河川技術論文集，第26巻，2020年6月

高次元Fokker-Planck方程式を用いた不確実性を有する降雨流出解析に関する研究

RAINFALL-RUNOFF ANALYSIS BASED ON HIGH-DIMENSIONAL FOKKER-PLANCK EQUATION

成　岱蔚[1]・山田　正[2]
Daiwei CHENG and Tadashi YAMADA

[1]正会員　工博　中央大学助教　理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）
[2]フェロー会員　工博　中央大学教授　理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

Because of severe flood disasters like The Kanto-Tohoku heavy rainfall in September 2015 that occurred in recent years. The society recognized both structural countermeasures and non-structural countermeasures are necessary. On the other hand, unlike earthquakes and tsunami, there is usually enough time for residents to evacuate in a flood disaster if they are appropriately informed. Thus, the prediction of runoff is a critical index for evacuation. To make the prediction, it needs to consider the uncertainty of rainfall intensity and model parameters in the rainfall-runoff analysis. M.Hino had first introduced the Kalman filter in forecasting the rainfall-runoff process which considered the uncertainty of the process, since then methods such as Kalman filter, ensemble Kalman filter, particle filter, data assimilation, had been used to consider the uncertainty effects in the rainfall-runoff process. However, these methods are based on filtering theory and statistical methods, which cannot recognize the physical meaning of the uncertainty. The present study is based on the theory of high-dimensional Fokker-Planck equation, aimed at suggesting a new way of rainfall-runoff analysis which can not only consider the uncertainty in the system but also identify the physical meaning of these uncertainties

Key Words : *Rainfall-runoff analysis , Fokker-Planck equation , Uncertainty of model parameters , Kalman filter*

1．はじめに

近年，設計基準を超える豪雨が多発し，事前避難や減災などのソフト防災対策が注目されている．洪水予測は避難情報の発信や洪水被害リスクの評価において，非常に重要な役割を果たしている．洪水予測の特徴の1つは、降雨流出過程に不確実性を有することであり，これを考慮するために多数の研究が行われてきた．例えば，日野ら[1]はKalmanフィルタを導入し洪水予測問題に適用することで，パラメータとシステムノイズの不確実性を考慮できるようにした．その後，星ら[2]はKalmanフィルタを改善し、リイアタイムでの洪水予測システムを実装した．このシステムは北海道において多くの実績がある．その後，椎葉・立川ら[3]は，粒子フィルタリングを洪水予測に取り入れ，非線形システムと非Gaussianシステムに適用できる洪水予測システムを開発した．これらの洪水予測手法には多くの実績があるが，洪水現象の不確実性の性質および物理的な要因に関する研究は十分ではない．

それらに対し、山田・吉見ら[4]は、伊藤の確率微分方程式とFokker-Planck方程式を用いて降雨の不確実性を考慮した流出過程を表現する先行研究を行った．この研究では，不確実性の物理的性質を考慮できる理論が構築された．さらに、Fokker-Planck方程式は本来ブラウン運動を記述する方程式であるため、この研究は巨視的な降雨流出現象と微視的な不確実性の架け橋にもなっている．本研究は，山田・吉見ら[4]の理論に基づき，以下の2点について検討を行った。

１．Fokker-Planck方程式とKalmanフィルタの関係について，本研究では高次元Fokker-Planck方程式から，適切な仮定を設定すると，Kalmanフィルタを理論的に導出することができることを示した．更にこの理論導出に基づき，各パラメータが洪水流の流出高予測区間に与える影響を定量的に評価できる手法を提案した．

２． Fokker-Planck方程式を高次元Fokker-Planck方程式に拡張することで，モデルパラメータの不確実性を考慮で

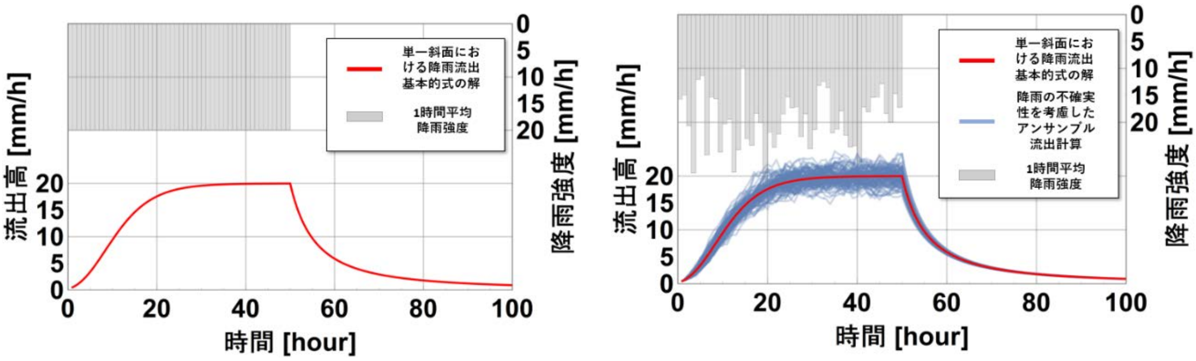

図-1　単一斜面における降雨流出の基礎式の解.
（左側：降雨に不確実性なし．右側：降雨に不確実性あり）

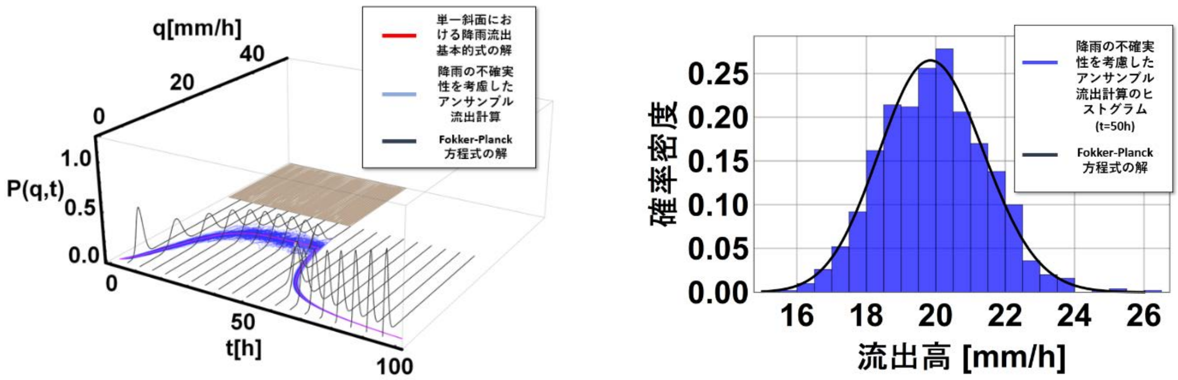

図-2　流出高qの分布の時間発展
(Fokker-Planck方程式の計算結果)

きる一般的な手法を提案した．また，利根川上流域の草木ダム流域を検証例として，パラメータの不確実性が流出高に与える影響を調べた.

２．Fokker-Planck方程式を用いた流出解析

(1) 流出解析の基本式

洪水を予測する際に，降雨から河川への流出までの物流過程を表現する理論式が必要である．本研究では，山田・呉ら[5]によって提案された単一斜面における降雨流出の基本式を用いる.

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^{\beta}(r(t) - q) \qquad (1)$$

ここに，α, βは流域の物理性質（土質，斜面勾配など）によって決まるパラメータである．q(t)は流出高[mm/h]であり，流域の支配断面の流量を流域面積で割ったものである．r(t)は流域平均有効降雨強度[mm/h]である．式(1)を解くことにより，流域の支配断面の流出高と流量または水位の時系列を得ることができる.

(2) Fokker-Planck方程式を用いた流出解析

洪水予測の精度に大きく影響を及ぼす要因の１つは降雨の不確実性である．それに対し，山田・吉見ら[4]がFokker-Planck方程式を用いて，降雨の不確実を考慮できる流出解析手法を提案した.

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^{\beta}(\bar{r}(t) + r'(t) - q) \qquad (2)$$

式(1)の降雨強度$r(t)$を決定論的な部分$\bar{r}(t)$と不確実的な部分$r'(t)$に分けると，式(2)になる．σは降雨強度の不確実性成分の標準偏差とする．降雨の不確実的な部分$r'(t)$をWhite noiseとする．サンプル率が如何に小さくなっても，White noiseの自己相関は0，かつ標準偏差が一定である．降雨強度の場合，無限に小さいサンプル率でデータを取れないため，ある一定なサンプル率で取った観測データで，自己相関を取り，自己相関がある時間区間をT_Lとする．それより大きい間隔で取られたデータは，White noiseとして見なすと，その拡散係数が$\sigma\sqrt{T_L}$になる．式(2)と対応するFokker-Planck方程式は以下になる．ここに，$P(q,t)$は流出高qの確率密度関数である.

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha q^{\beta}(\bar{r}(t) - q)P(q,t)}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\alpha q^{\beta}\sigma\sqrt{T_L}\right)^2 P(q,t)}{\partial q^2} \qquad (3)$$

図-1に単一斜面における降雨流出の基礎式の解を示している．モデルパラメータは$\alpha = 0.03, \beta = 0.6$と設定されている．左側は降雨強度に不確実性がない場合であり，20mm/hの雨が50時間降り続く場合の流出高である．右側は降雨強度に$\sigma = 5mm/h, T_L = 1h$の不確実成分がある場合の5000回アンサンブル計算の結果を示している．流出高の分散は，時間とともに大きくなるが，ピーク付

近に一定の値になることが分かる．図-2の左はFokker-Planck方程式の解全体を示しており，右はt=50時刻，アンサンブル計算のヒストグラムとFokker-Planck方程式の解を示している．方程式の解はアンサンブル計算の結果と一致していることが分かる．

３．Fokker-Planck方程式とKalmanフィルタ

Kalmanフィルタは実時間洪水予測に多く使用された手法であり，Fokker-Planck方程式と同様に流出過程における不確実性を考慮できる．本節はFokker-Planck方程式とカルマンフィルタの関係について議論する．

(1) 単一斜面における降雨流出基本式に基づくKalmanフィルタ

星ら[6]により，Kalmanフィルタを降雨流出解析に適用する一般的な定式化手法を提案された．その手法を簡単にまとめると以下になる：１，状態変数の伝達方程式を定式化する．２，状態変数の推定誤差共分散伝達方程式を定式化する．３，観測方程式を定式化する．これらの3つの方程式から，Kalmanフィルタを定式化する．観測方程式は観測手法とシステムの関係を表し，Fokker-Planck方程式には含まれていないため，ここでは議論しない．具体的な式の導出を略し，単一斜面における降雨流出基本式に基づく状態変数の伝達方程式は：

$$\begin{pmatrix} q_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\partial f}{\partial q}\Delta t & \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta t & \frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\Delta t - \frac{\partial f}{\partial q}\Delta t - \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta t - \frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる．ここに$f(\alpha,\beta,q)=\alpha q^{\beta}(r(t)-q)$は式(1)の右辺である．下付きkは時刻，$\Delta t$はk時刻と$k+1$時刻の時間差である．式(4)の右辺にk時刻の状態変数(α_k,β_k,q_k)を代入すれば，$k+1$時刻の状態変数$(\alpha_{k+1},\beta_{k+1},q_{k+1})$が得られる．次に，推定誤差共分散伝達方程式は：

$$\begin{pmatrix} Covqq_{k+1} & Cov\alpha q_{k+1} & Covq\beta_{k+1} \\ Cov\alpha q_{k+1} & Cov\alpha\alpha_{k+1} & Cov\alpha\beta_{k+1} \\ Covq\beta_{k+1} & Cov\alpha\beta_{k+1} & Cov\beta\beta_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\phi} \begin{pmatrix} Covqq_{k} & Cov\alpha q_{k} & Covq\beta_{k} \\ Cov\alpha q_{k} & Cov\alpha\alpha_{k} & Cov\alpha\beta_{k} \\ Covq\beta_{k} & Cov\alpha\beta_{k} & Cov\beta\beta_{k} \end{pmatrix} \boldsymbol{\phi}^{T} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\partial f}{\partial q}\Delta t & \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta t & \frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になる．ここにCovは各状態変数の共分散行列である．式(5)を用いて，共分散行列を時間的に更新できる．

(2) Fokker-Planckの近似解

Kalmanフィルタはモデルのパラメータをシステムの状態変数として扱っている．式(3)の場合，Pの独立変数はqとtのみである．パラメータα，βの不確実性を考慮する場合，変数の確率密度関数の独立変数はq，α，β，tの４つとなる．そして，連立常微分方程式で物理システムを記述する場合，方程式の本数と内部変数の個数が一致しないと，方程式が閉じないため，α，βの時間発展を記述する方程式も必要になる．したがって，式(1)は以下の通りになる．

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \alpha q^{\beta}(r(t)-q) \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Kalmanフィルタと比較するため，パラメータα，βの不確実性のみ（Kalmanフィルタは降雨強度の不確実を考慮されていない）を考慮すると，式(6)に対応するFokker-Planck方程式は以下の通りになる．

$$\frac{\partial P(q,\alpha,\beta,t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha q^{\beta}(\bar{r}(t)-q)P(q,\alpha,\beta,t)}{\partial q} = 0 \tag{7}$$

式(7)と式(3)を比較すると，降雨強度の不確実性が考慮されていないため，式(7)の右辺は0となっている．式の左辺は形式上が類似しているが，Pの独立変数が違うため，同様な方程式ではない．式(3)はα，βの不確実性を考慮できないことに対し，式(7)はα，βの確率分布を，初期条件として扱うことができる．最後に，式(7)の解$P(q,\alpha,\beta,t)$をα，βに関して積分すれば，流出高qの確率密度関数$P(q,t)$が得られる．

KalmanフィルタとFokker-Planck方程式の関係を明らかにするため，式(7)をさらに簡単化する必要がある．式(6)に対して摂動展開をすると式(8)になる．ここに，εは摂動のオーダーを表す変数である．さらに，εの0次オーダー（下付き0）を決定論的な式と考え，不確実性がないとし，システムの不確実性はすべてεの１次オーダーの式，式(9)に含まれていることを仮定する．

$$\begin{cases} \frac{dq_0}{dt} + \varepsilon\frac{dq_1}{dt} = f(\alpha_0+\varepsilon\alpha_1, \beta_0+\varepsilon\beta_1, q_0+\varepsilon q_1, t) \\ \frac{d\alpha_0}{dt} + \varepsilon\frac{d\alpha_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta_0}{dt} + \varepsilon\frac{d\beta_1}{dt} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}q_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \beta}\beta_1 \\ \frac{d\alpha_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta_1}{dt} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

式(9)と対応するFokker-Planck方程式は式(10)になる．

$$\frac{\partial P(q_1,\alpha_1,\beta_1,t)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial q}q_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \beta}\beta_1\right)P(q_1,\alpha_1,\beta_1,t)}{\partial q_1} = 0 \tag{10}$$

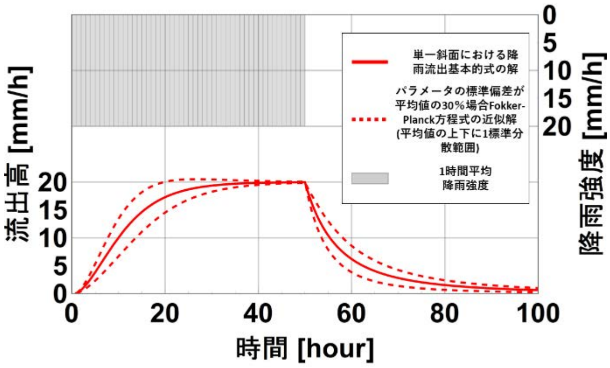

図-3　Fokker-Planck方程式の近似解
（平均値上下1標準偏差範囲）

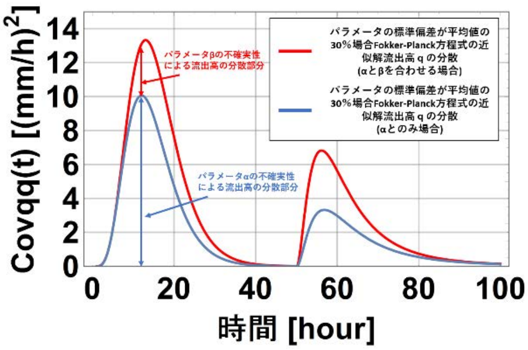

図-4　Fokker-Planck方程式の近似解
（流出高の分散）

式(10)の右辺に状態変数をかけ，積分すると，共分散行列の時間発展に関する連立常微分方程式，式(11)が得られる．式(11)はFokker-Planck方程式(10)の近似式とも言える．

$$\begin{cases} \dfrac{dCovqq(t)}{dt} = 2\dfrac{\partial f}{\partial q}Covqq(t) + 2\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}Cov\alpha q(t) + 2\dfrac{\partial f}{\partial \beta}Cov\beta q(t) \\ \dfrac{dCov\alpha q(t)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial q}Cov\alpha q(t) + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}Cov\alpha\alpha(t) + \dfrac{\partial f}{\partial \beta}Cov\alpha\beta(t) \\ \dfrac{dCov\beta q(t)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial q}Cov\beta q(t) + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}Cov\alpha\beta(t) + \dfrac{\partial f}{\partial \beta}Cov\beta\beta(t) \\ \dfrac{dCov\alpha\alpha(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dCov\alpha\beta(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dCov\beta\beta(t)}{dt} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

式(11)を式(4)と比較すると，式(4)は式(11)の時間方向の二次精度の差分式であることがわかった．このことから，Kalmanフィルタは実質上Fokker-Planck方程式の近似解であることを明らかにした．さらに，式(11)は厳密解が存在する．特にパラメータα, βの不確実性のみを考慮する場合（初期条件$Cov\alpha\alpha(0)$と$Cov\beta\beta(0)$以外に全部0とする），その厳密解を式(12)に示している．

初期条件

$$\begin{cases} Covqq(0) = 0 \\ Cov\alpha q(0) = 0 \\ Cov\beta q(0) = 0 \\ Cov\alpha\alpha(0) = Cov\alpha\alpha(0) \\ Cov\alpha\beta(0) = 0 \\ Cov\beta\beta(0) = Cov\beta\beta(0) \end{cases}$$

$$A(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial f}{\partial q}(T)dT} \tag{12}$$

$$\begin{cases} Covqq(t) = A(t)^2 \displaystyle\int_0^t \frac{2}{A(T)^2}\left(Cov\alpha q(T) + Cov\beta q(T)\right)dT \\ Cov\alpha q(t) = Cov\alpha\alpha(0)A(t)\displaystyle\int_0^t \frac{1}{A(T)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}(T)dT \\ Cov\beta q(t) = Cov\beta\beta(0)A(t)\displaystyle\int_0^t \frac{1}{A(T)}\frac{\partial f}{\partial \beta}(T)dT \\ Cov\alpha\alpha(t) = Cov\alpha\alpha(0) \\ Cov\alpha\beta(t) = 0 \\ Cov\beta\beta(t) = Cov\beta\beta(0) \end{cases}$$

式(12)を分析すると，共分散行列の時間発展は線形であることが分かった．この結果を利用し，パラメータが洪水の流出高予測区間に与える影響を定量的に評価できる．

式(12)を検証するため，以下の理想実験を行った．パラメータα, βは正規分布に従うと仮定し，α, $\beta \sim N(0.045, (0.3 * 0.045)^2), N(0.40, (0.3 * 0.40)^2)$　と設定した．降雨強度が20mm/hの雨を50時間降り続くと設定した．解く順番は下記のとおり：降雨強度とα，βの平均値を式(1)に代入し，方程式を解く．得られた解q(t)を$f(\alpha, \beta, q)$に代入し，$(\partial f/\partial \alpha)(t)$，$(\partial f/\partial \beta)(t)$，$(\partial f/\partial q)(t)$を算出する．最後に，その結果を式(12)に代入し，$Covqq(t)$が得られる．

図-3は流出高の平均値上下1標準偏差分の範囲を示している．流出高が正規分布に従うと仮定する場合，この範囲は68%予測区間である．標準偏差の二乗が分散であり，つまり式(12)の$Covqq(t)$になる．**図-4**は$Covqq(t)$の時系列を示している。　$Covqq(t)$は初期条件$Cov\alpha\alpha(0)$と$Cov\beta\beta(0)$に関して線形であることから，パラメータαによる分散とパラメータβによる分散を評価することができる．今後はこの手法を実時間の洪水予測に適用し，予測結果の不確実性を物理成因ことに定量的に評価を行っていく．

4．Fokker-Planck方程式近似解の一般化

(1) 鉛直方向浸透を考慮した降雨流出の基礎式

単一斜面における降雨流出の基礎式は雨の鉛直方向の浸透を考慮していない．それに対し，吉見・山田[7]らは式(1)を以下のように拡張した．まず，山腹斜面が複数の層で構成されると考え，n層目における鉛直浸透について考える．n-1層からn層目への浸透量V_{n-1}（$= b_{n-1}S_{n-1}$），n層目からn+1層目への浸透量V_{n-1}($= b_nS_n$）と各層における流出に寄与する雨量(流出に寄与する降雨量)の連続関係から式(13)が得られる．

$$\frac{ds_n}{dt} = V_{n-1} - r_{nm} - V_n \tag{13}$$

$$\begin{cases} r_{nm} = 0 & (s_n < h_{nm}) \\ r_{nm} = a_{nm}(s_n - h_{nm}) & (s_n \geq h_{nm}) \end{cases} \tag{14}$$

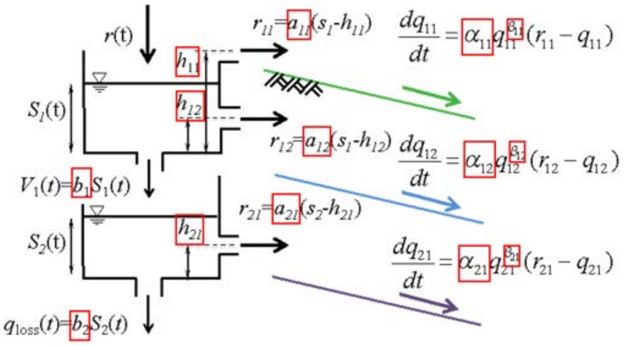

図-5　２段３層モデルの模式図と基本式

各層の流出に寄与する降雨量は式(14)に示すように土層内水位s_nが各層の保水力h_{nm}を超えた時点で発生するとする．また，鉛直方向への浸透量V_nは土層内水位s_nに比例するものとした．さらに，式(14)中のr_{nm}を式(15)の基礎式に斜面流出に寄与する降雨として与えることで一連の斜面計算が行われる．

$$\frac{dq_{mn}}{dt}=\alpha_{nm}q_{nm}^{\beta_{nm}}(r_{nm}-q_{nm}) \tag{15}$$

上述の鉛直浸透を考慮した降雨流出モデルを2段3層の構造だと考える場合，モデルの構造を**図-5**に示す

モデルのパラメータは14個ある．パラメータをすべてシステム変数と考慮すると，方程式は20元連立常微分方程式になり，それと対応する高次元Fokker-Planck方程式も20次元の位相空間における方程式となり，直接に数値解を求めるのはほぼ不可能である．そこで，第３．節に使った近似解を求める方法を一般化する必要がある．

(2) 摂動法により状態方程式の線形化

連立常微分方程式は以下のように書くことができる．

$$d\vec{X}(t)=\vec{f}(\vec{X})dt \tag{16}$$

ここに，$\vec{X}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),\cdots,x_n(t)),\vec{f}=(f_1(\vec{X}),f_2(\vec{X}),f_3(\vec{X}),\cdots,f_n(\vec{X}))$である．線形化するには，摂動法を用いる．式(16)の解を以下のように分解する．

$$\vec{X}(t)=\vec{X}^0(t)+\varepsilon\vec{X}^1(t)+\varepsilon^2\vec{X}^1(t)+\cdots \tag{17}$$

εの１次オーダーまでを考慮し，式(16)を代入し，右側をTaylor展開すると，εの１次オーダー方程式は線形になる．

$$d\vec{X}^1(t)=D_xf\left(\vec{X}^0(t)\right)\cdot\vec{X}^1(t)dt \tag{18}$$

ここに，$D_{\vec{x}}\vec{f}\left(\vec{X}^0(t)\right)$は$\vec{f}$のヤコビ行列である．$(D_{\vec{x}}\vec{f})_{ij}=((\partial f_i)/(\partial x_j))$．式(16)から式(18)までの操作によって，一般的な連立方程式を線形化できた．これによって，εの１次オーダーの不確定性を線形方程式で検討することができるようになった．

(3) Fokker-Planck方程式の近似解の一般化

式(18)と対応するFokker-Planck方程式は下記のとおり．一般的にランダム変数を記述するには，確率密度関数が

$$\frac{\partial P(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)P(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)}{\partial x_i}=0 \tag{19}$$

用いられる．確率密度関数にはランダム変数のすべての情報が含まれている．しかし，確率密度関数を直接得ることが困難である場合，ランダム変数のモーメントで表すこともできる．

キュムラント展開定理(cumulant expansion theorem)は確率密度関数をモーメントに関する漸近級数で表すことができる定理である．ランダム変数のモーメントが分かるとランダム変数の一部の情報が分かる．したがって，確率密度関数の時間発展を直接求めることが困難である場合は，モーメントの時間発展を求めることが考えられるXのn-階モーメントの定義は下記のとおり．

$$\langle\vec{X}^n\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{X}^n\,P(\vec{X})d\vec{X} \tag{20}$$

式(19)と式(20)を合わせて，モーメントの時間発展を支配する方程式を導くことができる．以下にランダム変数Xの１階モーメントの支配方程式を導出する．

$$\frac{d\langle\vec{X}\rangle(t)}{dt}=\langle\vec{f}(\vec{X})\rangle\rightarrow\frac{d\langle\vec{X}\rangle(t)}{dt}=\vec{f}(\langle\vec{X}\rangle) \tag{21}$$

モーメントを取る操作は線形演算子なので，$\vec{f}$が線形である場合，モーメントを取る操作と$\vec{f}$の順番が交換できる．$\vec{f}$が非線形である場合モーメントに関する方程式は完結問題（closure problem）が発生するため，以下は線形化した後の方程式(18)を議論する．式(18)，式(19),式(20)を合わせると$\vec{X}^1(t)$の1と2階モーメントの支配方程式を導出できる．

$$\frac{d\langle\vec{X}^1\rangle(t)}{dt}=D_xf\left(\vec{X}^0(t)\right)\cdot\langle\vec{X}^1\rangle(t)dt \tag{22}$$

$$\frac{d\langle x_i^1x_j^1\rangle(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}(D_{\vec{x}}\vec{f})_{ik}\langle x_i^1x_k^1\rangle(t)+\sum_{l=1}^{n}(D_{\vec{x}}\vec{f})_{lj}\langle x_i^1x_j^1\rangle(t) \tag{23}$$

５．実流域への応用

式(23)の性質を議論するため，以下の降雨イベントを例として計算を行った．対象とする流域は草木ダム流域である．草木ダムは利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである．ダムが支配している流域面積は約254km²であり，計算イベントは2003年8月8日から8月12日までの洪水を選定した．総雨量は約250mmである．

１層モデルの場合，計算条件は下記の通り：降雨強度の不確定性を考慮しない．モデルパラメータα，βの不確定性は正規分布に従うと仮定し，$\alpha,\beta\sim N(0.045,(k*0.045)^2),N(0.41,(k*0.41)^2)$と設定した．$k$は標準偏差を平均値の割合で表す係数であり，

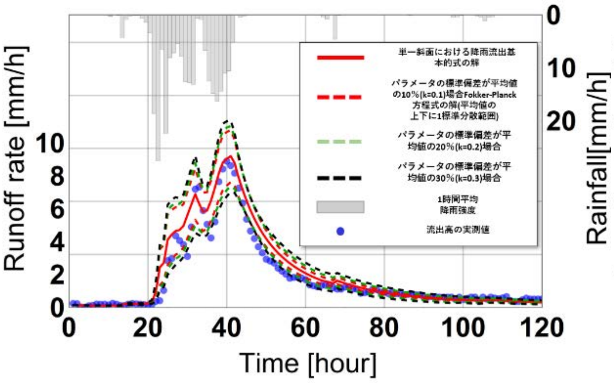

図-6　草木ダム2003-08-08降雨イベント
流出高の予測範囲（1層モデル）

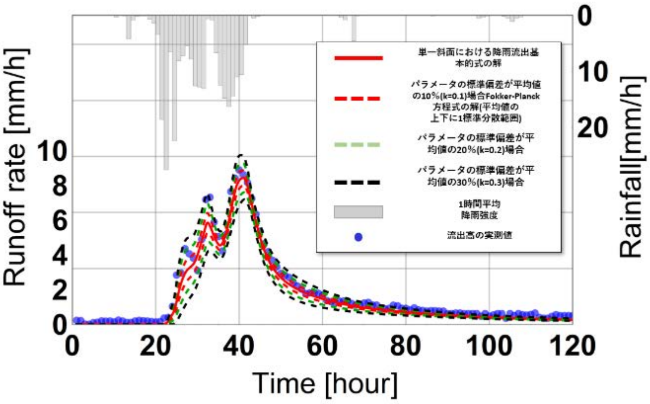

図-7　草木ダム2003-08-08降雨イベント
流出高の予測範囲（2段3層モデル）

計算は$k = 0.1,0.2,0.3$三ケースを計算した．2段3層モデルの場合，パラメータの不確実性は１層モデルと同様に正規分布だと仮定した．14個パラメータの平均値は$\alpha_{11} = 0.1266, \alpha_{12} = 0.1048, \alpha_{21} = 0.0521, \beta_{11} = 0.6832, \beta_{12} = 0.6865, \beta_{21} = 0.6779, a_{11} = 0.5722, a_{12} = 0.3430, a_{21} = 0.1418, b_1 = 0.1233, b_2 = 0.0455, h_{11} = 20m, h_{12} = 10m, h_{21} = 5m$である．

図-6に1層モデルの計算結果を示す．図に平均値の上下１標準偏差の範囲と流出高の実測値を示している．この範囲は信頼性68%の予測区間とも言いえる．ピーク付近の予測区間が一番広く，その幅は平均値の上下約25%であることが分かった．一方，パラメータの標準偏差が増えても，予測区間はほぼ変化しないことが分かった．**図-7**に2段3層モデルの計算結果を示す．パラメータの標準偏差が平均値の10%，20%，30%場合，ピーク付近流出高の68%の予測区間の幅はそれぞれ平均値の上下10%，15%，20%ほどある．**図-6**の1層モデルの結果と比較すると，2段3層モデルの計算結果の幅が狭いことが分かった．これより，パラメータの不確実性が同様の場合，詳細なモデルほど，計算結果が安定していることが分かった．なお，1層モデルの結果は予測幅がパラメータの標準偏差に対して鈍感であることに対し，2段3層モデルは敏感である．その原因は，詳細なモデルほど，パラメータの組み合わせによって，より多くの流出波形が表現できる可能性がある．今後，パラメータの不確定性はどんな値を取るべきかを検討する．

６．まとめ

本研究は高次元Fokker-Planck方程式の近似解法を用いたパラメータの不確実性考慮できる降雨流出解析手法を提案した．第2節は，本研究の基礎となる降雨の不確実性を考慮した降雨流出解析手法を紹介した．第3節は，Fokker-Planck方程式とKalmanフィルタの関係を調べた．高次元Fokker-Planck方程式と対応する元の状態方程式を線形化し，その1次オーダーの2階モーメント方程式がKalmanフィルタ理論式になる．第4節は，詳細なモデルと対応させるため，山田・吉見ら[4]の理論を拡張し，パラメータの不確実性を入れた一般的な高次元Fokker-Planck方程式と近似解法を提案した．第5節は渡良瀬川流域の草木ダム流域を検証例として，高次元Fokker-Planck方程式の近似解法を検証した．その結果，当手法はパラメータの不確実が流出高に与える影響を表現できることが分かった．なお、 1層モデルの結果と比較すると，2段3層モデルの計算結果の幅は狭いことが分かった．これより，パラメータの不確定性が同様の場合，詳細なモデルほど，計算結果が安定していることが分かった．

参考文献

1) 日野幹雄：水文流出系予測へのカルマンフィルター理論の適用，土木学会論文集，No.221, pp.39-47, 1974.
2) 星清，山岡勲，茂木 映治：流出予測における適応制御理論の応用に関する研究，昭和56年度土木学会，北海道支部論文報告集,Ⅱ-17, 1981.
3) 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムソンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，土木学会論文集B1（水工学），67(4)，pp.I_511-I_516，2011.
4) 吉見和紘，山田正，山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価，土木学会論文集B1(水工学)，Vol.71, No.4, I_259-I264, 2015.
5) 呉修一,山田正,吉川秀夫:表面流の発生機構を考慮した斜面多層降雨流出計算手法に関する研究，土木学会水工学論文集, Vol.49, pp.169-174, 2005.
6) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：「実時間洪水予測システム理論解説書」, 2004.
7) 吉見和紘，山田正：鉛直浸透を考慮した斜面内流出計算手法の提案，土木学会論文集G（環境），69(5)，pp.I_145-I_150, 2013.

(2020. 4. 2受付)