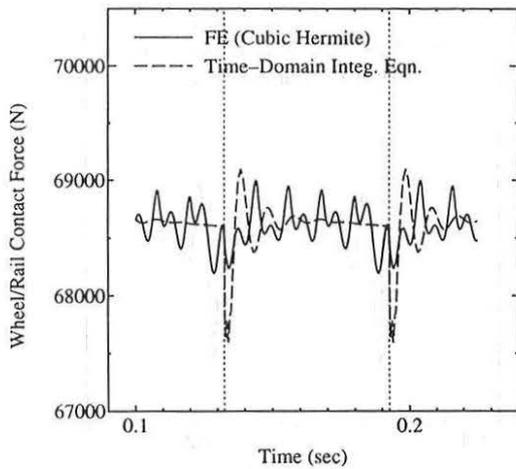


Fig. 6 Wheel/rail contact force calculated by the cubic Hermite element. The dotted lines indicate the passing time of the wheel on the support points.

離散支持点でのレールの変形に適合するように有限要素方程式を構成しているため、車輪が支持点上を通過するときに生じる接触力の低減については適切に再現できている。しかし、それ以外の箇所を走行している場合には接触力が不自然に上下動を繰り返しており、積分方程式の場合とは全く異なる時刻歴を示していることがわかる。このことから、TIM7要素のみを適用しても移動集中荷重作用点でのたわみ角の変形を適切に表現できず、不自然な応答が残ることが確認できる。

最後に、既往の研究において広く用いられている3次 Hermite 要素を用いて Timoshenko ばりを離散化した場合の解析結果を Fig.6 に示す。なお、ここでは集中荷重作用点でのたわみ角の不連続性については全く考慮していない。解析結果より、3次 Hermite 要素を用いた場合においては、車輪・レール間接触力は時間域積分方程式法と全く異なる挙動を示している。すべての集中荷重作用点において有限要素近似がレールの変形に適合していないため、レール支持点通過時の作用力の低下すら再現できていない。なお、紙面の都合上割愛しているが、支持点間の要素分割数を増していくと、積分方程式法を適用した場合の結果に収束する傾向を示した。そのため、3次 Hermite 要素使用時には、要素を細分割することでも不自然な応答を除去できる可能性がある。しかし、要素の細分割は各時間ステップにおける計算量を増大させるだけでなく、要素長に応じて時間ステップ幅も小さくする必要があり、計算ステップ数を増加させる。なお、3次 Hermite 要素においても、本手法と同様に集中荷重作用点でのたわみ角の不連続性を考慮すれば不自然な応答は除去できると思われる。TIM7要素が7つの節点値で定

義されているのに対し、3次 Hermite 要素は8個の節点値を用いて構成されているが、薄いはりの極限においては、3次 Hermite 要素の解空間はそれより自由度の小さい TIM7 要素の解空間に縮退する⁵⁾。そのため、TIM7要素を使用した方がより合理的に思われる。

4. おわりに

本研究では、車両・軌道系の振動解析に適した Timoshenko ばり有限要素を構成した。Timoshenko ばりの有限要素解析においては、使用する有限要素が集中荷重作用点での変形と適合しない場合、不自然な応答が生じてしまう。この応答を完全に除去する方法として、たわみ・断面回転角だけでなくたわみ角も節点値として使用する TIM7 要素を使用し、移動しない集中荷重作用点ではたわみ角に関して二重節点となるように有限要素方程式を構成した。なお、この方法を移動集中荷重作用点に対して適用すると、各時間ステップでの方程式の係数行列の更新が必要となってしまふ。そこで、移動集中荷重作用点でのたわみ角の不連続性については、作用点で頂点を持つ三角形の補正関数によって表現し、有限要素方程式は TIM7 要素とこの重合要素を用いて構成した。その結果、従来より使用されている要素の下で発生していた不自然な応答を完全に除去することができた。

参考文献

- 1) J.H. Sällström, Fluid-conveying damped Rayleigh-Timoshenko beams in transverse vibration analyzed by use of an exact finite element, Part II: Applications. *J. Fluids and Struct.*, Vol.4 (1990) 573-582.
- 2) J. Thomas, B.A.H. Abbas, Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. *J. Sound and Vib.*, Vol.41(3) (1975)
- 3) R.E. Nickel, G.A. Secor, Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.5 (1972) 243-253.
- 4) R. Lundén, B. Åkesson, Damped second-order Rayleigh-Timoshenko beam vibration in space — an exact complex dynamic member stiffness matrix. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.19 (1983) 431-449.
- 5) A.H. Vermeulen, G.R. Heppler, Predicting and avoiding shear locking in beam vibration problems using the B-spline field approximation method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.158 (1998) 311-327.
- 6) J.C.O. Nielsen, A. Igeland, Vertical dynamic interaction between train and track — influence of wheel and track imperfections. *J. Sound and Vib.*, 187(5) (1995) 825-839.
- 7) G. Prathap, G.R. Bhashyam, Reduced integration and the shear-flexible beam element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.18 (1982) 195-210.
- 8) 阿部和久：積分方程式法に基づく時間積分法の動弾性有限要素・境界要素結合法への適用。境界要素法論文集, Vol.14 (1997) 93-98.
- 9) 阿部和久, 森岡泰助, 古田 勝：Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化。土木学会構造工学論文集, Vol.44A (1998) 367-374.