

急拡・急縮を有する山地河川の水面形と断面形状の変化に伴う背水効果に関する研究

STUDY ON WATER SURFACE PROFILE OF MOUNTAIN RIVERS AND BACKWATER EFFECT ACCOMPANYING CHANGE OF CROSS SECTION

小石 一字¹・山田 正²
Ichiu KOISHI and Tadashi YAMADA

¹学生会員 工修 中央大学大学院 理工学研究科都市人間環境学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

²フェロー会員 工博 中央大学教授 理工学部都市環境学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

In recent years, the increase in extreme weather event and the accompanying flood disasters are becoming more intense, especially flood disasters in small or medium rivers and mountainous rivers. This study aims to clarify the influence of cross-sectional and longitudinal sections on river flow and water surface profiles when intense mountain flooding occurs.

In this paper, in order to give a clear answer to the fundamental problem of hydraulics "When the water surface profiles of non-uniform flow accompanying the change of cross-sections is formed?", For this reason, I analyzed factors influencing the backwater effect of the water level on the upstream side of the contraction points.

Key Words : mountain river, flow regime, unsteady flow, water surface profile, contractions

1. はじめに

近年は極端気象の増加や、それに伴う洪水災害が激甚化している。例えば、2016年8月には台風10号の影響により岩手県の小本川や北海道の空知川の上流域において、また、2017年7月には九州北部での集中豪雨によって福岡県の赤谷川で甚大な洪水被害が出ている。このように、近年は中山間地の中小河川や山地河川における洪水災害が多いようである。国土交通省は設計外力を超える洪水が頻発している現状を踏まえ、河川整備の基本となる外力の設定を想定する最大規模の外力へと拡充した防災・減災対策の枠組みを取り入れている¹⁾。従って、整備水準が十分でなく、複雑な河道断面形状を有する山地・中山間地の河川に、過去に経験したことのない大流量が流れた際の水面形の解明は、今後の河川整備計画の策定や河川管理上極めて重要であるといえよう。

本論文で計算対象とした山地河川の多くは掘込河道であり、一般的に川の両岸から岩が迫り出し川幅が急激に狭くなるいわゆる狭窄部をいくつも有している。そのため、本論文では狭窄部の存在による水位の堰上げ背水効

果に着目した。狭窄部上流側の水位の堰上げ背水効果は水理学において古典的かつ基本的な問題であるが、それゆえ実用上重要な問題でもある。本論文は、断面形状の変化に伴う不等流の水面形はいつ如何にして形成されるのかという水理学上の本質的な問題に対し明確な解答を与えることを目的とし、以下の項目につき分析を行った。前半の2, 3章では山地河川における洪水時の水面形と河川狭窄部との関係および著者らの行った再現計算の結果との比較から考察を加えた。上記の考察を踏まえ、後半の4章では断面形状の収縮に伴う水位の堰上げ背水効果に関して著者らの理論と数値実験を基にその要因を解明し水面形の形成過程について水理学的考察を与えた。最後に、5章で堰上げ背水効果の要因についてその影響の程度を分析した。

2. 山地河川における洪水痕跡水位

図-1は、流れ込み式の発電用ダムを有する山地域の実河川のダム区間河道（以下Aダム区間河道とする）における洪水時の痕跡水位と1次元不定流による数値計算結

果を示したものであり、同図中の下図は、Aダム区間河道を標高320 mで水平に切って上から見たときの河川幅の縦断面図である。Aダム区間河道は、河川狭窄部や屈曲部、河床の凹凸を繰り返す典型的な山地河川である。計算対象とした洪水におけるピーク流量はAダムの設計流量を上回る既往最大流量である。

図-1(上図)を見ると下流端はダムの影響により水位が堰上げられている。さらに、下流端ダムから上流約5 km地点の河川狭窄部の上流側で痕跡水位が約3 m垂直に堰上げられていることが分かる。この地点の川幅の縦断面図(図-1(下図))を見ると、川幅が約60 %縮小していることが確認できる。実際にこの狭窄部地点は、側岸から岩が河道中央部に迫り出して水面幅が急激に狭まっており写真からは川幅が約75 %縮小していることが航空写真より判読できる。さらに、この地点より上流側の痕跡水位の不連続点(図中の破線で囲んだ区間)と川幅の縦断面図を比較して見ると、川幅が縮小している地点で、水位が上流方向に階段状に堰上げられていることが分かる。また、平均河床高(Aダム区間河道における各断面の計画高水位に対する通水面積をその水面幅で割った値を計画高水位から引いた標高)の縦断分布を見ると河川幅が狭くなっている地点で河床が低下している。以上のことから、自然地形由来の河川狭窄部の存在が水位を堰上げること、および狭窄部地点で河床が低下することが実測データより読み取れる。なお、Aダムから上流側約7 km地点の水位の不連続面は左右岸の痕跡水位が異なることから河道の屈曲によるものと考えられる。実際に、この地点は河道がカーブを描いている。

3. 実断面を用いた洪水解析：河川狭窄部の存在が水位に与える影響の解析

(1) 洪水解析の目的と方法

本章では、1次元不定流による数値解析を用いて河川狭窄部の存在および河床の凹凸が洪水時の水位に与える影響を定量的に評価する。

a) 1次元不定流の基礎式と数値計算法

計算対象とするA川はそのほとんどが掘り込み河道であるため、流れが一方に卓越していると考え1次元解析を行う。1次元不定流の連続式と運動量方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha v Q)}{\partial x} = -gA \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{gn^2 Q|Q|}{AR^{4/3}} \quad (2)$$

ここに、 A ：通水面積[m²]、 R ：径深[m]、 Q ：流量[m³s⁻¹]、 v ：断面平均流速[ms⁻¹]、 α ：運動量補正係数、 g ：重力加速度[ms⁻²]、 H ：水位[m] ($H=h \cos\theta+z$, $\cos\theta=1$ ：傾斜角)、 h ：水深[m]、 z ：河床高[m]、 n ：

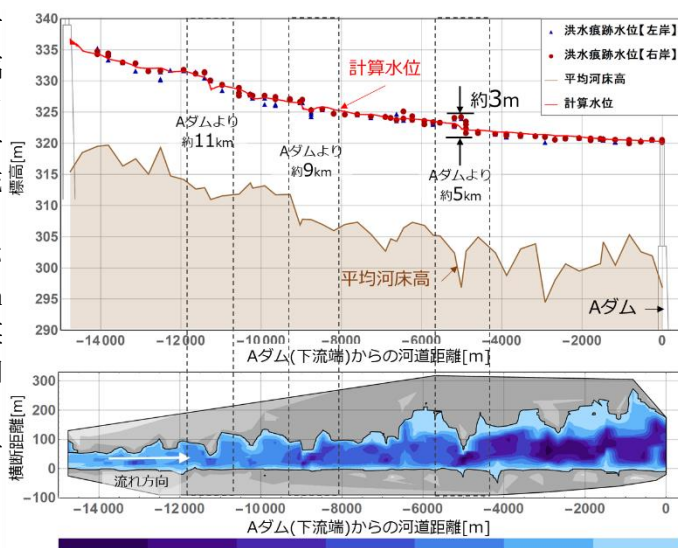


図-1 Aダム区間河道における洪水痕跡水位と計算水位の比較(上図)と標高320mにおける河川幅の縦断面図(下図)

Manningの粗度係数[m^{1/3}s]である。抵抗則はManning則を用いて評価した。数値計算手法は有限差分法を用い、時間微分は前進差分、空間微分は中心差分で離散化し、(2)式の移流項のみ風上化した。

b) 計算条件

境界条件は、上流端にダム放流量の観測値の時系列、下流端に観測水位の時系列をそれぞれ与えた。初期条件は、解析開始時の流量と下流端水位から求めた不等流計算結果を初期水位として与えた。河道横断面は実測断面をそのまま用いた。その際、測量断面毎に水位-流積(径深)関係を作成し、任意の計算間隔ごとにそれらの関係を前後の断面測量地点から線形補間して計算を行った。計算間隔に関しては、空間方向は計算間隔を10 mとし、時間方向はCFL条件を満たすように設定した。

c) 水理パラメータの選定

1次元不定流の基礎方程式群において計算上必要となるパラメータは、Manningの粗度係数と運動量補正係数のみである。Manningの粗度係数は洪水痕跡水位に忠実に計算水位を適合させて逆算した。図-2(b)の橙黄色の線は逆算して得た粗度係数の縦断分布である。粗度係数の値は概ね0.06 m^{1/3}sであった。運動量補正係数は、 $\alpha=1.1$ を採用した。

図-1(上図)の赤線で示した計算水位は再現した水位であり、痕跡水位とよく合っている。下流端から約5 km地点の水位の堰上げ高に関しては、洪水痕跡に見られる約3 mとはならなかったものの、その他の区間の計算水位は狭窄部による背水効果をよく再現している。

(2) 洪水解析結果とその考察：河川狭窄部の存在が水位に与える影響の分析

本節では下流端ダムから上流約5 km地点の河川狭窄部を懸案地点として断面形状等を変化させて水位と断面形

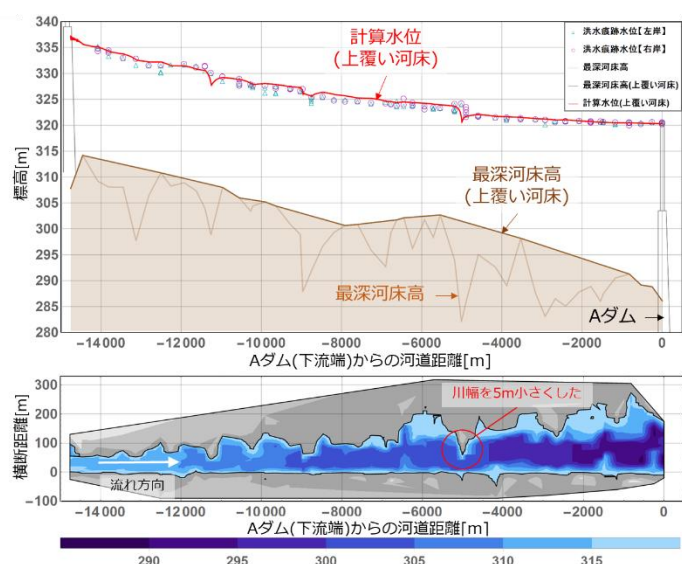


図-2 Aダム区間河道において河床凹部を死水域と見なし河床凹凸を平坦化した上覆い河床断面を用いた計算水位と洪水痕跡水位との比較(上図)と上覆い河床断面の河川幅の縦断面図(下図)

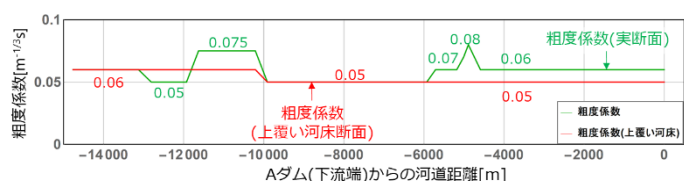


図-3 A川実断面およびA川上覆い河床断面を用いて同定したManningの粗度係数の縦断分布図

状との関係について詳細に解析を行った。図-2は、水位の堰上げに着目して行った洪水解析の中で懸案地点の再現性が高かった洪水解析結果の1つである。一般的に流下方向に対して河床が急に低くなるようなところでは、水流が渦を巻いて水の流れていない領域、いわゆる死水域になっていることがある。本解析では、河床の低くなっている部分は全て死水域であると見なし、最深河床高に対して上から布を覆い被せたような平坦な河床高（以下、上覆い河床）を設定した。さらに、懸案地点の実際の河川幅は測量断面から得られる河川幅と比べ狭いことから、航空写真の判読から狭窄部断面における河川幅を5 m狭くして計算を行った。上覆い河床断面を用いて算出した水位を見ると、水位の堰上げ地点は少し上流側にずれているものの、堰上げ高の再現性は良好である。

図-3は、A川実断面およびA川上覆い河床断面を用いて同定したManningの粗度係数の縦断分布図である。それぞれの断面から同定したManningの粗度係数を比較すると、上覆い河床断面の粗度係数は河道全体にわたってほぼ同一の値をとっていることから、洪水痕跡水位はほぼ川幅の変化のみから説明できることが分かる。従って、以上より通水面積の縮小の程度が大きいほど階段状の水位が形成されやすいこと、および河床の凹凸がない場合の洪水水位の決定要因は川幅の変化であることが言えよう。

4. 狭窄部上流側の水位の堰上げ背水効果に影響する要因の分析

(1) 断面の収縮に伴う背水効果に関する従来の研究

断面形状の収縮に伴う背水効果は水理学上基本的かつ実用問題としても重要であるため、理論的、実験的および数値的に研究されてきた^{例へば2), 3), 4)}。一般的に、狭窄部における水面形は、狭窄部上流側のFroude数、水路幅縮小率、水路勾配、粗度、および下流の水深によって変化するが²⁾、従来から狭窄部の存在による水位の堰上げ現象は、主に摩擦抵抗の効果によって説明されてきた。例えば、TracyおよびCarter³⁾は狭窄部による背水効果の実験を行い、水位の堰上げ高に及ぼす断面縮小率および粗度の間の関係を図示した。この関係から縮小率および粗度が大きいほど背水位は高くなること、および粗度係数0.05以上では背水位はほぼ変化しなくなり、背水位の上昇は断面縮小率のみに依存することを明らかにしている。また、山田・高木ら⁴⁾は川幅の変化する水路における不等流の水面形の解析解を河床勾配と摩擦勾配が釣り合う条件の下で摂動法によって導出し、不等流の数値解と比較した。その結果、狭窄部上流側の堰上げ背水に着目すると、不等流の数値解は水深の堰上げがあるのに対し、解析解は狭窄部直上で下に凸の水面形になって堰上げがなかった。このことから、狭窄部では摩擦項の効果によって水位が上流方向へ堰上げられること、およびその効果の要因が狭窄部で流れが加速することによる摩擦抵抗の増加によるものであることを理論的に明らかにした。

他方、著者ら⁵⁾は狭窄部を有する河川に設計外力を超えるほどの大流量が流下する際には、狭窄部直上で水位が限界水位をとり、狭窄上流側で段波が発生・遡上して水位が堰上がることで、および流量が狭窄部上流側で貯留されること（河道貯留効果）を一樣勾配水路における数値実験によって示した。また、上記の段波の発生による水位の堰上げ条件は水面形遷移に関する山田の理論^{6), 7), 8)}におけるBernoulliの定理の破綻条件と合致することを示した。従って、我々が実河川や実験室においてしばしば見かける狭窄部上流側の堰上げ背水は、摩擦抵抗の影響による効果と狭窄部で水面形が遷移することによる段波の発生による効果の少なくとも2つの要因によって生じる現象であると言えよう。本章では、狭窄部を有する開水路における背水効果の要因について検証するため1次元不定流による数値実験を行い、断面形状の変化に伴う不等流の水面形はいつ如何にして形成するのかを明らかにする。

(2) 段波の発生による水位の堰上げ効果の検証

a) 数値実験条件と数値計算手法

狭窄部を有する開水路における背水効果の要因について検証するため、数値実験条件として、延長20 kmの矩形断面開水路を設定した。川幅は100 mとし、水路の中

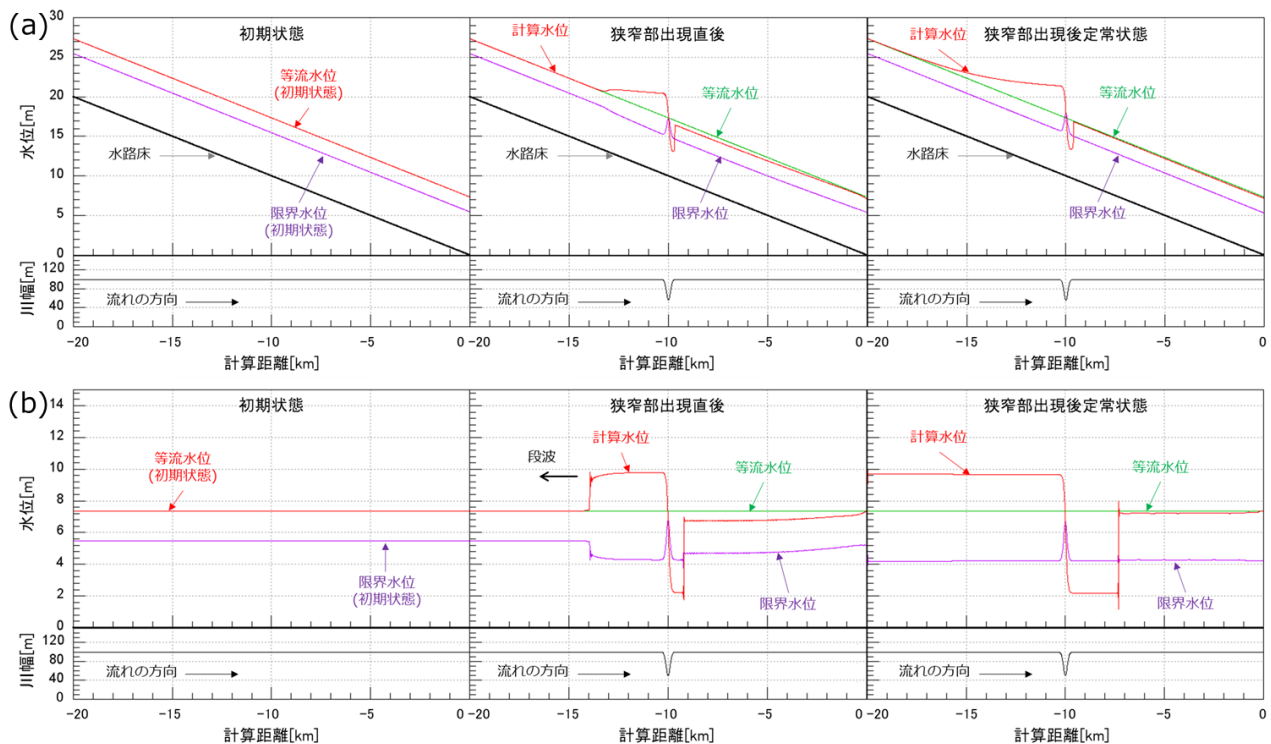


図-4 水路幅の変化に伴う不等流の水面形の形成過程の数値実験(左から右へ時間変化)

(a) 等流状態から水路中央部の水路幅を徐々に狭めたときの数値実験結果(河床勾配1/1000, Manningの粗度係数 $0.02 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$)

(b) 水平床で摩擦のないときの上記と同様の条件で行った数値実験結果(水平床, 摩擦なし)

心(下流端から 10 km地点)に任意の縮小率の凸型狭窄部を設定した。ここに、水路幅縮小率 ϵ は縮流前の水路幅に対する縮流部の水路幅の割合を1から引いたものと定義する。河床勾配とManningの粗度係数は任意に与えた。数値計算手法はMacCormackの陽的・2段階差分法を用い、1次元不定流の基礎式(1)式、(2)式を数値的に解いた。初期条件として等流水深を一樣に与え、境界条件は、山地河川および中流部の河川において、概ね1/50年から1/100年確率の洪水流量を想定し、上流端に $4000 \text{ m}^3/\text{s}$ の一定流量を与えた。数値実験は、最初に一樣幅で上流から一定流量を与えつつ徐々に狭窄部地点の水路幅を任意の縮小率になるまで狭め、不定流計算の収束解として不等流の水面形を求めた。実現象としてこの実験ケースを捉えるならば、橋脚に流木が溜まっていき、通水面積が徐々に小さくなるような状況を想定されたい。

b) 数値実験結果とその考察

図-4(a)は、河床勾配1/1000, Manningの粗度係数 $0.02 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ の条件下で、等流状態の流れにおいて水路中央部の水路幅を縮小率が45%になるまで徐々に狭めた場合の水面形の時間変化を示したものである。図-4(a)を見ると、水路幅が狭まって以降、狭窄部上流側で水位が徐々に持ち上げられて、狭窄部直上で支配断面をとり、その直下流側では水位が限界水位を下回って流れが射流となっていることが分かる。狭窄部下流側では射流から跳水を起こして常流の水位に接続しており、水路幅の縮小直後の狭窄部下流側の水位は等流水位より下回っている。

他方、図-4(b)は、河床勾配とManningの粗度係数をそれぞれ0(水平床・摩擦なし)として、それ以外は図-4(a)と同一条件で計算を行った場合の水面形の時間変化を示したものである。水路中央部の水路幅が狭くなるにつれ、水路中央部では下に凸な水面形が形成され、水路幅縮小率が10%を超えたあたりで狭窄部上流側の水面が急激に持ち上げられ、流れの状態が常流から常流に接続する段波が発生し遡上し始めた。また、狭窄部より直下流側では計算水位が限界水位を下回って流れが射流となり、その下流で跳水を起こしてさらに下流の常流の水位に接続し、下流に伝播する衝撃波を伴いながら定常状態の水面形、すなわち不等流の水面形が形成された。以上より、摩擦抵抗がないにも関わらず、水路幅縮小率が10%になるのを引き金に水面形の状態が急変し、狭窄部上流側で水位の堰上げが起こることが分かる。

c) 山田の理論および数値実験との比較

山田ら^{9),10)}は狭窄部や河床凸部を有する開水路を対象に、摩擦抵抗のない場合の水面形を、Bernoulliの定理から断面形状変化部上流側のFroude数と水路形状を表す要素(無次元河床高 η , 水路幅縮小率 ϵ)を用いて導出した3次方程式の解として導いた。また、水面形遷移の条件をBernoulliの定理の破綻条件として理論的に導いており、この条件下では縮流部上流側で段波を発生させることで水面形が別の状態へ遷移することを理論解析と室内実験および現地観測から明らかにしている。

図-5は、狭窄部を有する開水路流れにおける水面形の

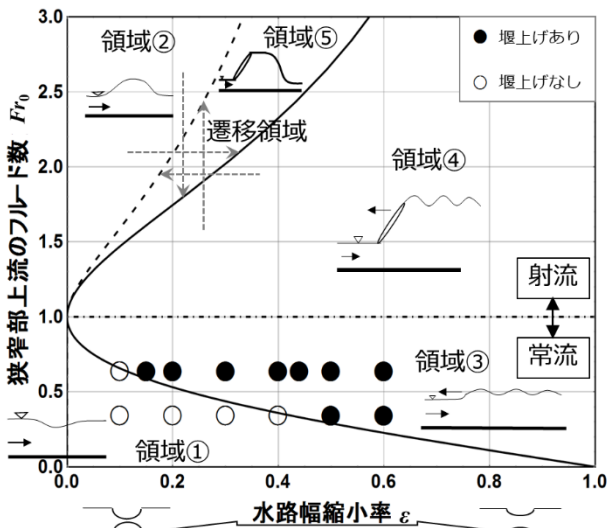


図-5 狭窄部を有する開水路における水面形レジーム図：
山田の理論と数値実験結果との比較

レジーム図に本章で実行した数値実験結果を書き加えたものである。縦軸に水路幅縮小率 ε 、横軸に狭窄部上流の段波の発生していない地点のFroude数をとっており、領域①、領域②は段波や跳水の発生しない領域、領域③、領域④は段波や跳水の発生する領域、また、領域⑤は跳水発生遷移領域である。図中の黒丸●および白丸○はそれぞれ水位の堰上げがあった数値実験条件、水位の堰上げがなかった数値実験条件である。数値実験結果は山田の理論によく適合している。従って、Bernoulliの定理の破綻条件を満たすFroude数と水路幅縮小率 ε が与えられた場合は、元々与えた水面形が別の水面形の状態へ遷移するのに伴い段波が発生する。以上の結果より、図-4(a)の水面形遷移に伴う狭窄部上流側の水位の堰上げ背水効果の要因の1つは、水面形遷移に伴う段波の発生による効果であることが分かった。

(3) 摩擦抵抗の影響による水位の堰上げ効果の検証

図-6は、河床勾配1/1000、Manningの粗度係数0.012 $\text{m}^{1/3}\text{s}$ （摩擦勾配 I_f 水路勾配 i_0 となる n ）、上流端の（あるいは狭窄部が無いときの等流状態における）Froude数0.4、水路幅1 mの開水路に対し縮小率30 %の狭窄部を設定した場合の1次元不定流の数値解および、有限振幅波かつ静水圧近似の基で摩擦損失を考慮しないBernoulliの定理より著者らが求めた水深に関する3次方程式の解を比較したものである。前節の山田の理論におけるBernoulliの定理の破綻条件は満たしていないが、狭窄部上流側で摩擦の効果によって水位が堰上げられているのが分かる。なお、水平床で摩擦のない場合は3次方程式の解と数値解は厳密に一致する。

(4) 断面形状の変化に伴う不等流の水面形の成立過程に関する考察

本章の最後に、断面形状の変化に伴う水面形の成立過

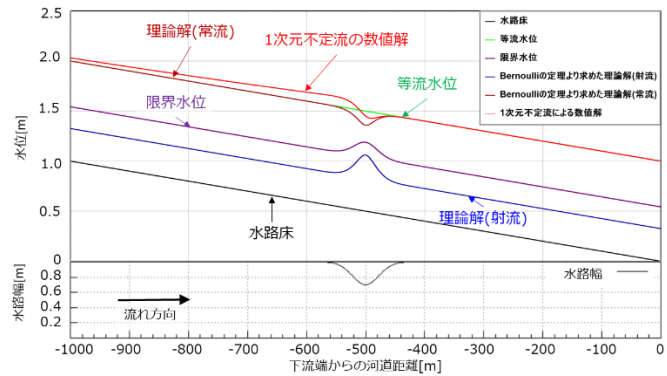


図-6 摩擦抵抗の影響による水位の堰上げ効果の検証：摩擦損失を考慮しないBernoulliの定理より著者らが求めた水深に関する3次方程式の解(常流、射流)と1次元不定流の数値解との比較

程に関して以上の結果をふまえて考察を与える。本章では、著者らの研究により、狭窄部上流側の堰上げ背水は従来の理論で提唱されている摩擦抵抗の影響による効果の他に、狭窄部で水面形が遷移することによる段波の発生による効果の少なくとも2つの要因によって生じる現象であることを提示し、数値実験により狭窄部上流側の背水効果に影響する要因を検証した。その結論として、水面形の成立過程に関し以下のことが言える。

一般的な河道の狭窄部において洪水流が流下する状況を考える。このときまず初めに、流れが加速することによる摩擦抵抗の増加に伴い、狭窄部上流側の水面が持ち上げられる。その後、狭窄部上流側のFroude数と水路幅縮小率 ε （あるいは無次元河床高 η ）がBernoulliの定理の破綻条件を満たしていれば、狭窄部直下流側で水面形が常流から射流へ遷移するのに伴って狭窄部上流側では段波が発生・遡上し、狭窄部直上で支配断面を持つ不等流の水面形が形成される。また、水面形の成立過程の過渡的状況においては、狭窄部上流側に流量が貯留される河道貯留効果が現れるのである⁵⁾。

5. 水路幅縮小率と水深上昇率との関係：摩擦抵抗の影響および段波の発生による水位の堰上げ効果の比較

本章では、前章での議論を踏まえ、狭窄部上流側の堰上げ背水の要因に関して、摩擦抵抗の影響による効果および段波の発生による効果を明瞭に区別した上で、数値実験によりそれらの効果の程度を比較した。

図-7は、数値実験より得られたManningの粗度係数の違いによる水路幅縮小率 ε と狭窄部上流側の最大水深上昇率 R_h^* [%] の関係を図示したものであり、狭窄部の最大水深上昇率 R_h^* に対する、段波の発生による効果と摩擦抵抗の効果の影響割合が分かる図である。図-7の関係は前章の図-5に示した数値実験と同様に狭窄部の影響がないほど上流側（あるいは狭窄部が無いときの等流状態における）のFroude数は0.4とし、水路幅縮小率 ε とManning

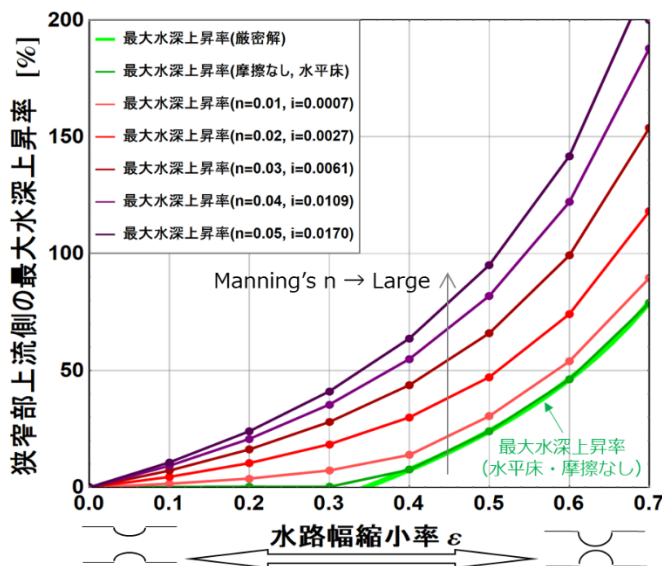


図-7 水路幅縮小率と狭窄部上流側の最大水深上昇率の関係：狭窄部上流側の堰上げ背水に対する摩擦抵抗の影響による効果および段波の発生による効果の影響割合を示す図

の粗度係数 n ，および摩擦勾配 I_f と等しくなるように河床勾配 i_0 を様々に変えて得られたものである．ここに，最大水深上昇率 R_h^* は初期水深 h_0 に対する狭窄部上流側の最大水深 h_e^{Max} と初期水深 h_0 との差の割合 R_h^* とし，

$$R_h^* = \frac{h_e^{Max} - h_0}{h_0} \times 100, \varepsilon_i = 0.0 \sim 1.0 \quad (3)$$

と定義する．また， ε_i は任意の水路幅縮小率である．

図-7の最下曲線は，摩擦なし・水平床のときの狭窄部上流側の最大水深上昇率 R_h^* の数値解と著者が導出した理論解であり，両者は一致している．これは，段波の発生のみによる堰上げ効果である．図-7より，水路幅縮小率 ε が大きいくほど狭窄部上流側の水深上昇率 R_h^* は指数関数的に大きくなっている．さらに，同一の縮小率 ε における粗度係数 n に対する水深上昇率 R_h^* を見ると粗度係数 n が大きくなるにつれて水深上昇率 R_h^* の変化率は小さくなっている．Manningの粗度係数が0.03のとき段波の発生による背水効果と摩擦による背水効果が約半分ずつ水位の堰上げに起因していることが読み取れる．

6. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す．

- 1) 山地域の実河川のダム区間河道における洪水痕跡水位と河道縦横断面形状との関係から，自然地形由来の河川狭窄部の存在が水位を堰上げること，および狭窄部地点で河床が低下することが分かった．
- 2) 次に，最深河床高に対して上から布を覆い被せたような平坦な上覆い河床断面を用いて1次元不定流による数値解析をした結果，同定したManningの粗度

係数は河道全体にわたってほぼ同一の値をとっていることから，洪水痕跡水位はほぼ川幅の変化のみから説明できることが分かった．

- 3) 一般的に河川狭窄部上流側の堰上げ背水は，摩擦抵抗の影響による効果と狭窄部での水面形の遷移に伴う段波の発生による効果の少なくとも2つの要因によって生じる現象であることを，著者らの理論および1次元不定流による数値実験により明らかにした．
- 4) さらに，断面形状の変化に伴う水面形の形成過程に関して，開水路狭窄部において摩擦抵抗による水位の堰上げ後，Bernoulliの定理の破綻条件を満たす条件でさらに水位が上流方向に堰上がり，不等流の水面形が形成されることを明らかにした．
- 5) 最後に，狭窄部上流側の堰上げ背水の要因に関して，摩擦抵抗の影響による効果および段波の発生による効果を明瞭に区別した上で，数値実験によりこの2つの効果の程度を比較した．

謝辞：本研究は文部科学省科学研究費補助金(基盤研究(A))「可能最大洪水に対応できる数理科学的な河川計画手法の確立」(研究課題番号：26249072，代表者：山田正)の支援を受けて行われたものである．記して謝意を表す．

参考文献

- 1) 国土交通省：新たなステージに対応した防災・減災のあり方，2015．
- 2) 石原藤次郎，志方俊之：開水路急縮部の水理学的性状に関する研究，土木学会論文集 1967 巻(1967) 138 号，pp.30-38，1967．
- 3) Hubert J. Tracy and Rolland W. Carter: Backwater effects of open-channel contractions, Transactions, American Society of Civil Engineers, vol. 120, pp.955-980, 1955.
- 4) 高木隆一，佐藤直良，山田正：幅の変化する水路(狭窄，拡幅)を流れる不等流の水面形の解析解，第 60 回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集，Vol.13, pp. 131-132, 1986.
- 5) 小石一字，山田正：急縮部を有する河川における水位の縦断特性と河道貯留効果，土木学会論文集 G(環境)Vol.73, No.5(地球環境研究論文集第 25 巻)，I331-338, 2017.
- 6) 山田正，水子龍彦，竹本典道：山地河道の水面形遷移に関する研究，土木学会第44回北海道支部論文報告集，pp. 293-298, 1988.
- 7) Quimpo, M. and Yamada, T.: General Hydraulic Characteristics of an Open Channel with Narrow Path, Proceeding of World Environmental and Water Resources Congress 2009: 1-10. doi: 10.1061/41036(342)273. 2009.
- 8) 銭潮潮，山田正：開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究，水利科学 別冊，No.336(第 58 巻第 1 号)，pp. 65-99, 2014.

(2018. 4. 3 受付)