

落差工による跳水・浸透流およびそれらの河床 構造物の安定性に及ぼす影響

EFFECTS OF HYDRAULIC JUMP AND SEEPAGE FLOWS TO THE STABILITY OF RIVER STRUCTURES AROUND WATER DROP WORKS

楊宏選¹・福元豊²・細山田得三³・大塚悟³

Hongxuan YANG, Yutaka FUKUMOTO, Tokuzo HOSOYAMADA and Satoru OHTSUKA

¹正会員 博(工) 長岡技術科学大学助教 環境社会基盤工学専攻(〒160-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

²正会員 博(農) 長岡技術科学大学助教 環境社会基盤工学専攻(〒160-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

³正会員 工博 長岡技術科学大学教授 環境社会基盤工学専攻(〒160-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

The stability of river-bed structures near water drop works, standing against river flow forces is important due to the increase of river discharge according to global warming. The stability is affected not only by the river flow forces but also seepage flows and seepage pressures. Especially sucking out of fine soil grain due to seepage pressures diminishes foundation strength.

In this study, we developed hydraulic and geotechnical modelling to evaluate stability of foundation around water drop works. Numerical modelling and Laboratory experiment facility were set up for the 1st year of the studies.

Key Words : river structures, CFD, VOF, LBM, DEM, seepage flow, sucking out, hydraulic jump

1. はじめに

河川整備の中でも河道維持は、大出水に対する安全性の確保のみならず景観や親水性を含む河川の多機能の保持のための基本的な重要項目と考えられる。河道維持のためには床止め工・護床工などを総称した河床構造物の維持管理が重要である。これまでの河床構造物の被災状況を見るとそれらに対する外力が卓越する領域は落差工周辺と見なすことができる。落差工周辺の河床構造物の被災（落差工本体や水叩き、護床工ブロックの沈下、滑動、移動等およびそれに伴う河床洗堀や河床低下）を阻止することは河川工学上の主要な課題である。これらの構造物が受ける外力には、

- 1) 高速な河川流による掃流
- 2) 落差工前後の水位差による揚圧力
- 3) 落水および跳水などの水面変動による河川水の動揺
- 4) 河川流が高速化することによる流体内部の圧力低下による地盤材料の吸出しと空洞化・パイピング
- 5) 構造物下部地盤の浸透流による細粒土砂の移動による空洞化
- 6) 構造物の変状によるこれらの項目のさらなる進展

などが、机上検討によって想定される。これらの項目は水理現象と地盤現象が複合的に作用しており、その全容を理解することが困難となっている。また個別の項目で

も落水・跳水現象の把握・評価、非定常・非線形浸透流の解析、低圧による土砂の吸出し現象の評価など、まだ十分に理解が進んでいない現象も含まれている。また、落差工前後の水位差が大きくなるのは発生頻度が低く施設能力を上回る洪水時よりも発生頻度が高い平水時であり、また、水面と河床地盤との距離は洪水時に大きくなることから水面変動の動揺の影響が必ずしも洪水時に大きくならないなど被災の想定が困難という特徴を持つ。

護床工下流部の局所洗堀に関して神田ら¹⁾²⁾が系統的な実験および数値解析を行い、洗堀形状、混合砂利粒度構成の洗堀量への影響、最大洗堀深の時間変化、洗堀進行度による砂床上の摩擦速度の変化などに着目し、護床工周辺部の流れと局所洗堀の水理機構を調べた。また、内田ら⁴⁾が床止め工下流部の局所洗堀を解析するために σ 座標系を導入した二次元数値モデルを開発し、構造物下流の洗堀を許容することで、床止め工下流で生じる波状跳水状態と潜り跳水状態の局所洗堀・堆積域の発達およびそれらの減衰過程と最大洗堀深を見積もることができた。護床工下部の河床材抜け出しおよびパイピング対策に関して、川口ら⁵⁾が大掛かりな実験的研究を行い、多くの知見を得ている。水没粗度群を考慮した流れと河床変動など、河床上流れにフォーカスを当てた内田ら⁷⁾の実験と数値解析（渦度を用いた底面流速解法、準三次元）があり、最下流のブロックが最も大きい抗力を受けるが、千鳥配置が整列配置より抗力が小さくなることが示された。また、川口ら⁵⁾と内田ら⁸⁾が護床工最下流ブロックの移動と破壊の実験を行い、流体力中心にその破

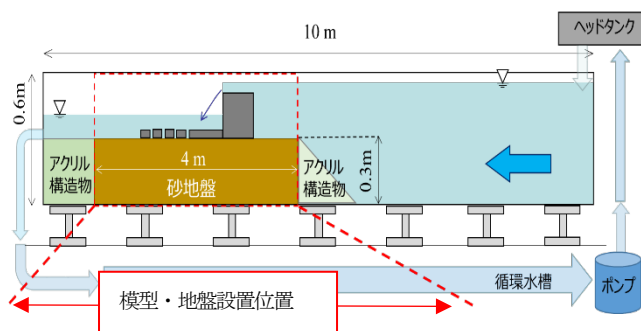


図-1 地盤・流水連成実験水槽

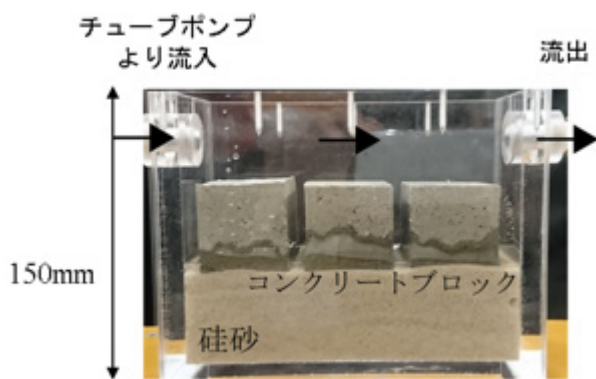


図-2 小型実験水槽

壊メカニズムを調べたが、浸透流はこれらの実験では考慮されていない。

落差工付近の護床工ブロックの移動・破壊プロセスは流れと地盤材料の流出に影響されるが、(特に地盤中は)実験による計測には限界があり、細部までわからない。数値解析は、流れの細部構造までわかるが、洗堀や河床変動を扱った数値解析は平衡・非平衡流砂量式を用いて体積と洗堀を見積もり、流れは一般的に二次元¹²⁾または準三次元⁷⁾の数値モデルで計算される。護床工ブロック沈下の原因となる地盤材料の抜け出しは、浸透流・間隙水圧に左右されるが、床止め工下部の浸透流と自由水面を有する跳水を同時に計算した研究はないようである。理由として計算量が大いことと、地盤中材料の流出に有力な物理モデルがないこと、などが挙げられる。

これらの解析の困難に対して、数値計算技法は計算環境の低廉化・高度化に伴い目覚ましく進展している。具体的には反復収束計算を要する非圧縮性のナビエ・ストークス方程式(以下、NS方程式)の直接計算が十分実施できる環境が整い、激しく変動する自由水面の追跡計算を可能とするアルゴリズムが整備され(VOF法、あるいは粒子法)、波動を伴う流体運動の計算手法が確立した。さらにNS方程式と類似の形式を持つ、非定常・非線形のダルシー則を連成させ浸透流を解き、浸透流計算の高度化が可能となった。また、地盤工学の分野では格子ボルツマン法(LBM法)と個別要素法(DEM法)を連成させることによって地盤骨格中の細粒土砂の動きを計算することが可能となってきた。これらの解析技法が実際の河川構造物の安定性評価にどの程度適用可能か検討が進められていくものと思われる。

一方、これらの計算技法の進展に比して、河床構造物

の設計法の現状は、新しい知見を導入したものとはなっておらず、過去の実験結果に基づいて概略的なものを与えるに留まっている。そのため実際に個々の現場に対して概略設計する場合でも、個別に室内実験を実施して設計法の妥当性の確認が行われている。著者らは、このような事情を受けて、河川工学と地盤工学の知見を背景とした新しい解析技術を河床構造物の安定性評価にどの程度適用可能かを確認するために数値計算を主体とした研究を実施し、落水・跳水・浸透流の計算を行うとともに河床構造物に作用する外力および土砂の吸出しの特性について検討を行った。

2. 実験および数値モデルの概要

(1) 実験装置概要

本研究は、数値計算は主体であるが、検証のためにスケールの異なる二種類の実験も同時に行われる。浸透流を含む跳水の数値計算のために、落差工およびその周辺の水理現象と地盤内部の変状に関して室内実験を実施するために図-1のような地盤・流水連成実験水槽を作った。実験の目的は現象の視覚化と数値実験の妥当性検証である。地盤骨格中の細粒土砂の移動計算のために、護床工と地盤の境界領域を実験的に詳しく調べる図-2のような小型の模型装置を開発し、河床地盤の浸透破壊現象について検討した。硅砂とコンクリートブロックを配置するアクリル容器への水の循環は、チューブポンプを用いて一定流量でおこなう。アクリル容器の大きさは60mm×150mm×150mmである。

(2) 数値モデル概要

数値モデルは、落差工を越流する跳水の流れを扱う非圧縮性気液二相流VOFモデルと、多孔質物体中の流れを扱うDarcy-Forchheimer則によって構成される。

VOF法による跳水¹⁰⁾¹¹⁾または跳水らしき¹²⁾数値計算は、米山ら¹¹⁾と前野ら¹²⁾などの研究があり、VOF法の跳水計算への適用可能性が確認されている。本研究は、浸透流を含む跳水の数値シミュレーションに、自由水面VOFモデルの運動方程式に抵抗項として、Darcy-Forchheimer項(以下、ダルシー項)を陽的に追加して、自由水面を有する跳水計算に多孔質物体中の流れを計算に取り入れた。ダルシー項を陰的に扱った方が数値安定性に有利であるが、モデル実装の簡単さを優先してまず陽的に扱い、数値安定性に問題が生じれば、陰的扱いに切り替える。

以下に数値モデルの概略を説明する。

a) VOFモデル

VOF法による二相流モデルは、厳密にコントロールボリューム質量中心(重心)に基づく支配方程式とコントロールボリューム体積中心(図心)に基づく支配方程式に分けられる(Damian¹³⁾)。本研究は後者を用いた。その基本方程式は以下に示す。

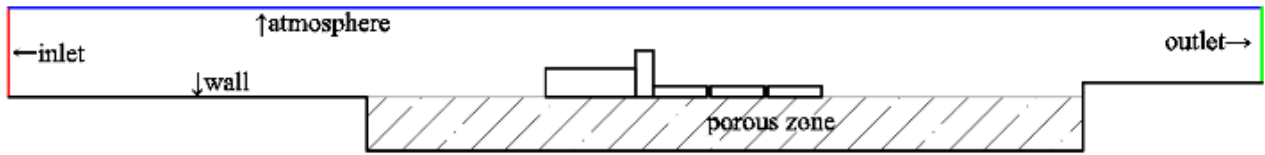


図-3 浸透流と自由跳水の数値計算領域（一例）

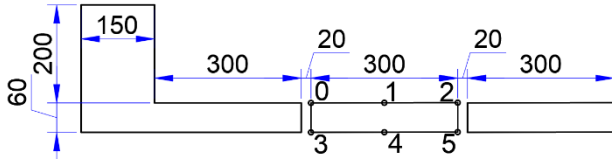


図-4 落差工周辺の寸法図（単位：mm）

流体分率 α の移流方程式

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{U}) - \nabla \cdot (\alpha(1 - \alpha) \vec{U}_r) = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) - \nabla \cdot \vec{T} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \vec{F}_\sigma \quad (2)$$

ここで、 ρ は密度、 $\vec{T}$ は $\mu(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T)$ で定義される応力テンソルである。 μ は粘性係数で本研究は標準k- ϵ モデルを用いたので（粘性係数+渦粘性係数）の合成粘性係数が用いられる。

従来のVOF法に比べて、運動方程式右辺最後に表面張力 $\vec{F}_\sigma$ が加えられている。 $\vec{F}_\sigma$ はCSFモデル（Continuum Surface Model, Brackbillら¹⁴⁾）では次式で求められる。

$$\vec{F}_\sigma = \sigma k \nabla \alpha \quad (3)$$

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (4)$$

ここで、 σ は表面張力係数（単位は単位長さ当たりの力）、 k は自由水面の平均曲率である。

流体分率 α の移流方程式左辺第三項も従来のVOFモデルにはない。その中の $\vec{U}_r$ は二つの相の相対流速で圧縮速度と呼ばれる。この「圧縮」は自由水面をもっとシャープに圧縮する意味であり、圧縮性流体を圧縮する意味ではない。Berberovicら¹⁴⁾によれば圧縮項の導入は界面移流の高精度化に寄与し、特別にCICSAM¹⁵⁾のような移流スキームを使わなくても界面を高精度に表現できる。圧縮項は気液境界面だけに効き、界面以外の領域で相対速度がないために消えることになる。

b) 浸透流のためのダルシー項の導入

Darcy-Forchheimer則に従い、運動方程式（2）に間隙率と浸透流による抵抗項を追加すると、浸透流が含まれる運動方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial (\gamma \rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma \rho \vec{U} \vec{U}) - \nabla \cdot (\gamma \vec{T}) = -\gamma \nabla p + \gamma \rho \vec{g} + \gamma \vec{F}_\sigma - \left(\frac{\gamma^2 \mu}{D} \vec{U} + \frac{\gamma^3 F}{2} \rho |\vec{U}| \vec{U} \right) \quad (5)$$

ここで γ は間隙率、 F はForchheimer係数、 $1/D$ はダルシー係数である。なお、 D は透過度（permeability, 単位[m²])で透過度に $(\rho g / \mu)$ をかけると速度の次元を有する透水係数 K となる。

式（5）を厳密に解くと計算量が膨大になる。間隙率 γ で除して得られる次式を使うと、精度があまり損なわれずに計算量が大幅に減らせる。

$$\frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) - \nabla \cdot \vec{T} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \vec{F}_\sigma - \left(\frac{\gamma \mu}{D} \vec{U} + \frac{\gamma^2 F}{2} \rho |\vec{U}| \vec{U} \right) \quad (6)$$

これで運動方程式（2）を変えずにDarcy-Forchheimer則による抵抗項を右辺に追加することができる。

間隙率をあたかも定数のように方程式から除算することは、密度流のブースネシク近似の密度で除した手法に近い。Darcy-Forchheimer則はそもそも大雑把な経験則なので、計算リソースと労力をかけて式（5）を正確に数値的に解いても、結果も「正確」とは言えない。

3. 実験、計算結果および考察

浸透流を含む跳水において、計算領域は実験水路に合わせてxyzが700cm×100cm×40cmの大きさを採用した。長さxは実験水槽より三メートルほど短いのは、数値実験は実験水槽の整流部分を省略できるからである。高さyは実験水槽より高いのは、もっと大流量を扱うために余裕を持たせるためと、境界の影響を減らすためにできるだけ気相の境界位置を遠く配置させるためである。奥行きzは40cmであるが、二次元の計算に限定するためにz方向は1メッシュで分割して、手前と奥の面に周期境界条件を適用する。将来、計算性能に余裕が出れば、z方向もメッシュ分割することで特別な作業無しに三次元の計算が行える。計算領域の全体図と落差工周辺の寸法図に複数のケースがあるが、その一例を図-3と図-4に示す。

数値計算はRAM 192GBを搭載し、32コアを有するIntel® Xeon® Gold 6142のワークステーションで行われた。メッシュサイズは大きさの異なる三パターン（10mm, 5mm, 2.5mm）を用いて、計算結果はメッシュサイズによる有意の差がないことを確認した。計算時間は同一条件に対して、メッシュサイズ10mm, 5mm, 2.5mmの順でそれぞれ1時間強、1日弱、一か月程度であった。格子サイズを半分にすると計算時間は約18倍になるので、計算時間はメッシュ総数の2乗に比例すると推測される。三次

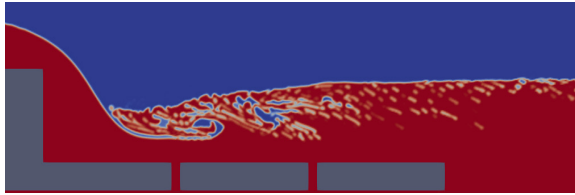


図-5 計算された α 値



図-6 実験による跳水映像の1コマ

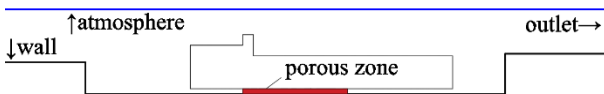


図-7 数値実験による透水試験の計算領域

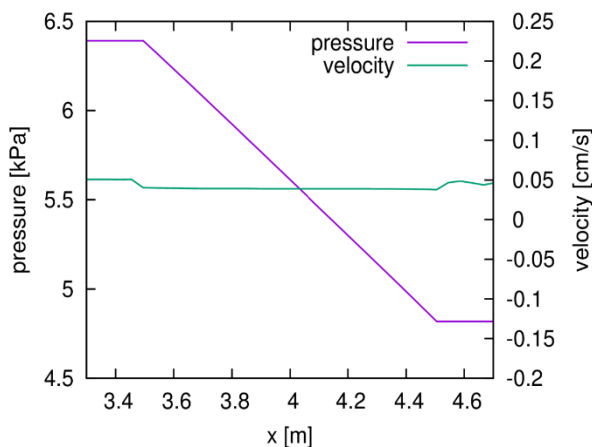


図-8 数値実験で得られた透水区間の流速と圧力

元計算を行う場合に、粗いメッシュを強いられる公算が大きい。

図-5、図-6にそれぞれ流量30L/s時に計算された α 値と実験の写真を示す。数値計算は跳水をよく再現している。内田ら⁹⁾の準三次元モデル、米山¹¹⁾と前野ら¹²⁾のVOFモデルによる跳水計算の前例があるので、これは事前に予測できる結果で、モデル実装の正しさを確認する意味合いが強い。

浸透流計算部分の検証は工夫が必要である。間隙率と透過度は実験でも正確に計測できず、しかも実験の都度変わることが想定される。また、透水試験時の砂は跳水実験時の砂の締固め度と異なるので透水試験で得られる透過度は必ずしも浸透流実験時の値を反映しない。透過度または透水係数は現場状況によって変わり、ばらつきの大きい数値である。そこで、本研究は実験と比較せずに、数値計算はダルシー則を再現できるか、数値実験による透水試験を行った。その仕組みは図-7に示される。

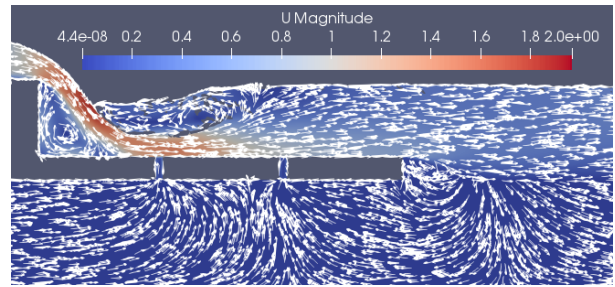


図-9 計算された流速ベクトル場

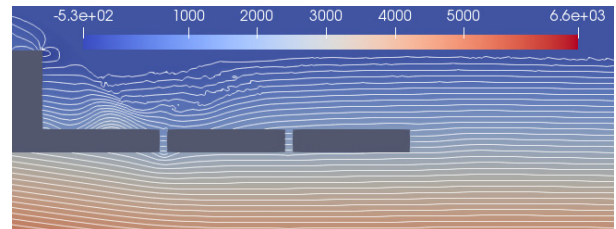


図-10 計算された圧力 p

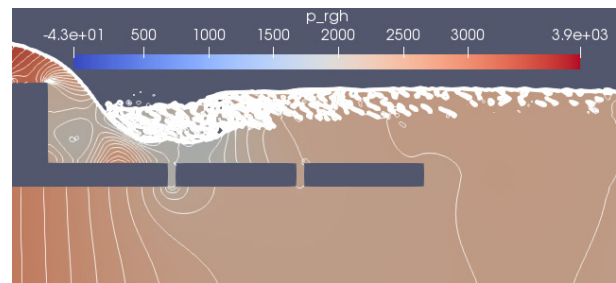


図-11 計算された圧力 $p' = p - \rho gh$

図-3の透水層の代わりに、地盤中に長さ100cm、高さ5cmの透水層（左端x座標は3.5m、右端x座標は4.5m、図-7中の赤い部分）を設け、間隙率と透過度を一括りにした係数（ γ/D ）を $2.5E-6\text{cm}^2$ として、堰を越流する跳水と透水層を通過する浸透流の計算を同時に進めた。この計算で、まず跳水が計算できるか確認し、そのつぎに、ダルシーの法則に従って圧力勾配と速度から透水係数を求めて、計算に使われた透水係数が得られるか確認する。いわば数値実験による透水試験である。跳水の部分は、浸透流の影響が僅かであるために、図-5とほぼ変わらないが、透水層における速度と圧力は図-8のように得られた。図-8の流速、圧力および浸透層長さを、ダルシーの法則 $v = Ki$ に代入して透水係数 K を逆算すると $K=0.25\text{cm/s}$ として求まった。これは (γ/D) に $(\rho g/\mu)$ をかけて、透過度を透水係数に直した値と一致する。よって、少なくとも本モデルはDarcy-Forchheimer則を適切に導入して跳水と浸透流を同時に解析できることが示された。

次に、図-3に示さるような透水層を有する跳水の数値計算を行った。図-9～図-11に流量=30L/s、 $\gamma/D=2.5E-6\text{cm}^2$ の計算一例の結果を示す。浸透流と跳水の流速ベクトルを同じ図面に示すために、図-9では矢印が流向を、背景色が流速の大きさを表すように工夫されている。最末端ブロックの後ろに渦が現れ、ブロックの下に上流に向かう浸透流が見られる。護床工下部局所洗堀の研究²³⁾⁶⁾

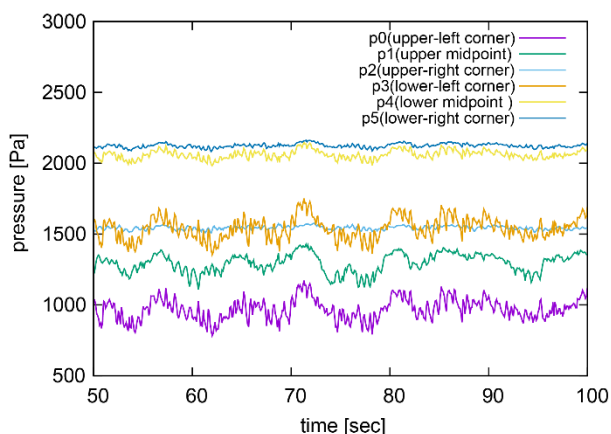


図-12 ブロック周辺六箇所の圧力の時間変動

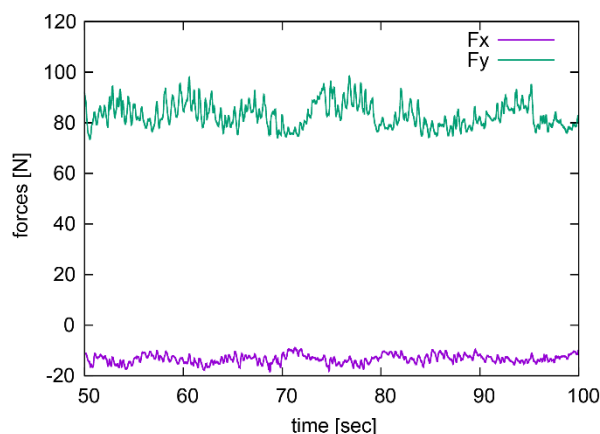


図-13 ブロックの受ける流体力の時間変動

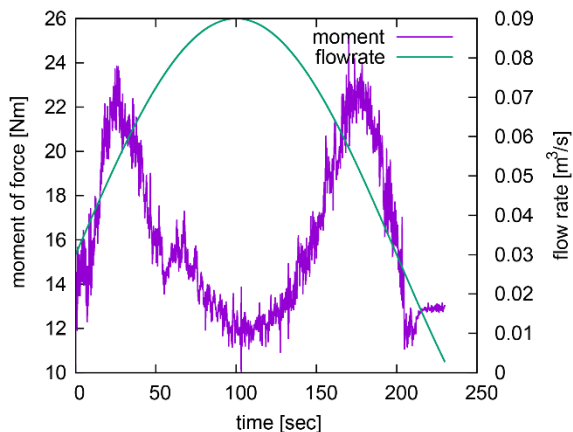


図-14 ブロックの受ける流体力モーメント

において、ブロック後ろの渦は注目されているが、ブロック下部で発生する上流に向かう浸透流への言及はない。浸透流を高精度に扱わない場合、この小さい流れの存在に気づかないとも考えられる。

図-10に圧力場 p が示されている。堰頂部右端に負圧が出現するが、護床工周りに負圧が認められない。圧力の詳細はこの図で確認しづらいので後ほど他の図で示す。

図-11に圧力から静水圧分を差し引いた圧力 $p' = p - \rho gh$ のコンターを示す（厳密にいうと ρgh ではなく積分される圧力である）。 p' に（位置水頭+静水深水頭）分の圧力を足せばピエゾ水圧となる。即ち、図-11は流線網のポ

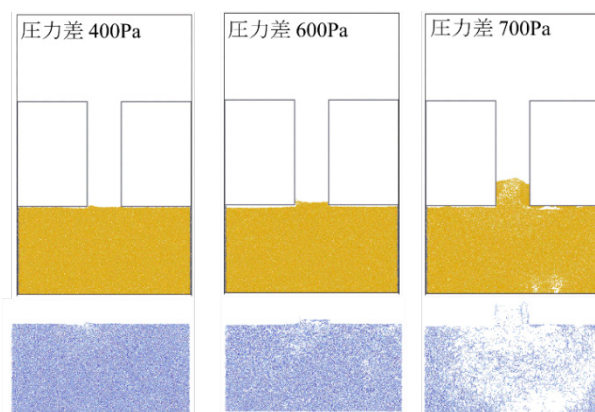


図-15 スナップショットと河床地盤の応力状態の様子

テンシャル線と同じパターンである。図-9と図-11を重ね合わせれば流線網となる。図-11の水叩き下の部分は川口⁶⁾の水叩き下の部分のピエゾ水頭の計測パターンに一致する。護床工ブロックの下は、構造が異なるために比較できない。

図-12に1個目のブロック周辺六箇所（図-4参照）の圧力の時間変動を示す。図-10では詳細に確認できないが、図-12からブロック下面で上流に向かって圧力が増加していく特徴が見て取れる。ブロック上面では下流に向かって水深が深くなっているからこの傾向は順当である。しかし、設計において下流に向かって揚圧力が減衰するとされる¹⁰⁾。ブロック間の隙間がなければ水叩き下のように入下流に行くほど揚圧力は下がるが、隙間や減圧孔があると圧力は上部の水につながり、圧力値は上部水圧で「リセット」されたと思われる。図-13にブロックの受ける水平と鉛直方向の流体力 F_x , F_y を示す。流体力は表面圧力と表面粘性摩擦力によって構成されるが、粘性応力が圧力に比べて小さく無視できる（図を省略）。川口⁹⁾らと内田⁸⁾の実験では F_y は F_x と同程度かわずかに上回るのに対して、図-13において F_y は F_x の約5~6倍である。彼らの実験ではブロックの長さが高さと同程度で、本研究では長高比は5であることを考えると、大きなずれはないようにみえるが、ブロックの配置状況、浸透流の有無に違いがあり、単純な比較はできない。図-14のようにブロック底部右角（点5）を回転軸に流体力による力モーメントも積分して求められる。これは可変流量の計算結果で、護床工ブロックに作用する流体力モーメントは必ずしも流量の変化に同調しないことが見て取れる。

浸透流を含む跳水の計算で地上・地下の流速と圧力の分布と時間変動が分かり、構造物に作用する流体力・モーメントが求められる。河床が完全状態であれば、これらの情報で構造物の静的安定性が評価できる。しかし、地盤中材料の流出に起因する地盤沈下による構造物の安定性は評価できない。その対策に、護床ブロック下の河床地盤の浸透破壊現象を適切に評価するための数値解析手法として、粒子-流体連成の直接計算手法に着目し、土粒子と浸透流の両方を直接解くことができるシミュ

レータの開発と高度化をおこなった，土粒子はDEM（個別要素法），浸透流はLBM（格子ボルツマン法）でそれぞれ解き，両者を連成することで土粒子と浸透流の相互作用まで考慮した．開発した土粒子-浸透流連成シミュレータによる数値解析が対象とした範囲は，図-4のような護床工ブロック間の溝を含む領域で，浸透流を含む跳水計算の解析範囲の一部をそのままの寸法で切り取った．護床工ブロックは固定とし，その下の河床地盤において上下方向の圧力差に起因する浸透破壊（ボイリング）が生じると仮定して解析条件を設定した．その結果，図-15のように，圧力差の条件に応じた河床地盤の浸透破壊の様子を捉えることができた．なお，400Paは計算されたブロック間の溝の上下端の静水圧を含まない圧力差である．例えば圧力差700Paの場合は，ブロック間の溝に土粒子が持ち上がっており，応力鎖の図からも地盤が支持力を失った状態で護床構造物が著しく損傷することが予想された．なお，地盤骨格中の細粒土砂移動の数値解析は地盤・流水連成実験（図-1）と小型実験（図-2）でさらにチューニング・比較検討を行う必要がある．

4. まとめ

本研究は落差工による跳水，浸透流及びそれらの河床構造物の安定性に及ぼす影響を解明するために実験と共に，浸透流を考慮に入れた跳水計算と，ミクロ視点での地盤中細粒移動の数値計算とを連携して構造物の安定性を調べた．得られた主な知見は以下である．

- 1) 浸透流と跳水を同時に計算できる数値モデルが整備できた．これにより地上・地中の流速と水圧の分布と時間変動が詳細にわかり，揚水圧と抗力を含む流体力の算出が可能となる．
- 2) ブロック間の隙間や減圧孔の存在で揚圧はその上の圧力につながり，必ずしも下流に向かって減衰しないことが判明した．
- 3) 最末端護床工ブロック下部では上流に向かう流れが発生している．この流れの土砂流出，局所洗堀に及ぼす影響はまだ不明である．
- 4) 可変流量の場合，流体力・モーメントの変化は必ずしも流量の変化に同調しない．
- 5) 浸透流を含む跳水計算により，河床が保全される前提で，構造物の静的安定性が評価できる．
- 6) 粒子-流体連成解析により，土粒子と浸透流の両方を直接解くことができ，地盤の浸透破壊が評価できる．

しかし，地盤中の細粒がゆっくり少しづつ抜けていくような長期にわたる地盤沈下・河床洗堀，構造物が静的安定性を失って一旦移動してからまた平衡状態を取り戻すか破壊が助長されるか，まだ解明すべき問題が残る．

謝辞：本研究は平成29年度河川砂防技術研究開発（国土交通省）「落差工周辺の河床構造物の安定性評価のための水・地盤連成解析手法の高度化」（代表：大塚悟）の支援を受けた．ここに記して謝意を表する．

参考文献

- 1) 神田佳一，村本嘉雄，藤田裕一郎：護床工下流部における洗掘過程の数値解析，水工学論文集，第37巻，pp.657-662，1993.
- 2) 神田佳一，村本嘉雄，藤田裕一郎：護床工下流部の洗掘過程と流れ特性，京都大学防災研究所年報，第36号B-2，pp.551-569，1993.
- 3) 神田佳一，村本嘉雄，藤田裕一郎：護床工下流部における局所洗掘とその軽減法に関する研究，土木学会論文集，No.551，pp.21-36，1996.
- 4) 内田龍彦，福岡捷二，渡邊明英：床止め工下流部の局所洗掘の数値解析モデルの開発，土木学会論文集，No.768/II-68，pp.45-54，2004.
- 5) 川口広司，諏訪義雄，高田保彦，末次忠司：護床工下の河床材料の抜け出し及び下流跳水の非定常性と護床工の応答特性，河川技術論文集，第8巻，pp.243-248，2002.
- 6) 川口広司，末次忠司，日下部隆昭，高田保彦：水叩き下流護床工の石礫間詰めによる落差工下部パイピング対策の研究，水工学論文集，第48巻，pp.835-840，2004.
- 7) 内田龍彦，福岡捷二：底面流速解法による連続する水没水制群を有する流れと河床変動の解析，土木学会論文集B1 Vol.67，No.1，pp.16-29，2011.
- 8) 内田龍彦，田中幸志，福岡捷二：護床工最下流粗度要素の移動限界と破壊の実験，水工学論文集，第48巻，pp.841-846，2004.
- 9) 内田龍彦，福岡捷二：構造物を越流する流れの解析法の開発，河川技術論文集，第18巻，pp.351-356，2012.
- 10) 電力中央研究所：自由液面解析コード FRESH を用いた跳水現象解析，研究報告，U00065，001/4.
- 11) 米山望：自由水 3 面をもつ多次元流れの数値水理学的研究，京都大学，博士論文，2001.
- 12) 前野詩朗，尾上博則，宮内洋介：VOF 法による階段式魚道の流れの数値解析，水工学論文集，第 45 巻，pp.421-426，2001.
- 13) Santiago Marquez Damian: An extended mixture model for the simultaneous treatment of short and long scale interfaces, *PhD thesis*, National University of the Littoral, 2013.
- 14) Berberovic, E., Van Hinsberg, N.P., Jakirlic, S., Roisman, I.V, and Tropea, C.: Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution, *Physical Review E*, 79, 2009.
- 15) Ubbink, O. and Issa, R. I.: A Method for Capturing Sharp Fluid Interfaces on Arbitrary Meshes, *J. Comput. Phys.*, 153, pp.26-50, 1999.
- 16) 国土開発技術研究センター編：床止めの構造設計手引き，山海堂，1998.

(2018. 4. 3受付)