

# Subset MCMC を用いた大規模なネットワークの損傷確率の算定法に関する研究

A method for analyzing damage probability of large-scale networks by using subset MCMC

古田 均\*, 佐藤 忠信\*\*, 三宅 健太\*\*\*, 築山 勲\*\*\*

Hitoshi FURUTA\*, Tadanobu SATO\*\*, Kenta MIYAKE\*\*\*, Isao TSUKIYAMA\*\*\*

\*工博, 関西大学教授, 総合情報学部 (〒569-1137 大阪府高槻市霊仙寺 2-1-1)

\*\*工博, 関西大学大学院客員教授, 総合情報学研究科 (〒569-1137 大阪府高槻市霊仙寺 2-1-1)

\*\*\*関西大学大学院, 総合情報学研究科 (〒569-1137 大阪府高槻市霊仙寺 2-1-1)

This research is aimed for the large-scale network shown in the lifeline to develop a practicable technique to request the damage probability. It assumes, it is simulated that the outside power acts on a large-scale network, and requests the damage probability. The computational complexity becomes huge by the Monte Carlo Simulation (MCS) in the probability area of the low damage. Then, the damage probability is efficiently requested by using the subset method and the Markov chain Monte Carlo Simulation (MCMC). Moreover, when the network connectivity is assumed to be an index, a partial space cannot be set by subset method in the limit state function. Then, it proposes the method of evaluating the damage degree of the network to set a partial space.

*Key Words: subset, MCMC, damage probability, large-scale network*

キーワード: subset 法, MCMC, 損傷確率, 大規模ネットワーク

## 1. はじめに

近年, 急速に社会基盤の整備が進んだ結果, 各種ネットワークは高度に発達して大規模で複雑なものとなっている. 上下水道, 電力, ガス, 電話, 道路等のライフライン施設は市民生活や産業活動を支える重要なものである. ライフラインシステムは多くの構造物の集合体であり, 個々の構造物の安全性だけでなく, システム全体としての機能の安全性を評価する必要がある. つまり, ライフライン網は節点であるノードとそれを結ぶリンクからなるネットワークとしてモデル化されるので, いくつかの要素が破壊してもシステム全体としての機能は保つことができる場合もあり, 逆に, 1つの要素が破壊したためにシステム全体が機能を果たせなくなってしまう場合もある. こうした点が, 橋や建物といった独立の構造物の安全性を考える場合と異なっている.

本研究は, ライフラインにみられるような大規模なネットワークに対し, 損傷確率を求めるための実用的な手法を開発することを目的としている.

大規模なネットワークに, 小さい外力から大きな外力まで作用することを想定してシミュレーションを行い損傷確率を求める. モンテカルロ法(MCS)では低損傷の確率領域において計算量が膨大となってしまう. そこで, subset

法とマルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo : MCMC) を用いて効率的に損傷確率を求める<sup>1)</sup>. また, ネットワークの接続性を指標とした場合, 限界状態関数では, subset 法による部分空間の設定ができない. そこで, 部分空間を設定するためのネットワークの損傷度合いの評価方法を提案する.

## 2. Subset MCMC を用いたネットワークの損傷確率算定法

### 2.1 Subset 法を用いた損傷確率の算定法

subset 法は, 不確定変数の空間を部分空間に絞り込むことで, 飛躍的に MCS による計算回数を減少させるための手法である.

不確定変数の空間内の損傷領域を  $F$  とし, 損傷確率を  $P(F)$  と表す. ここで, 全体集合を  $F_0$ , その部分集合を  $F_i$  と表し,  $F_m = F$  とする.

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F \quad (1)$$

損傷確率  $P(F)$  は, これらの部分集合を用いることにより次式で算定することができる.

$$P(F) = P(F_m) = P(F_m | F_{m-1})P(F_{m-1} | F_{m-2}) \cdots P(F_1 | F_0) \quad (2)$$

例えば、算定したい損傷確率を  $10^{-5}$  とすれば、 $P(F_m | F_{m-1})$  が  $10^{-1}$  程度になる部分空間、 $F_1, F_2, F_3, F_4$  を設定することで、損傷確率を求めることができる。  $10^{-5}$  レベルの確率計算をする場合には、  $10^{-5}$  レベルの確率計算を 1 回行うよりも、  $10^{-1}$  レベルの計算を 5 回行うほうが、計算量が少なくすむ<sup>2)</sup>。

限界状態関数  $z = f(x)$ 、不確定変数ベクトル  $x$  の確率密度分布  $p(x)$  が与えられるとし、損傷状態を  $z < 0$  と定義して、損傷確率  $P(z < 0)$  を算定する問題を考える。図-1 は、subset 法の部分空間を表している。

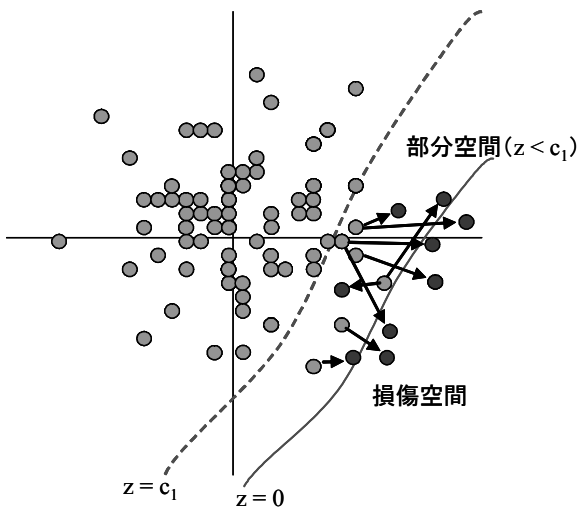


図-1 subset 法による部分空間の作成

まず、MCS により確率密度関数  $p(x)$  に従って  $n_t$  個のサンプルを発生させ、限界状態関数の値  $z$  を算定する。損傷状態  $z < 0$  を満たすサンプルが、発生している場合には、その比率が損傷確率となる。しかし、低損傷確率の問題においては限界状態  $z < 0$  を満たすサンプルは  $n_t$  が十分でないで発生しない。そこで  $n_t$  個のサンプルから限界状態関数値  $z$  が小さい順に  $n_s$  個のサンプルをとり、 $n_s/n_t$  となる部分空間  $F_i$  を設定し、MCMC を用いて部分空間にサンプルを発生させる。これを繰り返すことで部分空間を徐々に小さくして損傷確率を算定する。

以下に、subset 法を用いた損傷確率の算定の計算手順を示す。

- step 1. MCS により確率密度関数  $p(x)$  に従って  $n_t$  個のサンプルを発生させ、限界状態関数の値を算定する。部分空間  $F$  のカウンターを  $i=0$  とおく。
- step 2. 限界状態関数値の小さい方から  $z_1, z_2, z_3, \dots$  として、 $n_s$  個のサンプルをとる。  $P(F_{i+1} | F_i) = n_s/n_t$  となる部分空間  $F_{i+1}$  を次式で定義する。

$$F_{i+1} = \{x | z(x) < C_{i+1}\}, \quad C_{i+1} = \frac{Z_{n_s} + Z_{n_s+1}}{2} \quad (3)$$

step 3. MCMC を用いて部分空間  $F_{i+1}$  内に  $n_t$  個のサンプルを発生させる。

step 4.  $z < 0$  となるサンプル個数  $n_f$  が十分な場合 ( $n_f > n_s$ ) に終了。そうでない場合には  $i=i+1$  として step 2 へ。

以上の手順により、 $i$  番目の部分集合内に損傷にいたる ( $z < 0$  を満たす)  $n_f$  個のサンプルが得られた場合には、次式によって損傷確率を算定することができる。

$$P(z < 0) = \frac{n_f}{n_t} \left( \frac{n_s}{n_t} \right)^i \quad (4)$$

ここで、 $n_s$  は部分空間の大きさを決めるパラメタである。 $n_t$  を 1000、 $n_s$  を 100 とした場合、 $P(F_{i+1} | F_i) = 0.1$  となるように部分空間を絞り込んでいくことになる。

## 2.2 MCMC によるサンプルの発生

MCMC は、目標分布が定常分布に収束するように構成されたマルコフ連鎖に基づいて、任意の確率分布からサンプルを発生させ目標分布に従うサンプルを得る手法である。

マルコフ連鎖を十分繰り返した後のサンプルは定常分布に収束するため、ほぼ独立したサンプルと見なせる。MCMC は正規分布など性質の明らかな分布だけでなく、離散変数や連続変数など、様々な分布に適用できる。また非常に多変量の確率分布から独立なサンプルを発生させることが可能である<sup>3)</sup>。

MCMC を用いて一様分布など任意に定めた確率密度分布から任意の目標分布  $\pi(x)$  に従うサンプルを発生させる手順を以下に示す。

- step 1. 初期値  $x_0$  を任意に定め、カウンターを  $k=0$  とおく。
- step 2. 任意に定めた確率密度分布  $q(x' | x_k)$  に従い、 $x_{k+1}$  の候補  $x'$  を発生させる。
- step 3. 式 5 を用いて候補の状態  $x'$  と現在の状態  $x_k$  の比  $b(x_k, x')$  を計算する。

$$b(x_k, x') = \frac{\pi(x')q(x_k | x')}{\pi(x_k)q(x' | x_k)} \quad (5)$$

- step 4. 一様分布から乱数  $r$  を発生させる。  $r < b(x_k, x')$  ならば  $x_{k+1} = x'$ 、  $r \geq b(x_k, x')$  で  $x_{k+1} = x_k$  とする。
- step 5.  $k=k+1$  として step 2. に戻る。

以上の手順を所定のサンプル数になるまで繰り返す。  $q(x'|x_k)$  は、  $x_{k+1}$  の候補  $x'$  を発生させるための適当な確率関数であり、 proposal distribution と呼ぶ。 上記の手順によって任意の目標分布  $\pi(x)$  に従うサンプルを発生させることができる。

### 2.3 部分空間のサンプル発生方法

subset 法で設定した部分空間に MCMC を用いてサンプルを発生させる方法について示す。 部分空間における条件付き確率密度関数  $pdf(x|F_i)$  は以下の式で表すことができる。

$$pdf(x|F_i) = \frac{pdf(x)I_{F_i}(x)}{P(F_i)} \quad (6)$$

ここで、  $P(F_i)$  は設定した部分空間  $F_i$  の確率、  $pdf(x)$  は目標分布  $\pi(x)$  を表す確率密度関数、  $I_{F_i}(x)$  は  $x$  が部分空間  $F_i$  の内にある場合には 1、外にある場合には 0 となる関数である。 目標分布  $\pi(x)$  が対数正規分布等、任意の分布であるとき、  $[0, 1]$  の一様分布から発生させた乱数  $u$  を  $\pi(x)$  の累積分布関数  $\Phi(x)$  の逆関数を用いて次式で変換することにより  $\pi(x)$  に従う変数が得られる。

$$x = \Phi^{-1}(u) \quad (7)$$

一様分布  $[0, 1]$  の確率密度関数  $I_{(0,1)}(u)$  を式 6 に代入すれば次式が得られる。

$$pdf(u|F_i) = \frac{I_{(0,1)}(u)I_{F_i}(u)}{P(F_i)} \quad (8)$$

ここでは、 proposal distribution に一様分布を用いる。

$$q(u'|u_k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2a}\right)^n & |u_k - u'|_\infty < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

ここで、  $n$  は変数ベクトル  $u$  の次元、  $|u_k - u'|_\infty$  はすべての次元の内の  $|u_k - u'|$  の最大値、  $a$  は  $(0, 1)$  の任意の実数である。 以上の条件のもと採択率は次式で表される。

$$\begin{aligned} \alpha(u_k, u') &= \min \left\{ 1, \frac{\pi(u')q(u_k|u')}{\pi(u_k)q(u'|u_k)} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{P(F_i)I_{(0,1)}(u')I_{F_i}(u')(2a)^n}{P(F_i)I_{(0,1)}(u_k)I_{F_i}(u_k)(2a)^n} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, I_{(0,1)}(u')I_{F_i}(u') \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$u_k$  は設定された部分空間  $F_i$  内に収まっている。 したがって、 解候補  $u'$  が  $(0, 1)$  の範囲にあり、 設定された部分空間  $F_i$  内に収まっていれば採択となり、 そうでなければ非採択となる。

### 2.5 MCMC によるネットワーク信頼性解析方法

ライフラインの信頼性は、ネットワーク形式と信頼性解析の目的により、様々な定義がなされる。ここでは、信頼性の評価基準として結合性を考え、供給点から需要点へ到達できる確率を信頼性と定義する。なお簡単のため、各構成要素は破壊・非破壊のいずれかの状態しかとらないとする。同様に、システム全体の損傷状態についても、評価基準を満たすか満たさないかの2つの状態のみを考える。また、ここではネットワークの結合性を問題としているので Depth-First-Search(DFS)アルゴリズム<sup>4)</sup>を採用する。これは、一つのノードからリンクを通りたどり着けるところまで行き、進めなくなれば引き返して別の経路を探すという探索を効率よく行うアルゴリズムで、計算時間の観点からも優れている。

外力が小さい、もしくは、ネットワークの構成要素の強度分布が大きい場合には、ネットワークの損傷確率は低くなる。MCS でネットワークの信頼性解析を行うには非常に計算量が多くなる。そこで、前述した subset 法と MCMC を用いた手法をネットワークに適用することで、計算量を減少させる。図-2 にネットワークの損傷確率の算定方法のフローチャートを示す。

まず、対象の確率密度関数  $\pi(x)$  に従うサンプル  $x' = \{y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_{n-1}, y'_n\}$  を発生させる。なお  $\pi(x)$  はネットワークの要素数  $n$  の  $n$  次元変数である。  $Y_i, (i=1, 2, 3, \dots, n)$  は各要素の強度分布  $p(y)$  に従う乱数  $y_i$  である。  $p(y)$  に従う乱数  $y_i$  は  $p(y)$  の累積分布関数  $\Phi_i(x)$  の逆関数式  $\Phi_i^{-1}(x)$  を用いて  $[0, 1]$  の一様乱数から発生させた乱数  $u$  を式 7 により変換させている。  $\pi(x)$  に従うサンプル  $x'$  を  $n(n_t = 1000)$  個空間内に発生させ、  $x'$  のときのネットワークの状態(以下、サブグラフと記す)からネットワークの破壊、非破壊の判定する。判定方法は上記の MCS の場合と同じである。ネットワークが破壊している個数  $n_f$  が十分なとき ( $n_f / n_t > 0.1$  とした) は  $n_f / n_t$  がネットワークの信頼性である。  $n_f$  が十分でないときは限界状態関数値を算定し、限界状態関数値が小さい方からサンプル  $n_s$  ( $n_s = 100$ ) 個とり  $P(F_i|F_0) = 100/1000$  の部分空間を設定し、MCMC を

用いてその部分空間内にサンプルを発生させる。以下  $n_f$  が十分になるまで繰り返して、式4により信頼性を算定する。

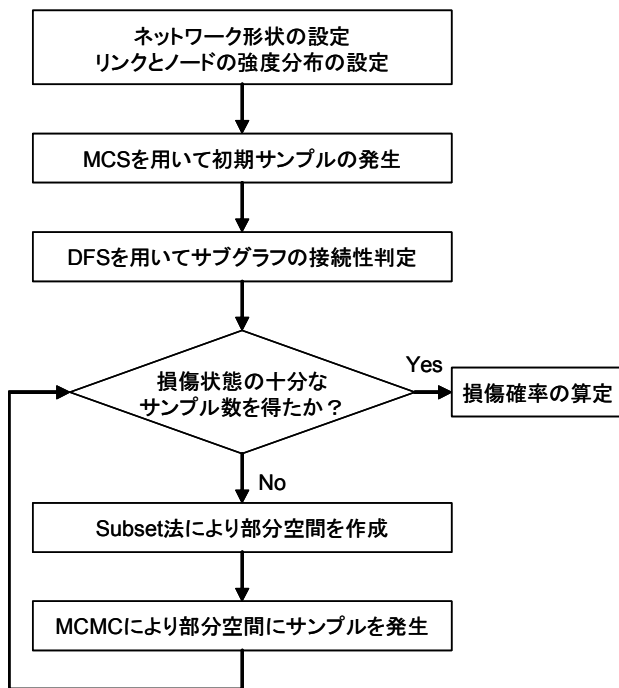


図-2 ネットワークの損傷確率の算定フロー

## 2.6 ネットワークの部分空間の設定方法

subset MCMC を用いた本手法では、限界状態関数の値をもとに損傷領域を絞り込んでいくため、限界状態関数の値が連続値や多数の離散点のような問題には容易に適用することができる。

一方、ネットワークの損傷状態は接続性で定義されているため、接続と非接続の2通りの状態しか考慮できない。そのため、限界状態関数値が取りえる値も0と1の2通りしかない。部分空間は、限界状態関数値が小さいサンプルから任意の数だけ選択して設定される。そこで、限界状態関数に変わるネットワークの損傷度合いの評価方法が必要である。

評価方法として、ネットワークの構成要素の損傷箇所数で評価が可能であるが、この場合、ネットワークによる接続性の影響をうまく評価できないと考えた。そこで本研究では、各サブグラフに付加外力を徐々に加え、先にネットワークが非接続状態になるサブグラフほど損傷度合いの高い、すなわち限界状態関数値が低いサブグラフであるとした。

$n_i$  個のサブグラフの内、ネットワークが接続しているサブグラフ  $n_i - n_f$  に対して、増加率  $\beta$  にしたがって、一様に外力  $F$  を増加させる。非接続状態のサブグラフが  $n_s$  個になるまで、外力を増加することで、新たな部分空間を設定する。

## 3. 大規模なネットワークへの適用

### 3.1 単純なネットワークによる有効性の確認

Subset MCMC を用いた損傷確率の算定方法の有効性を確認するために、図-3に示すような単純なネットワークで検証する。このネットワークは、8個のノードと9個のリンクを有しており、供給点が  $n_1$  で需要点が  $n_8$  である。ノードとリンクの強度分布は、表-1と表-2のように設定した。ここで  $N(\mu, \sigma^2)$  は、平均  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規分布を意味する。なお外力  $F$  はネットワーク全体で一定とし、 $F=3.0$  とした。

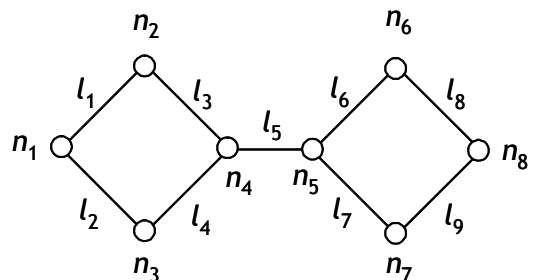


図-3 単純なネットワークモデル

表-1 ノードの強度分布

要素	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
強度分布	$N(6.8, 0.8)$	$N(6.8, 0.8)$	$N(6.8, 0.8)$	$N(6.8, 0.8)$
要素	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$
強度分布	$N(7.0, 1.0)$	$N(7.0, 1.0)$	$N(6.9, 0.9)$	$N(7.0, 1.0)$

表-2 リンクの強度分布

要素	$l_1$	$l_2$	$l_3$
強度分布	$N(7.0, 1.0)$	$N(6.5, 0.7)$	$N(6.5, 0.7)$
要素	$l_4$	$l_5$	$l_6$
強度分布	$N(7.0, 1.0)$	$N(7.0, 1.0)$	$N(7.0, 1.0)$
要素	$l_7$	$l_8$	$l_9$
強度分布	$N(8.0, 1.5)$	$N(6.0, 0.5)$	$N(7.0, 1.0)$

図-4は、本手法であるMCMCによるシミュレーションを試行回数ごとに平均したものである。試行回数を繰り返すごとに真値である  $9.74 \times 10^{-5}$  に収束していることが分かる。またMCMCのシミュレーションの10回の平均は  $9.60 \times 10^{-5}$  であり、真値である  $9.74 \times 10^{-5}$  とほぼ一致している。

MCSでは破壊確率が  $10^{-5}$  程度になるような近似解の計算をするためには、通常  $10^6$  回以上のサンプルが必要であるが、本手法では  $1,000 \times i$  ( $i$  = 部分空間の数) のサンプルでよい。したがって、ここでは部分空間の数は5であるので、5,000個のサンプルだけでよい。

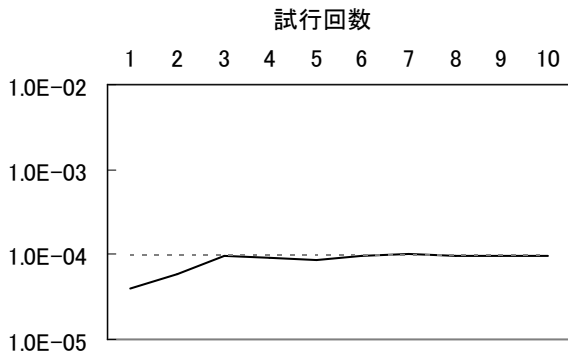


図-4 収束状況

図-5は、外力を2.0から8.0まで変更して算出したネットワークの損傷度曲線を示したものである。ここで横軸が外力 $F$ 、縦軸はネットワークの破壊確率である。また実線は本手法であるMCMCによるシミュレーション値、破線は真値である。

外力を変化させても、本手法によって求めたネットワークの損傷確率は真値とほぼ一致しているのがわかる。外力2.0から3.0付近の低損傷状態では、多少のばらつきはあるが真値とほぼ一致しており、本手法がネットワークの損傷度曲線を求めるのに有効であることが分かる。

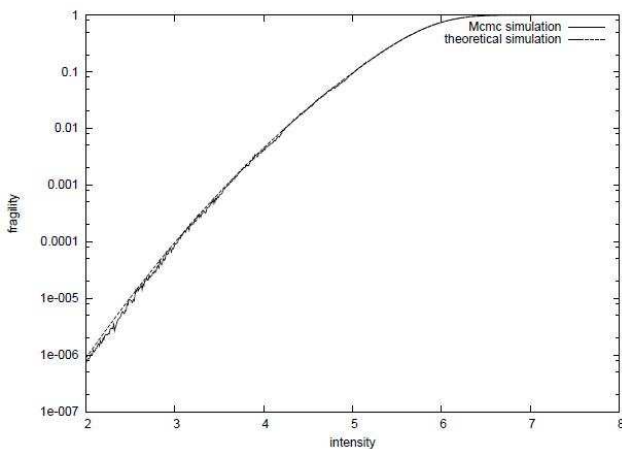


図-5 損傷度曲線

### 3.2 大規模なネットワークモデル

前述では単純なネットワークで、システムの有効性を検証した。ここでは、より構成要素の多い大規模なネットワークに対して、損傷度曲線の算出を試みる。図-6は、大阪市に位置するガス導管ネットワークのうち、中圧Aガス導管をモデル化したものである。ここでは、このネットワークを解析対象とした。

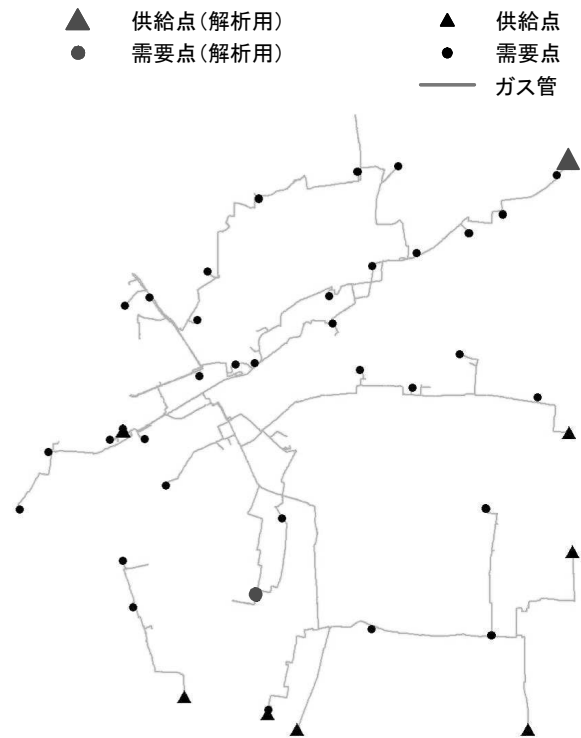


図-6 中圧Aガス導管ネットワークモデル

このガス管ネットワークは、4,264個のノードと4,303個のリンクから成り、合計8,567個の構成要素を持つ。各構成要素の強度分布は、 $N(8.0, 1.0)$ と仮定した。各要素が受ける外力は一定をした。地震などの外力では距離減衰式<sup>5)</sup>を用いることで各要素の外力を変化できる。

右上の供給点から、中央下部の需要点までの損傷確率を求める。初期サンプルを1,000として、外力の値を2.0から6.0まで0.2ずつ変えて、図-7に示すようにネットワークの損傷度曲線を算出した。

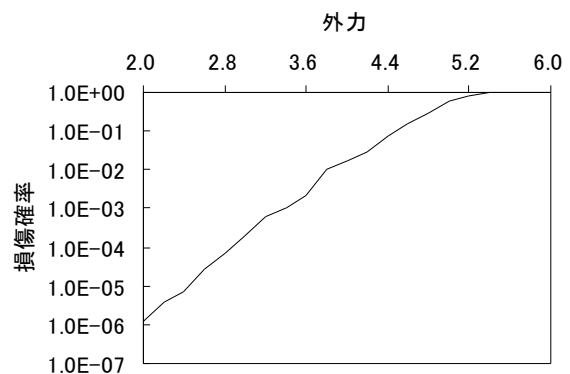


図-7 損傷度曲線

大規模なネットワークで求めた損傷度曲線は、多少のばらつきがあるが図-5と同じような曲線形状をしている。

試行回数を増やせば、精度を向上させることは容易であると思われる。

外力が最も小さい 2.0 のとき、損傷確率は  $1.16 \times 10^{-6}$  である。MCS であれば近似解の算出に、約  $10^8$  個程度のサンプルによるシミュレーションが必要になるが、本手法では 7,000 個のサンプルで、近似解を得ることができた。

#### 4. おわりに

本論文では、subset MCMC を用いた効率的なネットワークの損傷確率の算定方法について提案した。

subset MCMC を用いた本手法では、限界状態関数の値が連続値や多数の離散点のような問題には容易に適用することができるが、ネットワークの損傷状態は接続性で定義されているため、接続と非接続の 2 通りの状態しか考慮できない。そこで、限界状態関数に変わるネットワークの損傷度合いの評価方法を提案し、有効性を確認できた。

また、ネットワークの信頼性解析において損傷確率が  $10^{-6}$  程度である低確率においても理論値とほぼ一致しており MCS を用いた方法より大幅にサンプル発生個数を削減することができた。

構成要素が 8,567 個の大規模なネットワークに適用し、損傷度曲線を算出することができた。

今後の課題としては、損傷確率曲線の精度の向上が挙げ

られる。単純なネットワークでは、損傷度曲線が精度よく描けているが、大規模なネットワークでは、曲線に凹凸が見られ、精度が悪いようである。精度を向上させるには試行回数を増やせばよいが、さらに計算時間が必要となる。Subset MCMC を用いた本手法は、乱数で発生させたサンプルから部分空間を次々と設定しているため、初期のサンプルが偏ると計算結果も偏る可能性がある。したがって、乱数のばらつきが本手法の精度に大きく影響していると考えられる。今後は、乱数のばらつきを押さえた超一様分布列等を用いて、精度の向上を試みる。

#### 参考文献

- 1) 吉田 郁政, 佐藤 忠信: MCMC を用いた損傷確率の効率的算定法, 土木学会論文集(794), pp.43-53, 2005-7.
- 2) AU, S-K. : Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis, Journal of Engineering Mechanics, 129(8), pp.901-917, 2003.
- 3) GILKS, W. R. : Markov chain Monte Carlo in practice., 1996.
- 4) Even S. : Graph Algorithms. Computer Science Press, 1979.
- 5) 司 宏俊, 翠川三郎: 断層タイプ及び地盤条件を考慮した最大加速度・最大速度の距離減衰式, 日本建築学会構造系論文集, 523, pp.63-70, 1999-9.

(2007 年 8 月 17 日受付)