

# 非斉次ポアソンモデルによる コンクリートの剥離・剥落の統計分析

大阪大学大学院 ○福田泰樹\*<sup>1</sup>  
大阪大学大学院 貝戸清之\*<sup>2</sup>  
大阪大学大学院 松岡弘大\*<sup>3</sup>

橋梁床版のかぶりコンクリートの剥離・剥落に対する維持管理を行う上では、橋梁径間単位で生じる剥離・剥落の総数に対する発生過程をモデル化することが重要である。本研究では、かぶりコンクリートの剥離・剥落の発生過程を数え上げ過程としてモデル化する。その際、剥離・剥落の発生過程の時間依存性を考慮するために、ポアソン発生モデルの到着率が時間とともに変動するような定式化を行う。具体的には、到着率をワイブル分布に従う確率変数と仮定した非斉次ポアソン発生モデルを提案する。さらに、実橋梁に対する目視点検データを用いた実証分析を通して提案モデルの有効性を検証する。

【キーワード】 非斉次ポアソン発生モデル、コンクリートの剥離・剥落

## 1. はじめに

本研究では、橋梁床版のかぶりコンクリートの剥離・剥落を具体的な対象とし、そのモデル化を行うことで統計的に損傷過程の特徴を捉えることを試みる。はじめに、剥離・剥落の発生過程を、各事象が時間に依存してランダムに発生するような数え上げ過程（非斉次ポアソン過程）としてモデル化するとともに、目視点検データに基づき非斉次ポアソン発生モデルをベイズ推計する手法を提示する。これらのモデルを実際目視点検データを用いて推計することにより、対象道路区間における床版かぶりコンクリートの剥離・剥落の発生確率を定量的に評価するとともに、剥離・剥落の発生に影響を及ぼす要因についても統計的に考察を加える。

## 2. 橋梁の目視点検スキームと取得情報

いま、図-1 に任意の橋梁径間を対象とした剥離・剥落の発生過程と目視点検スキームを図示している。時刻  $\tau$  はカレンダー上の実時刻を表す。以下、実時刻のことを「時刻」と呼ぶ。同図の時刻  $\tau_A$ 、 $\tau_B$ 、 $\tau_C$ 、 $\tau_D$  において、橋梁の目視点検が実施されている。また、時刻とは別に橋梁の供用開始時刻を  $t_0 = 0$  とする

局所時間軸を橋梁ごとに定義する。つぎに、ある点検時刻から次の点検時刻までの期間を点検間隔  $z$  と定義する。同図では  $\tau_B = t_B$  で実施された  $m$  回目の点検間隔は  $z_m$ 、 $\tau_D = t_D$  で実施された  $m+1$  回目の点検間隔は  $z_{m+1}$  である。簡単のために、橋梁の点検を通して剥離・剥落が観測されれば、直ちに補修されると考える。 $\tau_A = t_A$ 、 $\tau_C = t_C$  に着目すれば、この時点で剥離・剥落は存在しない。しかし、時間の経過とともに例えば、コンクリートの浮きなどの不具合（潜在的な剥離・剥落要因）が生じる。しかし、目視点検では個々の不具合が発生した時刻を把握することはできない。時刻  $\tau_B = t_B$ 、時刻  $\tau_D = t_D$  で目視点検を行うことにより、点検間隔  $[t_A, t_B]$  と  $[t_C, t_D]$  の間に発生した剥離・剥落の総数がそれぞれ  $n_{t_B}$  個と  $n_{t_D}$  個であったという情報のみを径間ごとに取得することができる。ここで、コンクリートの剥離・剥落数  $n(t)$  を局所時間軸における任意の時点  $t (0 \leq t < \infty)$  で離散値をとる確率変数である考える。このとき、以下の条件を満たす場合、剥離・剥落  $n(t)$  は到着率を  $\lambda (\lambda > 0)$  としたポアソン過程に従うと考えることができる。

\*1 工学研究科 地球総合工学専攻 修士課程 06-6879-7622  
\*2 工学研究科 地球総合工学専攻 准教授 06-6879-7630  
\*3 工学研究科 地球総合工学専攻 博士課程 06-6879-7622

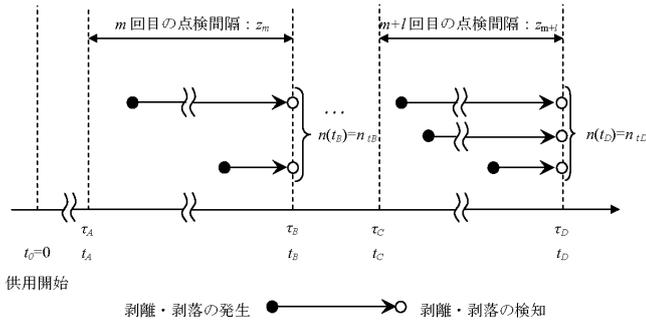


図-1 剥離・剥落の発生過程

- 1)  $n(t)$  は非負の整数値  $0, 1, 2, \dots$  をとる確率変数である。
  - 2)  $n(0) = 0$  である。
  - 3) 任意の局所時間  $0 \leq t_A < t_B \leq t_C < t_D$  が与えられたとき、 $n(t_B)$  と  $n(t_D)$  は独立である。
  - 4)  $0 \leq t_A < t_C$ 、 $0 < z$  としたとき、 $n(t_{A+z})$  と  $n(t_{C+z})$  の分布は一致し点検間隔  $z$  のみに依存する。
  - 5) 任意の局所時間  $t$  での微小間隔において  $n(t) = 1$  となる確率は、 $n(t) \geq 2$  に比べて十分に大きい。
- 3) は各  $n(t)$  が独立であること意味している。4) は剥離・剥落の発生過程が局所時間  $t$  に対して独立であることを要求している。これに対して本研究では、4) の条件を緩和し、剥離・剥落の発生過程が局所時間  $t$  に依存する非斉次ポアソン発生モデルを導出する。

### 3. 非斉次ポアソン発生モデル

#### (1) 非斉次ポアソン発生モデルの定式化

図-1 に示すように、径間  $i$  に対して 4 回の点検が実施がなされており、1 回目と 2 回目の点検間隔が  $z_m = t_B (> t_A) - t_A (> t_0)$  と 3 回目と 4 回目の点検間隔が  $z_{m+1} = t_D (> t_C) - t_C (> t_B)$  を考える。このとき、2. で示したポアソン過程の条件 4) が成立する場合には、局所時間  $t = t_B$  と  $t = t_D$  で点検した際の径間  $i$  の剥離・剥落発生数の確率分布  $n_i(z_m)$  と  $n_i(z_{m+1})$  は同じ分布に従う。このとき径間  $i$  に  $n_i$  個の剥離・剥落が観測される確率は点検間隔  $z_i$  にのみ依存するポアソン分布

$$Po(n(z_i) = n_i | \lambda_i) = \frac{(\lambda_i z_i)^{n_i}}{n_i!} \exp(-\lambda_i z_i) \quad (1)$$

に従う。一方で、コンクリートの剥離・剥落数はその発生原因となる鉄筋腐食の進行などにより時間とともに変動すると考えられる。すなわち、径間  $i$  に  $n_i$  個の剥離・剥落が観測されるポアソン分布が径間  $i$  の局所時間  $t$  に依存して変化することを考える。この

とき、到着率は、

$$\lambda_i = \lambda_i(t) \quad (2)$$

と表現できる。いま、局所時間に依存する到着率  $\lambda_i(t)$  が  $[0, t]$  で積分可能であるとする、

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du \quad (3)$$

で定義される。 $\lambda_i(t)$  は積分区間  $[0, t]$  における平均発生個数を意味することから平均値関数と呼ばれる。式(1)の定常ポアソンモデルにおいては  $\lambda_i z_i$  に相当する。いま、再び図-2 のように径間  $i$  に対する  $m$  回目の点検で時刻  $t = t_A$  と  $t = t_B$  ( $t_B > t_A$ ) という 2 つの局所時点と、点検間隔  $z_m$  ( $z_m = t_B - t_A$ ) が与えられている場合を考える。このとき、局所時点  $t_B$  における径間  $i$  の剥離・剥落数は、前回点検時点  $t_i = t_A$  と当該期の点検間隔  $z_i = t_B - t_A$  を用いて  $n_i(t_i + z_i)$  により表される。局所時点  $t_i$  で剥離・剥落数が 0 になっていることを踏まえ、局所時点  $t_i + z_i$  に径間  $i$  で  $n_i$  の剥離・剥落が観測される確率を考えると、

$$\begin{aligned} P(n_i = n_i(t_i + z_i) - n_i(t_i) | \lambda_i(t)) \\ &= \frac{\{\Lambda_i(t_i) - \Lambda_i(t_i + z_i)\}^{n_i}}{n_i!} \exp\{\Lambda_i(t_i + z_i) - \Lambda_i(t_i)\} \quad (4) \\ &= \frac{\left\{ \int_{t_i}^{t_i + z_i} \lambda_i(u) du \right\}^{n_i}}{n_i!} \exp\left\{ - \int_{t_i}^{t_i + z_i} \lambda_i(u) du \right\} \end{aligned}$$

となり、ポアソン発生モデルを非斉次に拡張した表現となっている。本研究では具体的な  $\lambda_i(t_i)$  として、

$$\lambda_i(t_i) = \zeta_i \cdot \alpha_i^{\alpha-1} = \exp(x_i \beta^1) \cdot \alpha_i^{\alpha-1} \quad (5)$$

を与える。 $\alpha$  は時間依存性を表す未知パラメータであり、ワイブル分布における加速パラメータを表している。一方で、 $\zeta_i = \exp(x_i \beta^1)$  は到着率のうちで非時間依存な成分を表す。詳述すると、いま、ある径間  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) に対して、剥離・剥落の要因となると考えられる構造条件や使用・環境条件を表す特性ベクトルを、特性変数  $x_i^m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) を要素とする行ベクトル  $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^M)$  で表す。ただし、 $x_i^m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) は径間  $i$  の  $m$  番目の特性変数の観測値を表す。よって、径間  $i$  における剥離・剥落の到着率  $\lambda_i$  は特性ベクトル  $x_i$  に依存する。ただし、 $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^M)$  は未知パラメータ  $\beta^m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) による行ベクトルであり、記号  $\cdot$  は転置操作を表す。 $\zeta_i$  は指数関数形を用いており、これにより到着率は非負の値をとる。式(5)を式(4)に代入し、整理することで、

$$Po'(n(t_i + z_i) = n_i | \zeta_i(t)) = \frac{(\zeta_i \xi_i)^{n_i}}{n_i!} \exp(-\zeta_i \xi_i) \quad (6)$$

と表現できる。なお、

$$\xi_i = \xi(t_i, z_i, \alpha) = (t_i + z_i)^\alpha - t_i^\alpha \quad (7)$$

である。以下、式(6)を非斉次ポアソン発生モデルと呼ぶこととする。式中の  $n_i$ 、 $z_i$ 、 $t_i$  が既知であり、 $\zeta_i$ 、 $\xi_i$  が未知パラメータとなる。加速パラメータ  $\alpha$  が加わったことによって、供用期間の経過に伴った到着率の時間依存性を分析できる。式(6)、(7)から明らかなように、加速パラメータ  $\alpha=1$  の場合は到着率が時間依存しない定常ポアソン発生モデルに帰着する。また、供用開始時点  $t_0$  から前回点検時点  $t_i$  と点検間隔  $z_i$  の経過後に、径間  $i$  で把握することができる剥離・剥落の期待値  $E[n_i | t_i, z_i]$  と分散  $V[n_i | t_i, z_i]$  は、

$$E[n_i | t_i, z_i] = \lambda(x_i, \beta) \xi(t_i, z_i, \alpha) \quad (8-a)$$

$$V[n_i | t_i, z_i] = \lambda(x_i, \beta) \xi(t_i, z_i, \alpha) \quad (8-b)$$

と表される。

## (2) 非斉次ポアソン発生モデルの推計

目視点検の結果、 $K$  個の点検サンプル情報が得られたとする。点検サンプル  $k$  ( $k=1, \dots, K$ ) の情報  $e^k$  を、

$$e^k = (n^k, z^k, t^k, x_{i(k)}) \quad (9)$$

と表す。このとき、点検サンプル  $k$  の実測値  $e^k$  が生起する条件付き確率（尤度） $\ell(\beta, \alpha; e^k)$  は、

$$\ell(\beta, \alpha; e^k) = \frac{(\lambda(\bar{x}_{i(k)}, \beta) \xi(\bar{z}^k, \bar{t}^k, \alpha))^{\bar{n}^k}}{\bar{n}^k!} \cdot \exp\{\lambda(\bar{x}_{i(k)}, \beta) \xi(\bar{z}^k, \bar{t}^k, \alpha)\} \quad (10)$$

と表せる。 $I$  個の径間における剥離・剥落の発生が、互いに独立に分布すると仮定すれば、 $K$  個の点検サンプルデータが生じる同時生起確率密度を表す対数尤度関数は、

$$\begin{aligned} \ln\{L(\theta; \bar{e})\} &= \ln\{L(\beta, \alpha; \bar{e})\} = \ln \prod_{k=1}^K \ell(\beta, \alpha; e^k) \\ &= \sum_{k=1}^K \bar{n}^k \ln\{\lambda(\bar{x}_{i(k)}, \beta)\} + \sum_{k=1}^K \bar{n}^k \ln\{\xi(\bar{z}^k, \bar{t}^k, \alpha)\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^K \ln \bar{n}^k! - \sum_{k=1}^K \lambda(\bar{x}_{i(k)}, \beta) \xi(\bar{z}^k, \bar{t}^k, \alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

と表せる。

本研究では未知パラメータ  $\ln\{L(\theta; \bar{e})\}$  の推計手法としてベイズ推計を採用する。ベイズ推計ではベイズの定理

$$\pi(\theta | \bar{e}) = \frac{L(\theta | \bar{e}) \pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta | \bar{e}) \pi(\theta) d\theta} \quad (12)$$

を利用して事後分布  $\pi(\theta | \bar{e})$  の統計量として推計値を

表-1 目視点検データの概要

	総数	RC	PC
供用年	1974~2005		
総橋梁数	985	471	170
総径間数	8212	2666	1126
総点検サンプル数	10972	3949	1340
剥離・剥落数	31215	19155	1219
平均剥離・剥落数	2.85	4.85	0.91

表-2 推計結果

	定数項	種別ダミー	支間長	年代ダミー	加速度
$\beta$	-7.734	0.679	0.008	0.753	2.189
95%信頼区間	(-8.06 -7.39)	(0.63 0.73)	(0.007 0.009)	(0.68 0.82)	(2.09 2.28)
geweke検定量	0.114	-0.060	-0.074	-0.016	-0.080
AIC	32182.0				
AIC( $\alpha=1$ )	33254.0				

得ることができる。本研究では事前分布  $\pi(\theta)$  を多次元ガウス分布とし、ランダムウォーク MH 法により事後分布を推計する。

## 3. 適用事例

適用路線と目視点検データの概要を表-1 に示す。以上の目視点検データから非斉次ポアソン発生モデルを点検サンプル情報に基づいて推計する。本研究では、橋梁床版かぶりコンクリートの剥離・剥落発生過程に影響を及ぼすと考えられる 9 つの特性変数を採用した。特性変数の異なる複数のモデルの優劣を評価するために情報量基準 AIC を用いている。同表には Geweke 検定統計量も併せて示している。Geweke 検定統計量はいずれも 1.96 を下回っており、有意水準 5% で収束仮説を棄却できないことがわかる。対象とした橋梁群においては、床版かぶりコンクリートの剥離・剥落過程に対して、1) 種別ダミー(RC or PC)、2) 径間長、9) 年代ダミー(供用開始年が 1984 年以降かどうか)の 3 つの特性変数を採用したモデルが AIC 最小となった。さらに、時間依存性を表す加速パラメータ  $\alpha$  の推計値は 2.36 となっており、時間の経過とともに剥離・剥落の発生頻度が高くなっていくことを示している。時間依存性を考慮しない場合の AIC を表-2 に AIC(=1)として示す。時間依存性を考慮した非斉次ポアソン発生モデルの AIC の方が小さく、剥離・剥落過程に対する説明力が強いことがわかる。式(1)に基づき非斉次ポアソン分布を算出する。以降では標準的な床版として、1983 年以前に建設された径間長が 39.0m(サンプルの平均値)の RC 床版に着目し標準モデルと呼ぶ。図-2 には、標準モデルで 10 年間に発生する剥離・剥落の個数の確率分布と前回点検時点の関係を示している。供用直後

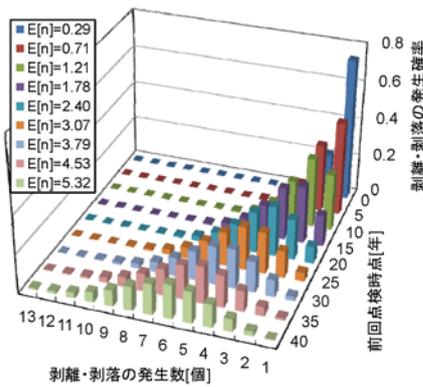
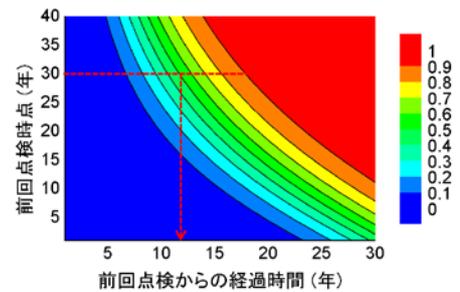
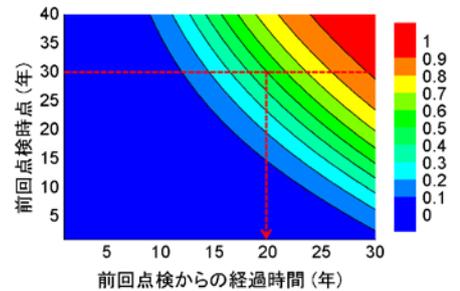


図-2 剥離剥落の分布と前回点検時点の関係

から 10 年経過時点では剥離・剥落数 0 個をピークとして分布が形成されているが、前回点検時点が供用開始から増すことで、前回点検からの経過時間が同じ 10 年であってもピークとなる剥離・剥落数は増加する。これは加速度パラメータ  $\alpha$  の効果に他ならない。図-3 に剥離・剥落発生数の累積確率を示す。発生個数を 5 個以上とし、縦軸に前回点検時点、横軸に前回点検時点からの経過時間（点検間隔）を設定し、累積発生確率を等高線図として示している。標準モデルを参考に RC 床版 PC 床版の 2 種類の床版に対する累積確率を比較する。実際に、前回点検時点が 30 年であった場合に剥離・剥落数が 5 個以上になる確率が 50%に到達するのは、RC 床版が 11.8 年であるのに対して、PC 床版は 19.9 年と、RC 床版は PC 床版よりも 2 倍程度早くなっている。このように、加速パラメータ  $\alpha$  として時間依存性を考慮することにより、供用開始からの経過時間に応じた点検間隔の設定を議論することが可能になる。



(a) RC 床版



(b) PC 床版

図-3 剥離・剥落 5 個以上の累積発生確率

#### 4. おわりに

本研究では、非斉次ポアソン発生モデルを定式化し、床版コンクリートの剥離・剥落過程のモデル化を行った。本研究で提案したような統計分析を行うことで対象構造物の劣化に影響する要因のみならず、劣化過程の変化を定量的に評価することができる。

#### 【参考文献】

- 1) 貝戸清之, 小林潔司, 加藤俊昌, 生田紀子: 道路施設の巡回頻度と障害物発生リスク, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.1, pp.16-34, 2007.2
- 2) 起塚亮輔, 貝戸清之, 伊藤哲男, 西川秀: 目視点検データに基づく橋梁床版のかぶりコンクリートの剥離・剥落に関する統計分析, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, 2010.7

## Statistic Analysis of Peeling/Falling of Concrete by Inhomogeneous Poisson Model

By Osaka Univ., Taiki FUKUDA, Osaka Univ., Kiyoyuki KAITO, Osaka Univ., Kodai MATSUOKA

When maintenance management to the peeling/falling of the protective covering concrete of bridge slabs is performed, modeling the generating process to the total of the peeling/falling of the protective covering concrete of bridge slabs which arises per between the diameters of a span bridge is important. This study makes a model of the generating process of the peeling/falling of the protective covering concrete of bridge slabs as a numerated process. In that case, the generating process of peeling/falling models in which it has the unsteady nature like the arrival rate of a Poisson model carries out time dependence, in order to take into consideration the time dependence of the generating process of peeling/falling. Concretely, formulates the inhomogeneous Poisson model which expressed the time dependence of the arrival rate by Weibull distribution, and the appropriateness of the proposed model is discussed empirically, by applying it to actual expressways.