

局所慣性方程式とGPUによる 大規模氾濫の高解像度・高速計算

RAPID AND HIGH RESOLUTION SIMULATION OF LARGE SCALE
INUNDATION USING LOCAL INERTIAL EQUATION AND/OR GPU

太田一行¹・佐藤隆宏¹・新井涼允¹・豊田康嗣¹
Kazuyuki OTA, Takahiro SATO, Ryosuke ARAI and Yasushi TOYODA

¹正会員 工博 一般財団法人電力中央研究所 (〒270-1196 我孫子市我孫子1646)

This study presents rapid numerical simulation of large flood inundation using the local inertial equation (LIE) and/or GPU. We compared simulated results of the local inertial equation and the shallow water equation (SWE) through numerical simulation of the Kinu river flood inundation in 2015. Inundated flow depth simulated by the LIE and SWE agreed well except for the region close to the overflow. Simulated results of flow velocity by the LIE and SWE were quite different at the regions which have high Froude number. These results indicated that LIE and SWE should be appropriately selected according to the objective of the simulation. As to the speed, simulation using the LIE was 1.6 times faster than that using the SWE. GPU parallelization using OpenACC technique made simulations 9.3 times faster regardless of the LIE or SWE.

Key Words : flood simulation, shallow water equation, local inertial equation, GPU, OpenACC

1. はじめに

令和元年台風第19号では、関東・東北地方を中心に多数かつ大規模な浸水被害が発生した。大規模な内水または外水氾濫による浸水深を事前に予測する手段の一つとして、高精度かつ高速な解析プログラムを用いたリアルタイムの氾濫シミュレーションが考えられる。近年の航空測量技術(LP測量, 写真測量)の進展により、氾濫シミュレーションに必要な標高データは国内各地で整備されつつある。しかし、微地形・堤防などの細かな情報を反映した解析を行うためには、空間的に高解像度な標高データ (~10m) を与えることが必要となる。この場合、氾濫規模が大規模になれば解析格子は百万個以上のオーダーとなり、高速に計算を行うためにスパコンまたは計算専用サーバの利用が必要となり、河川または都市計画に係わる現場の実務者にとってハードルが高くなるものと考えられる。

高速の氾濫シミュレーション技術として、浅水流方程式から移流慣性項を外した方程式形(局所慣性方程式)が近年検討されている¹⁾。局所慣性方程式は拡散波方程式に局所慣性項(時間変化項)を追加した方程式に相

当するため、浅水流方程式と拡散波方程式の中間的な式形となっている。局所慣性方程式は基礎式が双曲型偏微分方程式であり、方程式の安定条件で既定される許容タイムステップが比較的粗いことから、時間発展を高速に計算できる点が利点とされる¹⁾⁴⁾。Gustavoら²⁾は、浅水流方程式と局所慣性方程式の差異について、1次元数値計算と解析解の比較により検討している。小林ら³⁾は、固定タイムステップとした浅水流方程式と局所慣性方程式の違いを検討し、段波および氾濫水の伝搬特性の違いを評価している。氾濫予測への実用性については、局所慣性方程式を用いて洪水氾濫の痕跡水位を良好かつ高速に再現できたとの報告もある⁵⁾。しかし、河川氾濫における溢水・決壊箇所周辺の高Fr数の流れを含めた局所慣性方程式の特性について、依然として不明な点が残されており、計算の目的に応じて実務者が解析手法を選択できるまでに知見が体系化されていないのが現状である。

流れの計算を並列計算によって高速化する手法として、複数のCPUでマルチタスクを行うOpenMPまたはMPI並列が三次元流体解析⁶⁾などで多く用いられてきた。一方、様々な分野の数値シミュレーションにおいて近年、GPU(Graphics Processing Unit)を用いた高速計算の事例が増えてきている。GPUは元々は画像処理を行う集積回路

として開発されたが、大量の画素データの処理を画素毎に独立して行える特徴を活かして、汎用計算にも応用されている。GPUはゲーム、映像編集、3D CAD等の用途のため市販のPCに組み込まれていることも多いため、従来の並列計算用の計算機に比べて安価かつ簡単に導入できる利点がある。吉田らは浅水流方程式にGPU並列を施し、数倍から数十倍の高速化に成功している。しかし、河川工学分野においてGPUを利用した解析事例は依然として限られており、河川氾濫解析への高速化性能の評価については不明である。

以上の背景から本研究では、高解像度計算格子を用いた大規模氾濫シミュレーションに対する局所慣性方程式およびGPUの適用性・性能の評価を目的とする。平成27年9月関東・東北豪雨による氾濫を対象として、局所慣性方程式と浅水流方程式を用いた再現解析をそれぞれ実施し、解析結果の違いについて考察を行う。また、GPU並列計算と逐次計算（非並列計算）をそれぞれ実施し、GPUによる高速化の効果を検討する。

2. 数値計算モデル

浅水流方程式の連続式および運動量保存式はデカルト座標系を用いると以下のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial vM}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - gn^2 u \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (2)$$

局所慣性 移流慣性 水面勾配 摩擦勾配

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial vN}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - gn^2 v \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (3)$$

局所慣性 移流慣性 水面勾配 摩擦勾配

ここで、 h ：水深、 n ：マニング粗度係数、 u, v ：それぞれ x, y 方向の流速、 $M = uh, N = vh, H$ ：水位($H = h + z$, z は地盤高)、 g ：重力加速度である。局所慣性方程式は、式(2)(3)左辺から移流慣性項を除外した方程式であり、本研究における浅水流方程式と局所慣性方程式の違いは、移流慣性項の有無とタイムステップの2点のみである。離散化については川池⁸⁾に倣って、時間方向差分にはLeap frog法、移流慣性項にはDoner Cell法、摩擦勾配項には半陰解法、それ以外の項には中心差分法をそれぞれ適用する。氾濫水の先端については川池⁸⁾と同様に、隣り合う格子との地盤高の関係に応じて、以下のように段落ち式あるいは越流公式を適用する。

$$M_0 = \begin{cases} \mu h \sqrt{gh} & \text{for } z \geq z_d \text{ (段落ち式)} \\ \mu' h_1 \sqrt{2gh_1} & \text{for } z < z_d \text{ (越流公式)} \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 M_0 ：氾濫水先端における流量フラックス、 h_1 ：ドライベッド側の地盤高を基準とした越流水深、 z ：氾濫水先端の地盤高、 z_d ：ドライベッド側の地盤高であ

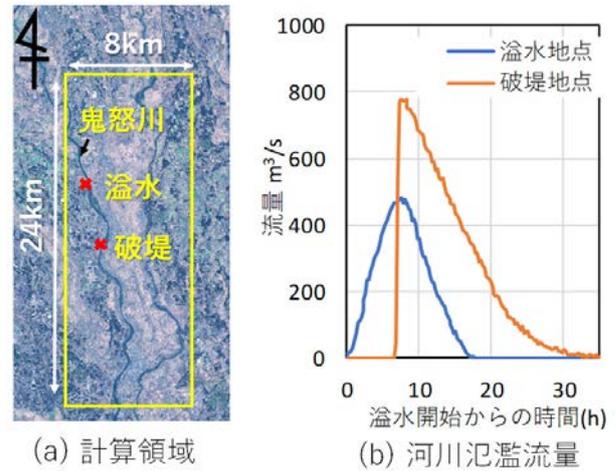


図-1 (a)計算領域および(b)河川氾濫流量

り、 $\mu = (2/3)^{3/2}$ 、 $\mu' = 0.35$ を用いる⁸⁾。なお、国土交通省・洪水浸水想定区域図作成マニュアル⁹⁾の基礎式の考え方として、浅水流方程式に家屋・建屋等の影響を空隙率で考慮することが示されているが、本研究は移流項の影響に着目するため、基礎式に空隙率を考慮しない。

タイムステップは、数値流体計算の安定条件として良く用いられるCFL条件に基づいて設定する。局所慣性方程式のCFL条件は以下のように与えられる⁴⁾。

$$\Delta t < \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_{\max}}} \quad (5)$$

ここで、 h_{\max} ：全計算格子における最大水深、 α ： $0 < \alpha < 1$ の値を取る安全率であり、CFL条件が必要条件であり十分条件でないために設定される係数である。本研究では $\alpha = 0.35$ とした。

浅水流方程式のCFL条件は以下ようになる。

$$\Delta t < \alpha \frac{\Delta x}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{gh} \right)_{\max}} \quad (6)$$

分母は $\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{gh}$ の全計算格子における最大値を示す。 α は局所慣性方程式の場合と同じ $\alpha = 0.35$ とした。浅水流方程式と局所慣性方程式のタイムステップの違いは、情報伝達速度（式(5)(6)右辺の分母）に流速を含むかどうかであり、浅水流方程式はより細かいタイムステップが必要とされる。

GPU並列を組み込んだ解析プログラムのコンパイルにはPGI fortran compilerを用いた。GPU並列化のプログラミング法には、OpenACC(Open Accelerator)を用いた。OpenACCではプログラム内に指示文を記述することで、CPU-GPU間のデータ転送、GPU側での並列計算を指示する。演算精度は、高解像度大規模計算におけるCPUおよびGPUのメモリ容量を考慮して、水位・水深・標高値は倍精度とし、残りの変数は単精度とした。計算機には、市販のwindows 10 ノートPC (iiyama社製、SENSE-15QQP43-i7-QVPS)をそのまま用いた。CPUはCore i7-9750H (インテル社製)、GPUはQuadro P4200 8GB

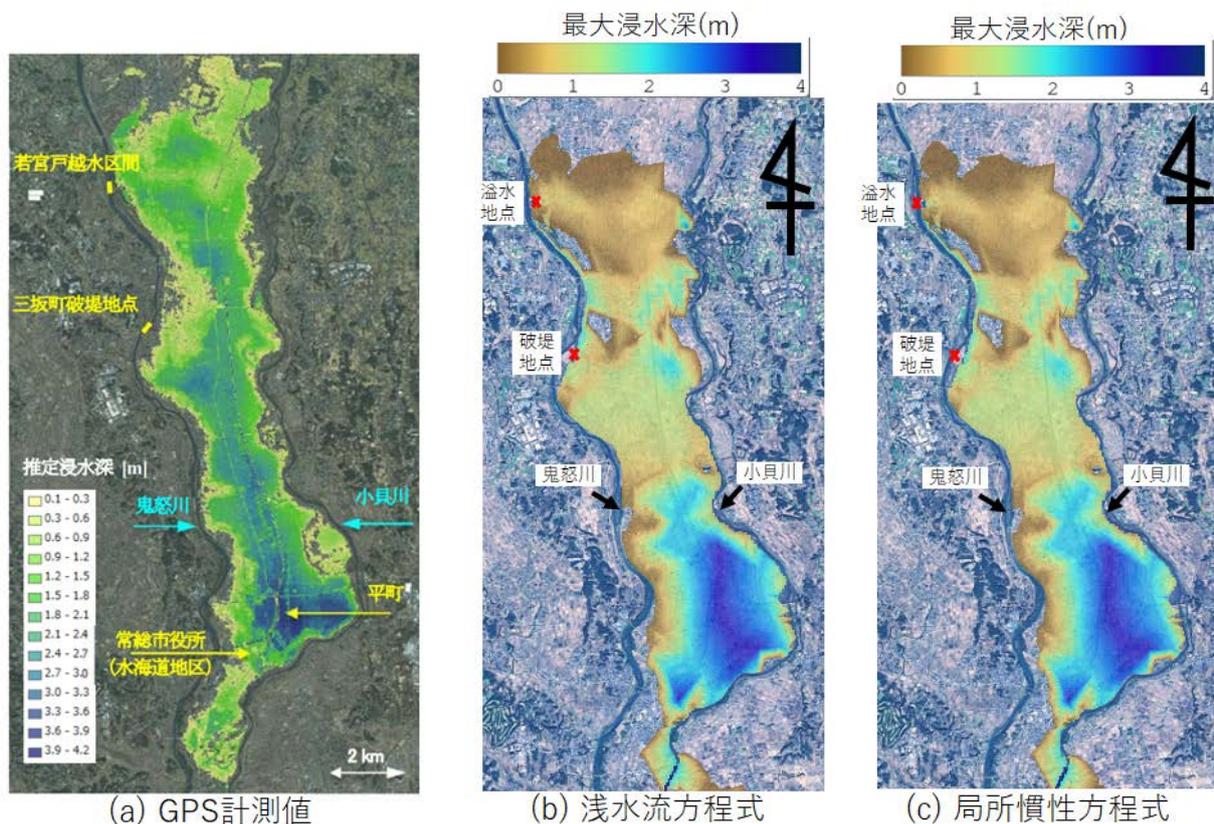


図-2 GPS計測値と解析結果の比較：(a)GPS計測値 (佐山・寶¹²⁾の図-2), (b)浅水流方程式, (c)局所慣性方程式

(NVIDIA社製)が搭載されている。なお、本PCの本体価格は約28万円(2020年3月現在)であり、汎用的なノートPCと同等程度である。

3. 計算対象

平成27年9月関東・東北豪雨における鬼怒川を対象とした氾濫計算を実施した。標高データには、国土地理院から入手可能な10mメッシュデータ(解像度は東西方向8m, 南北方向12m)を用いた。計算領域は図-1(a)の通りである。地形には堤防を考慮し、幹線排水路などの中小河川については国土地理院の標高データをそのまま用いた。本研究は計算の基礎式およびGPU並列計算の効果に着目するため、土地利用については簡単な仮定をした。即ち、家屋・建屋については、特段に考慮しなかった。また、粗度係数は全域で0.1とした。計算格子数は約200万個である。この格子数は、同じ鬼怒川氾濫を解析した2つの既往事例^{10,11)}よりも50倍程度多く、オーダーとして3次元解析の格子数に相当する。従って本検討により、大規模河川氾濫の高解像度計算に対するGPUの有用性も含めた検証が可能である。ただし、スパコン「京」により鬼怒川氾濫を解析した小林ら³⁾の格子数1466万格子よりは少ないことを付け加えておく。また、計算継続時間は36時間とした。

流入条件については、二瓶・大槻¹⁰⁾によって示され

ている溢水・破堤地点における想定氾濫流量のヒドログラフを各地点で与えた(図-1(b))。流入部では流量フラックスを東向きに与えた。計算領域の境界では自由流出条件を課した。なお、実際の鬼怒川氾濫においては、幹線排水路である八間堀川に氾濫水が大量に流入し、高速に下流に伝搬したことが早期の浸水発生に影響したとの報告もあり、既往の河川氾濫解析では幹線排水路は一次元解析で別途考慮した研究もある^{10,11)}。しかし、本研究では解析モデルの基礎式の比較検討を主目的とするため、河道については簡単に国土地理院10mメッシュデータの標高値を与えて、ドライベッドの初期条件とした。

4. 計算結果および考察

佐山・寶¹²⁾は、浸水位のGPS計測によって鬼怒川氾濫時の最大浸水位の空間分布を推定している。推定精度は、標高誤差の影響も含めて0.55m以下とされる。図-2にGPS計測値と数値計算の最大浸水深の比較を示す。浅水流方程式と局所慣性方程式のいずれの結果も、計測値の浸水範囲を概ね捉えている。計測値において最大浸水深の面的な最大値は3.5~3.9mであり、いずれの計算手法も計測値と整合している。しかし、解析では小貝川の堤防が国土地理院10mメッシュデータに反映されていないため、氾濫水が小貝川の下流部を越えて左岸側堤内地まで到達している。また、家屋・建屋、排水機の運用などの

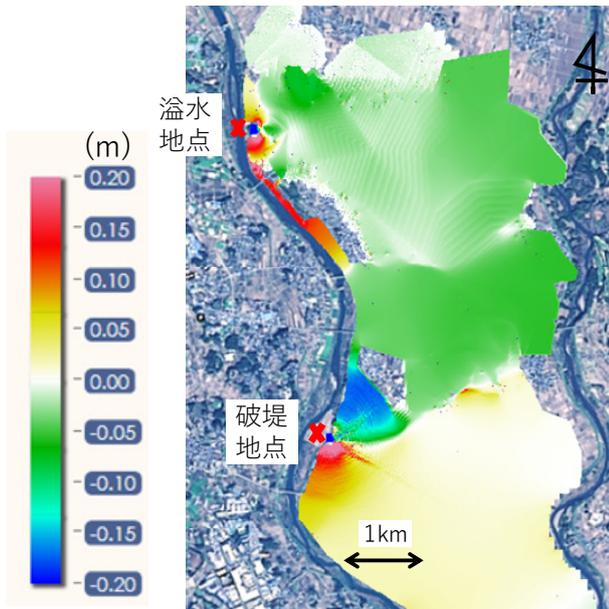


図-3 最大浸水深の両解析結果の差分。正值は局所慣性方程式の最大浸水深がより大きいことを意味する。

細かい条件を考慮していないことから、浸水分布も実際と異なる部分もあると思われる。しかし、本研究の目的は大規模河川氾濫に対する数値計算モデルとGPUの適用性評価であるため、氾濫規模については概ね再現していると評価し、詳細な再現精度についてはこれ以上追求しない。浅水方程式と局所慣性方程式の最大浸水深の結果はかなり類似している。最大浸水深の差異を明示するため、浅水方程式の結果に対する局所慣性方程式の結果の差分を図-3に示す。正值（赤色、黄色）は局所慣性方程式の最大浸水深がより大きく、負値（青色、緑色）はその逆である。後述する溢水・破堤地点の周辺を除けば、浅水方程式と局所慣性方程式の最大浸水深の差異は0.1m以下である。溢水地点の周辺を見ると、東側は全体的に局所慣性方程式の最大浸水深が低く、鬼怒川沿いの南側は局所慣性方程式の最大浸水深が大きい。破堤地点の周辺を見ると、北東方向において局所慣性方程式の最大浸水深が0.1~0.2m低く、南側は全体的に局所慣性方程式の最大浸水深が高い。溢水・破堤地点の周辺で解析結果の差異が大きい要因として、流速および地形の影響が考えられる。このため図-4に、溢水・破堤地点周辺の標高、氾濫時（溢水開始から8hr後）での流速ベクトルを整理した。溢水地点の東側は標高の変化は緩やかである。また、溢水地点から鬼怒川沿いに南下するに従い標高が低い。破堤地点の約0.5km東には標高が高い箇所がある。図-4(b)(c)は流速ベクトルとともに流速絶対値のコンターを示している。溢水・破堤地点の周辺では、浅水方程式の方が東側に向かう流速が大きい。流入条件での流量フラックスは東向きで与えられており、浅水方程式では東向きの運動量が移流されているのに対して、局所慣性方程式では移流慣性項を持たないために流速が拡散的になっていると解釈される。この影響は特に、破堤

地点周辺で大きく現れている。破堤地点周辺では0.5km東側に相対的に標高が高い場所があり、高流速の氾濫流が南北に分流するため、両解析結果の流速ベクトル場にも違いが現れている。具体的には、浅水方程式では破堤地点の北側に多く流れ、局所慣性方程式では逆に南側に多く流れたことで、図-3に示される最大浸水深の差異につながっている。

Gustavoら²⁾は、浅水方程式と局所慣性方程式の差異にはFr数が大きく影響をすることを解析解により示している。この原理は、浅水方程式と局所慣性方程式の波速の違いから解釈できる。浅水方程式と局所慣性方程式の波速は以下のように表される。

$$\lambda_{SWE} = \sqrt{u^2 + v^2} \pm \sqrt{gh} \quad (7)$$

$$\lambda_{LIE} = \pm \sqrt{gh} \quad (8)$$

ここに、 λ_{SWE} ：浅水方程式の波速、 λ_{LIE} ：局所慣性方程式の波速である。両者の相対誤差は、以下のように表される。

$$\frac{\lambda_{SWE} - \lambda_{LIE}}{\lambda_{LIE}} = \pm Fr \quad (9)$$

従って、Fr数に比例して、浅水方程式と局所慣性方程式の波速の差異は大きくなる。具体的には、流れの主流方向に対しては、Fr数が大きいほど浅水方程式の方が波速は大きくなる。図-5は図-4(b)(c)と同じ時間における浅水方程式のFr数の分布である。Fr数の大きい溢水・破堤地点の周辺で浅水方程式の方が東方向（主流方向）の流速が大きくなっていることが認められ、Gustavoら²⁾の考察と一致している。局所慣性方程式の流速分布（図-4(c)）は、東方向（主流方向）の流速の過小評価によって余剰した水位エネルギーの運動量拡散によって、南北方向への流速が過大に算出されたと考えられる。言い換えれば、局所慣性方程式で局所的にFr数の小さい所であっても、溢水・破堤付近の再現精度は移流項の有無の影響を受けている。これらの局所慣性方程式の特性は、破堤による土砂の侵食・洗掘、家屋に及ぼす流体力を過小評価することにつながるため、流れの動的な影響を評価する目的では局所慣性方程式は浅水方程式より劣ることが示唆される。

図-6は各計算結果における浸水面積(km²)の時間変化を示す。併せて、以下の相対誤差rも示されている。

$$r = \frac{A_{LIE} - A_{SWE}}{A_{SWE}} \quad (10)$$

ここで、 A_{SWE} ：浅水方程式の浸水面積、 A_{LIE} ：局所慣性方程式の浸水面積である。相対誤差rによると、局所慣性方程式の方が全体的に浸水範囲が大きい結果となっている。この傾向は、小林ら³⁾の検証計算と一致している。この理由は、局所慣性方程式が移流慣性項を持たないため、運動量が拡散的となり、面的に広がり易くなることが考えられる。しかし、浸水面積の差異は溢水の初期で大きいものの、経時的に小さくなる。溢水開始の8時間以降では相対誤差は2%以下となる。従って、最終的な

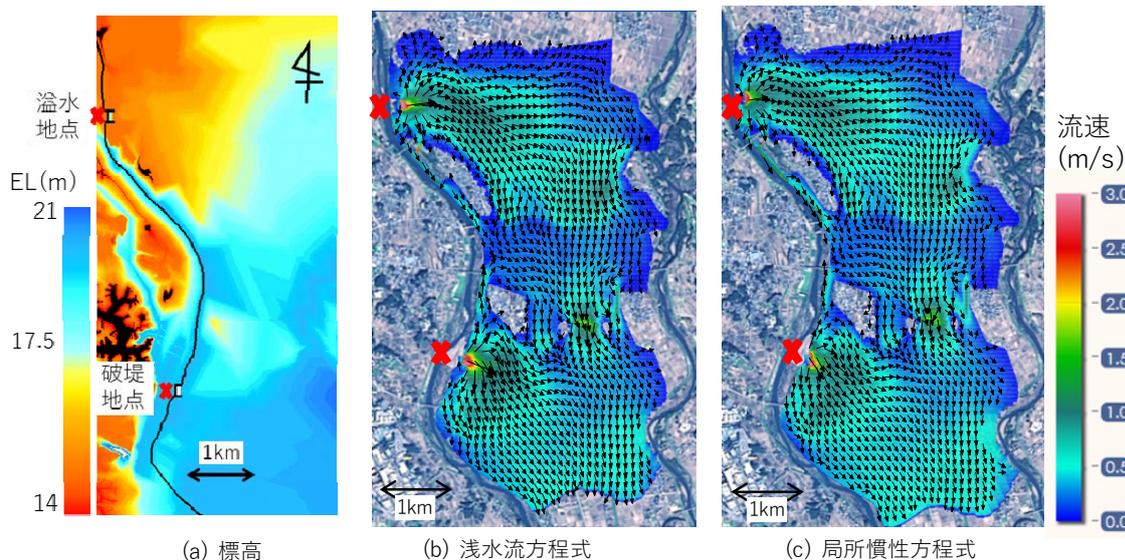


図-4 (a)溢水・破堤地点周辺の標高, (b)浅水流方程式の流速, (c)局所慣性方程式の流速. 計算時間は溢水開始から8時間後.

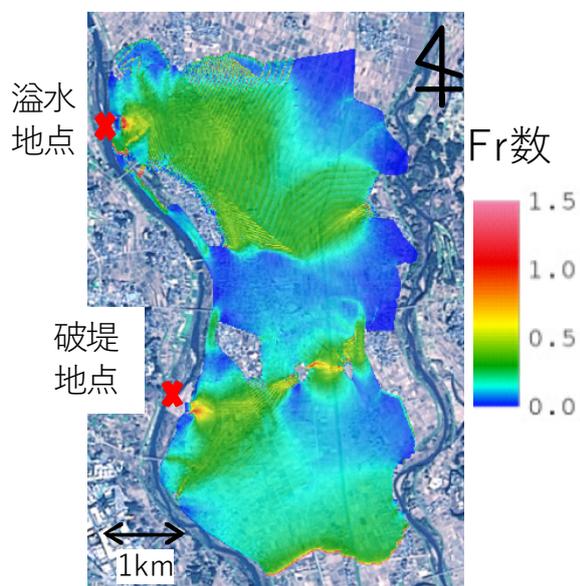


図-5 浅水流方程式のFr数 (溢水開始から8時間後)

浸水範囲を評価する用途であれば、浅水流方程式と局所慣性方程式の解析結果の一致度が非常に高いことから、局所慣性方程式による評価も可能であると考えられる。

最後に、GPUによる並列化を行わない非並列計算（逐次計算）との比較を行う。吉田ら⁷⁾によると、倍精度演算による浅水流方程式の場合、GPU並列の有無における水深の数値誤差は 10^{-13}m 以下とされる。本研究ではメモリの制約から部分的に単精度を設定したため、水深の数値誤差は 1mm 以下であった、全て倍精度にした場合に比べて数値誤差は大きい、実務的には許容範囲の数値誤差と思われる。以下では計算速度について比較する。なお、非並列の計算における計算プログラムのコンパイル設定（最適化オプション等）は、GPU並列の場合と同じとした。計算に要した時間を表-1に整理する。また、

浅水流方程式（非並列）の計算速度を1とした場合の計算速度の倍率を併せて表中に示す。非並列においては、局所慣性方程式は浅水流方程式に比べて1.6倍高速である。この計算速度の差異は、移流慣性項の演算の有無とタイムステップの差異（式(5)(6)）に起因する。GPU並列の場合も、浅水流方程式と局所慣性方程式の計算速度の比は $54.6\text{min} / 33.1\text{min} = 1.65$ 倍であり、非並列の場合とほぼ同じ比率である。従って、高速化に関しては局所慣性方程式による効果に比べて、GPUによる効果が大きいと言える。なお、吉田ら⁷⁾は浅水流方程式のGPU並列を行い、約3万個の計算格子に対して約10倍の高速化を実現している。本研究では約200万個の計算格子に対して9.3倍の高速化である。GPU並列では配列サイズが大きいほど、並列化の効率が向上し、非並列計算との速度差が大きくなることが知られている¹³⁾。このため吉田ら⁷⁾の計算事例に比べて本研究の並列化の効率は低い。この理由としては、本研究で用いた並列プログラミング法のOpenACCがGPU側の詳細なメモリ管理（使用するメモリの種類・場所の指定）を行わず、データの転送・共有が自動的に行われる代わりに高速性能が落ちていくことが考えられる。このようにOpenACCは並列化の実装およびデバッグが容易である利点があるが、GPUの性能を最大限には引き出しにくいことが分かる。

本研究ではGPU搭載の市販ノートPCを用いて、解像度 10m および200万個の計算格子による鬼怒川河川氾濫シミュレーション(36時間分)を、局所慣性方程式では34分以内、浅水流方程式の場合でも55分以内に終えることができた。このような高解像かつ高速の氾濫シミュレーションは、リアルタイムでの浸水深予測のほか、ハザードマップの作成など、多くの用途に有用と考えられる。なお、本研究では浅水流方程式についてもCFL条件に基

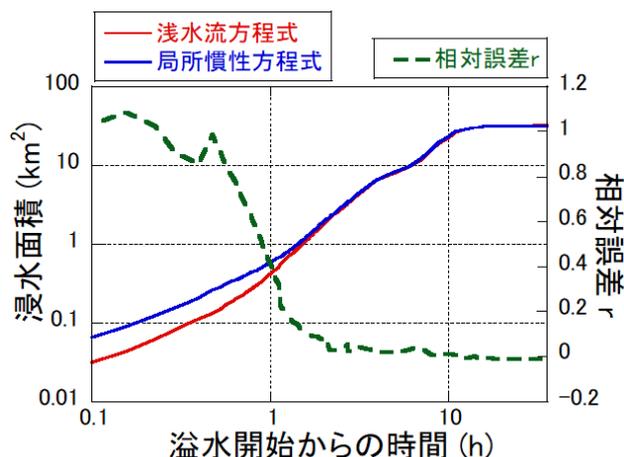


図-6 計算結果の浸水面積および相対誤差

づいてタイムステップを動的に設定した。浅水流方程式では固定タイムステップが用いられることも多いが、固定タイムステップの場合は本研究結果より多くの計算時間を要するものと推測される。

表-1 各計算手法の計算速度の比較。括弧内の数値は浅水流方程式の非並列の計算速度を1とした場合の高速倍率。

浅水流方程式		局所慣性方程式	
非並列	GPU並列	非並列	GPU並列
503.5 min (1.0)	54.6 min (9.23)	308.8 min (1.63)	33.1 min (15.21)

5. おわりに

本研究では、高解像度計算格子を用いた大規模氾濫シミュレーションに対する局所慣性方程式およびGPUの適用性・性能の評価を目的として、平成27年9月関東・東北豪雨による氾濫を対象とした再現解析を実施した。局所慣性方程式と浅水流方程式の比較を行うとともに、GPU並列計算と逐次計算（非並列計算）も比較した。

浅水流方程式と局所慣性方程式の最大浸水深については、溢水・破堤地点の周辺を除けば、両者の差異は0.1m以下であった。Fr数の高い溢水・破堤地点の周辺では、浅水流方程式と局所慣性方程式は流速の大きさ・向きに差異が見られ、局所慣性方程式では移流慣性項を持たないために運動量が拡散する結果が認められた。浸水範囲については、溢水開始の初期を除けば、両者の相対誤差は2%以下であった。即ち、局所慣性方程式の適用性については、巨視的に最大浸水深・浸水範囲を把握するには浅水流方程式と同等の評価ができ、溢水・破堤地点の周辺の流速・流体力を評価する用途では浅水流方程式より劣ることが示された。これらの知見は、氾濫シミュレーションの基礎式を選定する差異の判断材料になるも

のと考えられる。

計算速度については、局所慣性方程式では浅水流方程式に比べて約1.6倍高速化した。また、GPUによる並列計算では、非並列の場合に比べて約9.2倍高速化した。即ち、解析モデルの基礎式よりもGPU並列の方が計算の高速化に大きな影響を及ぼすことが分かった。本研究で実証した市販のGPU搭載ノートPCによる高解像度・高速の氾濫シミュレーションは、リアルタイムでの浸水深予測、ハザードマップの作成などに有用と考えられる。

参考文献

- 1) Bates, P. D., Horritt, M. S., and Fewtrell, T. J.: A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling. *J. Hydrology*, Vol.387(1-2), pp.33-45, 2010.
- 2) Gustavo A. M., de Almeida, and Bates, P.: Applicability of the local inertial approximation of the shallow water equations to flood modeling. *Water Resour. Resear.*, Vol.49(8), pp.4833-4844, 2013.
- 3) 小林健一郎, 中山恵介, 阪口詩乃: 浅水流方程式・局所慣性方程式の精度検証と最適空間解像度に関する検討. 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.74(5), pp.I_1513-I_1518, 2018.
- 4) 山崎大, 田中智大, Bates, P. D.: 局所慣性方程式の導入による洪水氾濫計算の安定化と高速化. 水文・水資源学会誌, Vol.28(3), pp.124-130, 2015
- 5) 安田浩保, 白土正美, 後藤智明, 山田正: 水防活動の支援を目的とした高速演算が可能な浸水域予測モデルの開発. 土木学会論文集, Vol.740, pp.1-17, 2003
- 6) 例えば, 丸山 紀尚・牛島 省: 動的負荷分散を考慮した流体中の任意形状物体運動群の並列計算法, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.70(4), pp.I_835-I_840, 2014.
- 7) 吉田圭介, 田中龍二, 前野詩朗: GPU による河川の浅水流計算の高速化. 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.70(2), pp.I_761-I_768, 2014.
- 8) 川池健司: 都市における氾濫解析手法とその耐水性評価への応用に関する研究, 京都大学博士論文, 2001
- 9) 国土交通省, 洪水浸水想定区域図作成マニュアル(第4版), 2017
- 10) 二瓶泰雄, 大槻順朗: 2015 年関東・東北豪雨における鬼怒川洪水氾濫状況, ながれ, Vol.37, pp.19-25, 2016
- 11) 川池健司, 橋本雅和, 中川一: 水田地帯における氾濫水の伝播特性と土砂堆積に着目した鬼怒川洪水氾濫の再現計算. 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.73(4), pp.I_1435-I_1440, 2017
- 12) 佐山敬洋, 寶馨: 平成 27 年 9 月関東・東北豪雨に伴う鬼怒川氾濫の浸水深分布推定. 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.72(4), pp.I_1171-I_1176, 2016.
- 13) 曾新翔, 赤穂良輔, 石川忠晴, 中村恭志: 非構造三角格子に基づく津波数値解析のGPGPUによる高速化, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.69, No.4, pp.619-624, 2013.

(2020. 4. 2受付)