

信頼区間・予測区間を導入した 水文頻度解析における不確実性評価

UNCERTAINTY EVALUATION OF HYDROLOGICAL FREQUENCY ANALYSIS BASED ON CONFIDENCE INTERVAL AND PREDICTION INTERVAL

清水 啓太¹・山田 正²・山田 朋人³

Keita SHIMIZU, Tadashi YAMADA and Tomohito YAMADA

1学生会員 中央大学 理工学研究科都市人間環境学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

2フェロー会員 中央大学教授 理工学部都市環境学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

3正会員 北海道大学准教授 大学院工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北十三条西8丁目)

Our previous research proposed hydrological frequency analysis method introducing confidence interval based on probability limit method test. This method can quantify uncertainty of rainfall with design return period and introduce concept of risk evaluation into flood control management. On the other hand, prediction interval expresses the range in which the future observed data can be included. By introducing prediction interval into hydrological frequency analysis, it can be possible to quantify the scale and occurrence risk of future heavy hydrological phenomenon. In this research, prediction interval was constructed by adopting the theory of probability limit method test. Prediction interval based on probability limit method test suggests the feasibility of flood control management corresponding to future heavy hydrological phenomenon. This paper shows the framework of hydrological frequency analysis using confidence interval and prediction interval.

Key Words : *probability limit method test, confidence interval, prediction interval, uncertainty evaluation, hydrological frequency analysis*

1. はじめに

近年、我が国では、計画降雨量を超過するような記録的豪雨が多発しており、それらに起因する洪水災害が各地で生起している。このような豪雨の頻発傾向ならびに気候変動に伴う豪雨の激甚化に対応するために、近年では、アンサンブル気候予測データベースを用いた洪水リスク評価の検討が行われている¹⁾²⁾。この検討では、大量アンサンブルデータを用いて、過去数十年間分の観測実績に基づき設定された計画降雨量の“振れ幅”（不確実性）を信頼区間により表し、信頼区間をどこまで議論するかにより、従来では“想定外”として扱われるような規模の激甚豪雨を洪水対策に取り込めることを示している。一方、著者らは、確率限界法検定³⁾に基づく信頼区間⁴⁾を提案しており、これは大量アンサンブルデータを導入した洪水対策の数学的基礎を提示するものである。信頼区間と混合しやすい概念として予測区間がある。

予測区間は、将来期間において生じうる観測値が存在する範囲と定義されるものである。このため、極値の予測区間は、将来期間に実現する年最大値がある割合で含まれる範囲として表せる。予測区間の理論体系の多くは竹内⁵⁾により示されている一方、極値の予測区間に関する既往研究は、著者の知る限りさほど多くはない。従来の水文頻度解析では、極値の予測区間は、将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が正規分布や t 分布に従うとして、構築されてきた。しかしながら、北野ら⁶⁾が指摘するように、将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が従う確率分布は正規分布や t 分布ではなく、一般的に極値分布とすることが妥当と考えられる。ここで、観測極値の個数が十分ならば、中心極限定理により、上述したような正規性の仮定を置くことは妥当であると考えられる。しかしながら、現在までに蓄積されているデータ数は、正規性の仮定を設定するには不十分なものであるといえる。そのため、正規

性の仮定を使用しない、より合理的な極値の予測区間が提案されている。例えば、北野ら⁹⁾は、ベイズ法を用い、かつ、生起率の従う確率分布をガンマ分布と仮定し、観測標本に対して正規性の仮定を設定せずに構成可能な極値の予測区間を提案している。また、Coles et al.⁷⁾や北野ら⁹⁾は、極値分布のパラメータに事前分布を設定し、MCMC 法を適用することで、極値の予測分布および予測区間を構成する手法を示している。

本論では、確率限界法検定の理論に基づいて予測区間を構成する手法を示すとともに、同検定に基づく予測区間を用い、将来期間における激甚現象の生起リスクを算出する理論的枠組みを提示する。加えて、確率限界法検定に基づく予測区間の適用例を紹介する。具体的には、名古屋地方気象台における1901年から1999年までの年最大日降水量の観測値を用いて、確率限界法検定に基づく予測区間を構成し、このことにより、2000年に生起した東海豪雨が統計的に予測可能であることを示す。なお、本論では、名古屋地方気象台における1901年から1999年に渡る99年間分の年最大日降水量の観測値を“対象データ”と称する。

予測区間の導入は、従来では“想定外”として扱われるような激甚豪雨を予測する上で、有益な知見を提供するものである。加えて、本論では、信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析の具体的手法を詳述する。

2. 確率限界法検定の概要

確率限界法検定は、標準一様分布（区間[0,1]の一様分布）における確率限界を算出する過程を必要とする。標準一様分布における確率限界を、仮定した確率分布における棄却限界値をもたらし累積確率として捉えることで、仮定した確率分布における採択域を構成可能とする点が、確率限界法検定の傑出した特徴である。ここで、採択域とは、棄却限界値により構成される区間であり、この区間の外部に観測データが存在する場合、仮説を有意とする。以降では、仮定した累積分布関数の関数形 $F_X(x)$ を式(1)、確率表現関数の関数形 $\chi_X(u)$ を式(2)により表す。

$$u = F_X(x) \quad (1)$$

$$x = \chi_X(u) \quad (2)$$

ここに、 x ：確率変数 X の実現値、 u ：累積確率（確率変数 U の実現値）である。なお、確率表現関数とは、累積分布関数の逆関数である⁹⁾。

(1) 標準一様分布における確率限界の算出

任意の連続確率分布の累積確率 U は、標準一様分布に従う。また、標準一様分布からの順序統計量 $U_{(i)}$ は、母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布に従うため、式(3)が成立する。

$$\begin{aligned} F_{U(i)}(u) &= P(U_{(i)} \leq u) \\ &= I_u(i, n-i+1) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $F_{U(i)}(u)$ ：第 i 順序統計量 $U_{(i)}$ の累積分布関数、 $I_u(i, n-i+1)$ ：母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の累積分布関数、 n ：標本サイズ（観測値の総数）、 i ：標本値を小さい順に並び替えた場合における順位である。

以降では、累積確率 U の棄却限界値の算出手順を記述する。森口³⁾は、標準一様分布における棄却限界値の上方限界を $z_u(i)$ 、下方限界を $z_l(i)$ と定めている。本論では、これらを標準一様分布における確率限界値として、 $z_u(i)$ を上方確率限界値、 $z_l(i)$ を下方確率限界値とも表記する。実績の第 i 順序統計量 $u_{(i)}$ が区間 $[z_l(i), z_u(i)]$ の採択域の外部に存在する場合、データへの標準一様分布の当てはめを有意とみなす。次に、任意の有意水準に応じた、標準一様分布における確率限界値を算出する。そのために、この確率限界値をもたらし確率を求める。森口は、この確率を α と定義している³⁾。確率 α を求めるために、式(4)に示す試行を行う。

$$\alpha_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min \left[\begin{array}{l} I_u(i, n-i+1) \\ I_{1-u}(n-i+1, i) \end{array} \right]_{u=u_{(i)}} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $I_u(i, n-i+1)|_{u=u_{(i)}}$ ：第 i 順序統計量 $u_{(i)}$ の非超過確率、 $I_{1-u}(n-i+1, i)|_{u=u_{(i)}}$ ：第 i 順序統計量 $u_{(i)}$ の超過確率である。

式(4)に示す試行により、標準一様分布からの順序統計量のうちで、それらが従う母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の最端部近傍に生起した順序統計量（以降、 $u_{(i)}$ と表記）が有する確率を算出できる。すなわち、この試行では、 $u_{(i)}$ が母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の左裾部に存在する場合、 $u_{(i)}$ の非超過確率を抽出し、この非超過確率を α_{min} とする一方、 $u_{(i)}$ が母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の右裾部に存在する場合、 $u_{(i)}$ の超過確率を抽出し、この超過確率を α_{min} とする。

上記試行を任意の回数 N だけ繰り返すと、 N 個の α_{min} が得られる。森口³⁾は、これらの α_{min} を $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ に対数変換するとともに、 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ の経験分布を構成し、この経験分布を用いて任意の有意水準に応じた確率 α を算出している。一方、本研究は、これらの $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ に対する極値分布の当てはめを提案している⁴⁾。連続確率分布である極値分布により、 α_{min} の分布を表現することで、任意の有意水準に応じた確率限界値を算出できる。図-1に、 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ が従うと仮定した Gumbel 分布の確率表現関数 $\chi_\alpha(u)$ を示す。 α_{min} の分布は、標準一様分布に従う標本を N 回作成した場合、それらの標本中で、標準一様分布から大きく外れるような順序統計量 $u_{(i)}$ の生起確率の分布を表している。 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ の分布における右裾部に相当する α_{min} は、発生頻度は極めて稀であり、母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の裾部の値をとる $u_{(i)}$ の生起確

率を表す。すなわち、母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布における右裾部に相当する α_{min} は、標準一様分布から大きく外れるような u_0 の生起確率を表す。

次に、 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ が従うと仮定した確率表現関数を $\chi_\alpha(u)$ と表記する。有意水準 p ($0 < p < 1$)で仮定した確率分布における確率限界を算出する場合、上記有意水準に相当する確率 α は、方程式 $\chi_\alpha(1-p) = -\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ を α_{min} について解き、この α_{min} を確率 α とすることで得られる。なお、森口は $\chi_\alpha(u)$ を経験分布により表している。

例えば、有意水準1% (両側確率1%)で、仮定した確率分布に対する確率限界法検定を行う場合、この有意水準 (両側確率) に対応する α は、方程式 $\chi_\alpha(0.99) = -\text{Log}_{10}(2\alpha_{min}) = 3.32$ を α_{min} について解き、 2.39×10^{-4} となる (上記方程式中の各値については図-1を参照されたい)。式(3)に示す確率が α となる u が $z_U(i)$ 、当該確率が $1-\alpha$ となる u が $z_L(i)$ である。標本サイズが n の場合、上方確率限界値の標本 U_U を $\{z_U(1), z_U(2), \dots, z_U(n)\}$ 、下方確率限界値の標本 U_L を $\{z_L(1), z_L(2), \dots, z_L(n)\}$ と定める。これらの標本中の確率限界値にプロットングポジション公式による累積確率 $F_U(u_0)$ を与えることで、定まる実験点を上方確率限界点 $(F_U(u_0), z_U(i))$ および下方確率限界点 $(F_U(u_0), z_L(i))$ とする。また、 $i=1, 2, \dots, n$ について、 $(F_U(u), z_U(i))$ を連ねた線を上方確率限界線、 $(F_U(u_0), z_L(i))$ を連ねた線を下方確率限界線とする。図-2は、有意水準 (両側確率) 1%、標本サイズ $n=99$ の場合における標準一様分布における確率限界線を示したものである。両限界線からなる範囲は、標準一様分布からのデータに対する確率限界法検定における採択域である。加えて、同図における採択域は、対象データに当てはめた確率分布 (本研究ではGumbel分布) の下で、過去生起しえた極端豪雨 (年最大日降水量) が有する累積確率の幅を表すものである。

(2) 任意の確率分布における確率限界の算出

標準一様分布における確率限界値を累積確率として扱い、これらを仮定した確率分布の確率表現関数に代入することで、仮定した確率分布における確率限界値を算出できる。すなわち、仮定した確率分布における上方確率限界値は $\chi_X(z_U(i))$ 、下方確率限界値は $\chi_X(z_L(i))$ である。また、当該確率分布における上方確率限界値の標本 X_U は $\{\chi_X(z_U(1)), \chi_X(z_U(2)), \dots, \chi_X(z_U(n))\}$ 、下方確率限界値の標本 X_L は $\{\chi_X(z_L(1)), \chi_X(z_L(2)), \dots, \chi_X(z_L(n))\}$ となる。観測データにおける第 i 順序統計量 $X_{(i)}$ が区間 $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$ の採択域の外部に存在する場合、観測データが従うと仮定した確率分布の当てはめを有意とみなす。

図-3は、対象データが従うと仮定したGumbel分布に対して、当該Gumbel分布に対する両側確率1%の確率限界線の構成過程を示したものである。同図より、累積

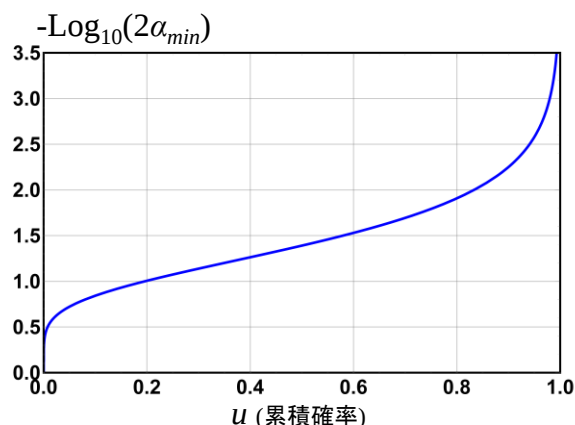


図-1 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめたGumbel分布の確率表現関数 $\chi_\alpha(u)$

※本研究では、 α_{min} の分布の安定性を確保するため、試行回数 N を5000とした。

U (累積確率 U の実現値)

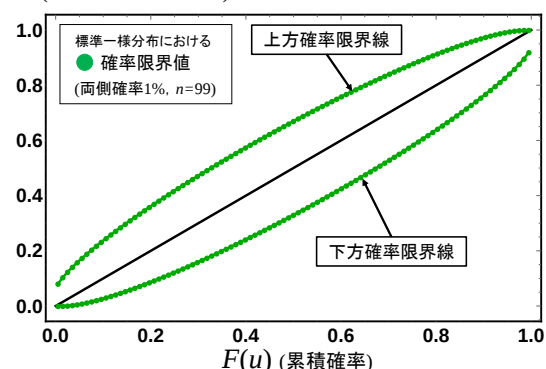


図-2 標準一様分布における両側確率1%の確率限界線

※同図中の n は、確率限界値の算出にあたり、使用した観測値の総数を表している。

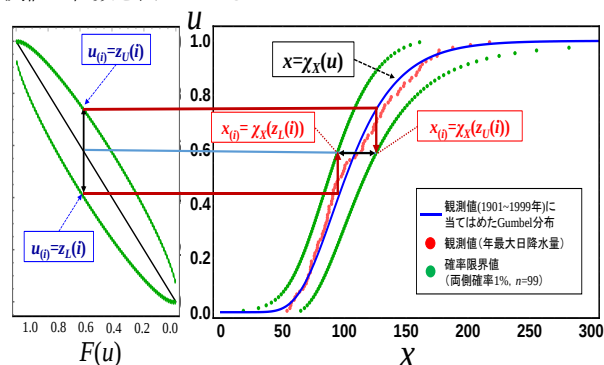


図-3 確率限界法検定における棄却限界線 (確率限界線) の構成過程

確率の棄却限界値 (標準一様分布における確率限界値) $z_L(i)$ および $z_U(i)$ が、仮定した確率分布の確率表現関数 $\chi_X(u)$ を介して、 i 番目の年最大日降水量 $X_{(i)}$ に対する採択域 $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$ を構成していることが分かる。

3. 確率限界法検定に基づく予測区間の構成手法

(1) 確率限界値の性質

本節では、予測区間の構成において、その理論的根拠

となる確率限界法検定における棄却限界値（確率限界値）の性質を示す。

図-4は、名古屋地方気象台における99年間分の年最大日降水量の観測値（1901年～1999年），これら99個の観測値に当てはめたGumbel分布，両側確率90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の確率限界値を示したものである。また，図-5は，第99順序統計量の確率分布と確率限界法検定における両側確率90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の採択域との関係を示したものである。次に，確率限界法検定における採択域の被覆確率を算出し，この被覆確率を順位*i*ごとに比較した。ここでの被覆確率は，第*i*順序統計量の確率分布が採択域に含まれる割合とする。図-6は，信頼係数と被覆確率の関係を順位*i*ごとに示したものである。同図では，図-6では，99個の信頼係数と被覆確率の関係を順位別にプロットしている。ここで，信頼係数とは， $(1-p)$ により表されるものである（ p は有意水準あるいは両側確率である。 $(0 < p < 1, i = 1, 2, \dots, 99)$ ）。なお，上記した各順序統計量の確率分布は，観測値に当てはめたGumbel分布の累積分布関数 $F_X(x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ を用いて求めた。任意の順位*i*に応じた，第*i*順序統計量 $X_{(i)}$ の累積分布関数 $F_{X(i)}(x)$ は式(5)により表される。

$$F_{X(i)}(x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F_X^k(x) \{1 - F_X(x)\}^{n-k} \quad (5)$$

図-6より，信頼係数と被覆確率の関係は，順位*i*にほとんど依存せず，ほぼ同じものとなることが分かる。また，同図から，信頼係数の増加に伴い，信頼係数と被覆確率の値が近づいていくことが分かる。これは，信頼係数 $(1-p)$ として1に近い値を採用した場合，その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を $p/2$ として近似可能であることを示している。

上述したように，いずれの順位*i*においても信頼係数と被覆確率の関係の変化は目視での判別が不可能ほど小さい。これは，確率限界法検定における採択域の精度は順位*i*に依存せず一定の精度であることを示している。換言すれば，確率限界法検定による採択域は順序統計量の分布により表される観測値の存在範囲を高精度で推定するものである。このことは，確率限界値を外挿することにより，観測期間の外部，すなわち，将来期間においても未知観測値の存在範囲を推定できることを示している。

(2) 確率限界法検定を用いた予測区間の構成

本節では，確率限界法検定を用いて極値の予測区間を構成する手法を示す。

図-7は，名古屋地方気象台における99年間分の年最大日降水量の観測値（1901年～1999年），これら99個

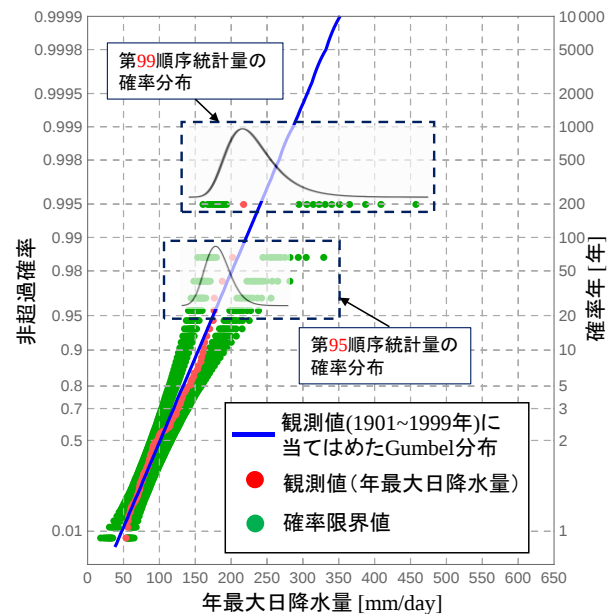


図-4 順序統計量の確率分布と確率限界値の関係

（同図には，名古屋地方気象台における99年間分の年最大日降水量の観測値（1901年～1999年），これら99個の観測値に当てはめたGumbel分布，確率限界法検定における有意水準（両側確率）90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の確率限界値を記入した。）

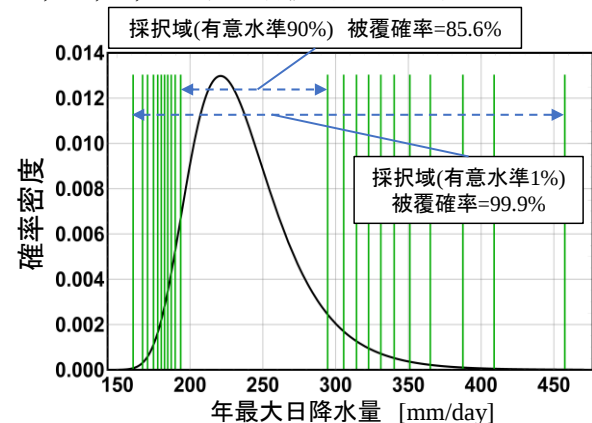


図-5 第99順序統計量の確率分布と確率限界法検定における有意水準（両側確率）90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の採択域との関係

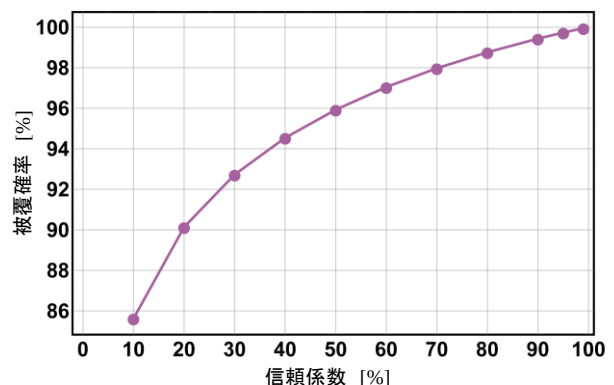


図-6 信頼係数と確率限界法検定における採択域の被覆確率との関係

の観測値に当てはめた Gumbel 分布，標準一様分布と当該 Gumbel 分布の両側確率 1%の確率限界値および 99% 予測区間を示したものである。

採択域は，採用した仮説検定理論の下では，どの程度の値まで許容可能であるかを表す範囲である．すなわち，採択域は，データが存在しうる範囲であるといえる．確率限界法検定は，仮定した確率分布の裾部に対して極めて高い検定力を有しているため，裾部に対して採択域が狭まっている．

確率限界法検定の採択域は，我々が過去経験しえた大雨の振れ幅を高精度で推定するものであるため，確率限界値を大雨の振れ幅の限界値として捉えることができる．したがって，確率限界値の標本に対して，高い適合度を有する確率分布モデルを選定することにより，当該確率分布モデルは，データの振れ幅の限界値を与えるものとして捉えることができる．加えて，当該確率分布モデルにより，使用したデータの外部に対しても，外挿値という形で値を得ることができる．このことは，将来期間に対しても，データの振れ幅の限界値を予測していることを表している．したがって，本研究では，当該確率分布モデルを予測限界線と定義した．

図-7 は，両側確率 1%の確率限界値の標本に一般化極値分布を当てはめ，99%予測限界線が構成される過程を示している．当該予測限界線と確率限界値の適合度を，SLSC（標準最小二乗規準）により評価すると，上側予測限界線の SLSC は 0.006，下側予測限界線の SLSC は 0.008 であった．この結果は，一般化極値分布が確率限界値に極めて良好に適合し，一般化極値分布を予測限界線として採用することの妥当性を示すものである．

4. 予測区間を導入した水文頻度解析手法

図-8 は，名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値（1901 年～1999 年），これら 99 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布，東海豪雨（2000 年）の観測値，確率限界法検定に基づく将来観測値の 99% 予測区間を示したものである．99% 予測限界線は，両側確率 1%（信頼係数 99%）の確率限界値の標本に当てはめた一般化極値分布である．同図から，確率年が長期になるにつれて，将来期間における観測値が取りうる範囲を表す予測区間が広がっていくことが分かる．また，上側予測限界線は下側予測限界線よりも広い範囲を取ることから，将来観測値の確率分布は右に歪むことが推定される．これは極値の性質の表したものであると考えられる．予測区間の導入により，従来では“想定外”として扱われるような規模の豪雨を 100 年あるいは 200 年といった計画規模相当の確率年で評価できる．その具体例を次に

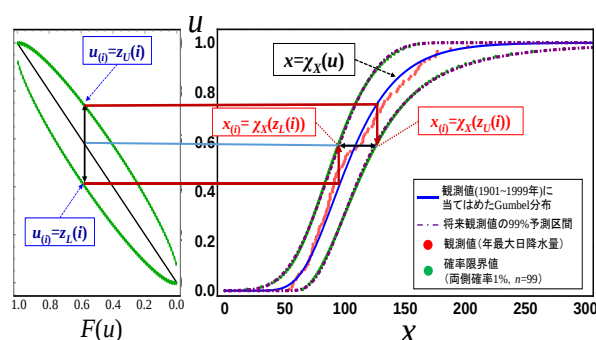


図-7 確率限界法検定に基づく 99% 予測区間の構成過程

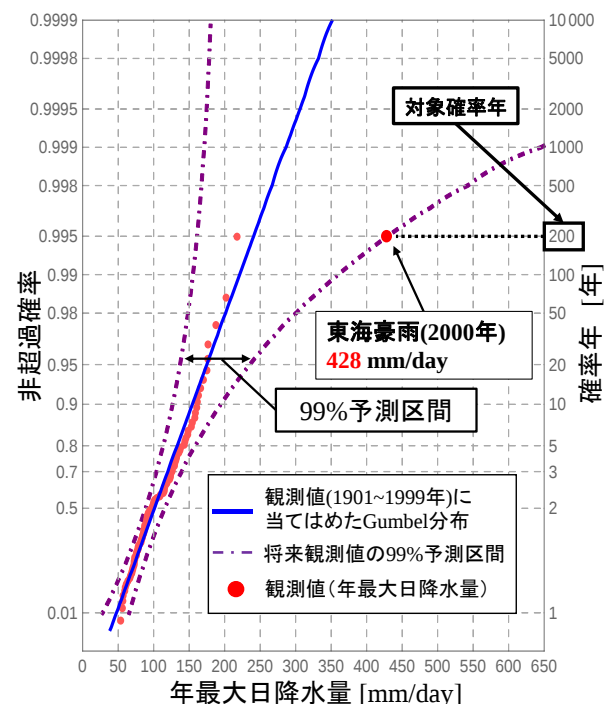


図-8 確率限界法検定に基づく予測区間の適用

同図には，名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値（1901 年～1999 年），これら 99 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布，東海豪雨の観測値および確率限界法検定に基づく 99% 予測区間を記入した．

示す．図-8 において，東海豪雨の観測値は，99% 上側予測限界線上にプロットされ，かつ，当該豪雨の確率年は 200 年として扱うことができる．加えて，予測区間の導入により，激甚豪雨が将来期間において発生するリスクを定量化することができる．すなわち，上述したリスク（上側予測限界値の超過確率）は，「対象確率年」と「予測区間の片側確率」との積により表される．なお，Knight¹⁰⁾は，確率分布が把握可能な事象をリスクとして数学的に定義している．この定義を踏まえ，本論では，“リスク”を採用確率分布から大きく外れ，従来では想定外として扱われるような豪雨の“発生確率”として扱う．次に，このリスク評価手法を用いて，東海豪雨級の激甚豪雨が生起するリスクの算出例を示す．図-8 において，東海豪雨の観測値は 200 年確率年最大日降水量の 99% 上側予測限界値となるため，当該値の超過確率は，

上記したリスクの算出式より、 $(1/200) \times 0.005 = 1/40000$ となる。すなわち、東海豪雨級の激甚豪雨が将来生起するリスクは1/4万となる。なお、第3章で示したように、信頼係数 $(1-p)$ として1に近い値を採用した場合、その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を $p/2$ として近似可能となる。このため、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により激甚豪雨（上側予測限界値）の生起リスクを算定するという手法は、1に近い信頼係数を選定するほど、その精度が向上する。すなわち、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により表される激甚豪雨の生起リスクが同じ値であっても、その外力値としては、高い信頼係数を有する予測区間上の値がより妥当なものとなる。当該手法により算出されるリスクは他分野におけるリスク（例えば、交通事故で死亡する割合である1/2万等）と同程度のオーダーとなる。この結果は、上記したリスク評価手法により、激甚豪雨が将来期間において生起するリスクを他分野におけるリスクと比較・評価可能となることを示すものである。なお、中西¹⁴⁾は、リスクの程度を相対的に評価することで、合理的な対策が実現するとしている。

5. 信頼区間を導入した水文頻度解析手法

本章では、信頼区間を導入した水文頻度解析の具体的手法を示す。図-9は、草木ダム流域における41年間分の年最大総降雨量の観測値、これら41個の観測値に当てはめたGumbel分布および確率限界法検定を応用し導出した当該Gumbel分布の95%信頼区間を示したものである。本研究では、信頼限界線は、確率限界値の標本に、採用確率分布と同じ関数形をあてはめたものと定義している⁴⁾。これは、任意の有意水準の下で決定する、観測データがとりうる値の限界値（確率限界値）の標本に、採用確率分布と同じ関数形をあてはめることで、採用確率分布自体の限界曲線を推定可能となるためである。さらに、 T 年確率規模を対象とした洪水対策において、 $\alpha\%$ 上側信頼限界値を超える降雨量が発生するリスクは、 $(1/T) \times (100-\alpha)/2 [\%]$ により表される⁴⁾。

6. まとめ

信頼区間は、従来洪水対策に採用してきた確率分布の振れ幅を表すため、信頼区間をどこまで議論するかによって洪水対策におけるリスクが検討可能となる。一方、予測区間は、将来の観測値がとりうる幅を表すため、予測区間の導入により、激甚豪雨の規模やその生起リスクが把握可能となる。本論では、確率限界法検定の理論を応用することで、極値に対して極めて高い精度をもつ信

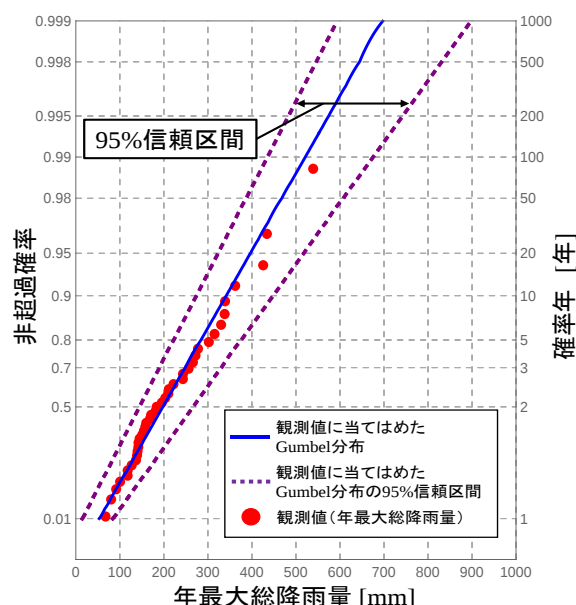


図-9 確率限界法検定に基づく信頼区間の適用
同図には、草木ダム流域における41年間分の年最大総降雨量の観測値、これら41個の観測値に当てはめたGumbel分布および確率限界法検定に基づく95%信頼区間を記入した。

頼区間・予測区間を構成する手法を示すとともに、それらの具体的適用手法を示した。

参考文献

- 1) 北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会 (<https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa/kei/splaat000000vdyw.html>)
- 2) 山田朋人ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018。
- 3) 森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244，日本統計学会，第25巻，1995。
- 4) 清水啓太，山田朋人，山田 正：確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I_331-I_336, 2018。
- 5) 竹内啓：統計的予測論，培風館，1975。
- 6) 北野利一，高橋倫也，田中茂信：降水量の極値の予測区間～確率降水量の信頼区間を誤解していませんか？，土木学会論文集 B1（水工学），69(4)，pp.I_271-I_276，2013。
- 7) Coles, S. : Anticipating catastrophes through extreme value modelling, Appl. Statist. 52, Part 4, pp. 405-416, 2003.
- 8) 北野利一，高橋倫也，田中茂信：ベイズ手法による降水量の極値の予測分布～最尤法による相違と相互補完，土木学会論文集 B1（水工学），72(4)，pp.I_463-I_468，2016。
- 9) 森口繁一：確率表現関数，東京大学出版，1995
- 10) Knight, Frank H.: Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin Co., 1921.
- 11) 中西準子：環境リスク学—不安の海の羅針盤，日本評論社，2004。

(2019. 4. 2 受付)