

# 随伴変数法による水位縦断分布の リアルタイム予測に関する研究

## REAL-TIME WATER LEVEL PREDICTION USING ADJOINT SENSITIVITY ANALYSIS

西口亮太<sup>1</sup>・壇鉄也<sup>2</sup>

Ryota NISHIGUCHI and Tetsuya DAN

<sup>1</sup>正会員 工修 日本工営株式会社 (〒 102-8539 東京都千代田区九段北 1-14-6)

<sup>2</sup>正会員 日本工営株式会社 (〒 102-8539 東京都千代田区九段北 1-14-6)

For real-time prediction of river water level, a numerical method of adjoint sensitivity analysis in river flow simulation was studied. First, numerical method of adjoint sensitivity analysis to assimilate observed water level into one-dimensional river flow model is presented. Next, the model verification was carried out to assimilate water level and discharge by using hydraulic model tests and identical twin experiment. As a result, this method provided a practically sufficient assimilated value of upstream boundary discharge and water level time series. Finally, this method has been applied to the actual flood event of the Tama River. As the prediction accuracy of the water level and discharge is sufficient, the validity of this method was confirmed.

**Key Words:** *Adjoint Sensitivity Analysis, Real-Time Simulation, Water Level Prediction, Data Assimilation*

### 1. はじめに

近年, 水面形をモニタリングすることの重要性が認識されるようになり<sup>1)</sup>, 幾つかの河川でそのための観測が試行されている. 観測データと数値シミュレーションの解とを統合することをデータ同化<sup>2)</sup>というが, このように斉時・多点の観測水位が得られるようになると, データ同化手法を用いることで, 概ね実況の水位分布に合致し空間的に偏りのない水理量のデータセットが得られる. さらに, これを初期条件として予測演算を行うことで予測精度の向上が期待できる. また, 空間的に細密な予測値が得られるようになるので, 防災情報として現状の「点」での予報よりも質的な向上が図られる.

データ同化の研究は気象の分野でかねてより旺盛に行われており<sup>3)</sup>, 現在, 気象庁の数値予報では4次元変分法(4D-VAR)に基づく随伴変数法が採用されている<sup>4)</sup>. また, 随伴変数法は機体の形状最適設計<sup>5)</sup>など機械系でも広く使われている.

一方, 河川工学の分野では, Sandersら<sup>6)</sup>, Dingら<sup>7)</sup>, Elhanafyら<sup>8)</sup>, 吉田ら<sup>9),10)</sup>による流量・抵抗係数等の感度分析に随伴変数法を用いた研究がなされているものの事例はそう多くない. また, 今のところ, 水位予

測への適用例は見当たらない.

このような事情を踏まえて, 本研究では, 随伴変数法による水位縦断分布のリアルタイム予測について検討する. 本稿はその序として, 観測水位データのみにより, 解析範囲全体の実況水位, 流量の縦断分布を予測することを目的として, 随伴変数法によるデータ同化について検討を行う. 以降では, 演算負荷が小さく実用性が高いと考えられる一次元河川流解析に対して, データ同化のための計算式を展開し, 仮想水路と模型実験水路を対象とした計算で手法の適用性を検討したうえで, 実河川での出水事例でリアルタイムのデータ同化の数値実験を行った.

### 2. 一次元河川流解析における随伴変数法の定式化

#### (1) 一次元河川流解析の支配方程式

一次元河川流れの支配方程式は式(1)で与えられる.

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2)^{\text{tr}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gA i_e \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここに、 $t$ : 時間座標 ( $0 \leq t \leq T$ ),  $x$ : 空間座標 ( $0 \leq x \leq X$ ),  $Q$ : 流量,  $A$ : 河積,  $H$ : 水位,  $i_e$ : 摩擦勾配である. これの初期条件・境界条件は下式で与える.

$$\begin{aligned} A_0(x) &= A(x, 0), & Q_0 &= Q(x, 0) \\ A_B(t) &= A(X, t), & Q_B(t) &= Q(0, t) \end{aligned} \quad (2)$$

複数の観測水位のデータとこれに対応する計算水位の差が最小となるような初期条件・境界条件を探索し, 最適な水位分布を得ることがここでのデータ同化にあたる. 上流端の流量は探索対象の変量であるため, 計算の途上で観測流量を必要としない.

ところで, 摩擦勾配を Manning 式で計算する時, Manning の粗度係数が今ひとつの計算条件となる. 計算上, これを探索対象に加えることも可能ではあるが, 同化される係数値が工学的に解釈困難な値となることを避けるため, 本研究ではこれを定数として扱う.

## (2) 随伴変数法

本問は, 状態量を  $\mathbf{q}$  (ここでは,  $Q$  と  $A$ ), 制約条件を  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ , 水位の推定誤差を評価関数  $J$  として, これを最小化する制御変数  $\mathbf{D}$  (ここでは,  $A_0$ ,  $Q_0$ ,  $A_B$  および  $Q_B$ ) を求める等式制約付きの非線形計画問題である. この種の問題はラグランジュの未定乗数  $\lambda$  を導入することで無制約問題に置き換えられる. すなわち,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を新たな変数に加えて,  $J$  の代わりに次のラグランジュ関数  $L$  を最小化する.

$$L = J + \int_0^T \int_0^X (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) dx dt \quad (3)$$

$L$  の最小化は反復計算によるが,  $\mathbf{D}$  を更新する際に感度係数  $\delta L / \delta \mathbf{D}$  が必要になる. この感度係数を効率的に計算するためのアルゴリズムが随伴変数法である.

本問における式展開は次項で示すものとして, 式 (3) を変形すると,  $\mathbf{D}$  を含む項とこれを含まない項に分離でき, 後者から  $\lambda$  に関する偏微分方程式 (随伴方程式) が得られる. これを解いて  $\lambda$  を求めると, 既知の諸量から  $\delta L / \delta \mathbf{D}$  が直ちに計算される. 随伴方程式の求解に要する計算負荷は支配方程式のそれと同程度であり,  $\mathbf{D}$  の全ての要素の  $L$  に対する感度係数が一度に計算されるので, 要素毎に摂動を与える直接法に対して, 大幅に演算時間が短縮できる. 以上の計算の流れを示したものが図-1 である.

## (3) 随伴方程式・感度係数

評価関数  $J$  は, 何れの観測点でも観測精度に差がないものと仮定して, 式 (4) のとおりに与えた.

$$J = \int_0^T \int_0^X \frac{w}{2} (A - A_{\text{obs}})^2 dx dt \quad (4)$$

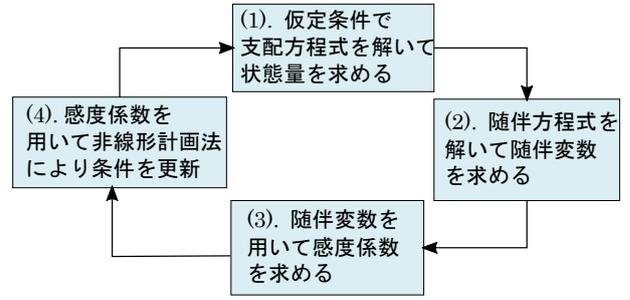


図-1 随伴変数法の流れ

ここに,  $A_{\text{obs}}$  は観測水位より計算した河積である.  $w$  は観測データがある時間・空間座標で 1, それ以外で 0 をとる.

式 (3) に式 (1) および式 (4) を代入すると下式が得られる.

$$\begin{aligned} \delta L &\equiv \int_0^T \int_0^X \left( \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial Q} \delta Q \right) dx dt \\ &= \delta L_\Omega + \delta L_\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta L_\Omega &= - \int_0^T \int_0^X \left[ \left\{ -w(A - A_{\text{obs}}) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + gA \frac{\partial}{\partial A} \left( H \frac{\partial \lambda_2 A}{\partial x} \right) - g\lambda_2 i_e \right\} \delta A \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right\} \delta Q \right] dx dt \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta L_\Gamma &= \int_0^T \left[ - \left( \lambda_1 + \frac{2\lambda_2 Q}{A} \right) \delta Q_B \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \left( gH - \frac{Q^2}{A^2} \right) \delta A_B \right] dt \\ &\quad - \int_0^X \left[ \lambda_1 \delta A_0 + \lambda_2 \delta Q_0 \right] dx \end{aligned} \quad (7)$$

$\delta L_\Omega$  は変分  $\delta \mathbf{D}$  を含まないので,  $L$  に対する寄与はゼロである. 従って, 式 (6) の被積分関数はゼロでなければならない. すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + gA \frac{\partial}{\partial A} \left( H \frac{\partial \lambda_2 A}{\partial x} \right) - g\lambda_2 i_e \\ = w(A - A_{\text{obs}}) \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

である. これが一次元河川流解析モデルの随伴方程式である.  $\lambda_1(x, T) = \lambda_2(x, T) = 0$  を与えて本式を解くと,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  が計算される. さらに, これを用いて式 (7) から感度係数が次式で計算される.

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta A_0} &= -\lambda_1(x, 0), & \frac{\delta L}{\delta Q_0} &= -\lambda_2(x, 0) \\ \frac{\delta L}{\delta Q_B} &= - \left\{ \lambda_1(0, t) + 2\lambda_2(0, t) \left[ \frac{Q(0, t)}{A(0, t)} \right] \right\} \\ \frac{\delta L}{\delta A_B} &= \lambda_2(X, t) \left\{ gH(X, t) - \left[ \frac{Q(X, t)}{A(X, t)} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

#### (4) 支配方程式の離散化および数値計算方法

式(1)、式(8)の離散化は、定義の煩雑さを避けるため、全ての変数を計算格子中央に配置する集中格子を採用した。式(1)の離散化は、自然河道断面および集中格子の計算に適したYingら<sup>11)</sup>によるスキームを採用した。一方、式(8)の離散化は、式(1)との整合性を考慮して、式(1)の離散式を $q = (A, Q)^T$ で微分することにより導出した。離散式は紙面の制約上割愛する。また、感度係数による $D$ の最適化には降下法を用いる。降下法には、共役勾配法を使用した。

以降では、式(1)による通常の計算による $q$ と随伴変数法によるデータ同化によって得られる $q$ を区別するため、前者を「計算値 (Calculated)」, 後者を「解析値 (Assimilated)」と定義する。

### 3. 本手法の適用性の検証

#### (1) 双子実験による検証

仮想水路における双子実験により本手法の妥当性の検証を行った。双子実験とは、所与の条件の元で計算した結果の一部を観測値とみなし、仮定した条件およびその計算結果が、反復計算によって真値に収束するかどうかを確認する数値実験である。仮想水路の諸元は、川幅: 270 m, 流路延長: 20 km, 河床勾配: 1/3000, マニングの粗度係数: 0.03 の矩形断面水路とした。上流端流量は、図-2の赤線のように設定した。同化期間は全期間47時間とした。計算条件は、 $\Delta t=2$ 秒,  $\Delta x=200$ mとし、下流端水位は等流水深を与えた。評価関数で与える観測水位は、下流から、0 km, 5 km, 10 km, 15 kmの4地点で、600秒間隔に与えた。第一推定値(図中黒線)から始めて、降下法の繰り返しにより既知の上流端流量に収束するかを確認した。

図-2によると、30-50回程度の繰り返し計算により真値とほぼ一致していることが確認できる。また、図-3に示す上流端の水位-流量関係についても同様の結果が得られている。これらより、同化期間内の上流端水位、流量が真値に一致することは、水理量の時空間分布がすべて真値と一致することを示している。わずか4地点の水位情報よりこのような結果が得られることは、本手法は妥当かつ強力な同化手法であることが示している。

次に、図-4に繰り返し回数と評価関数の関係を示すが、最初の10回程度までの繰り返し計算で急激に評価関数が減少し、その後減少傾向が鈍化している。繰り返し回数に比例して計算時間が増加するため、実用上は、収束判定に評価関数の下限値を設ける等により計算時間の短縮を図ることが可能である。

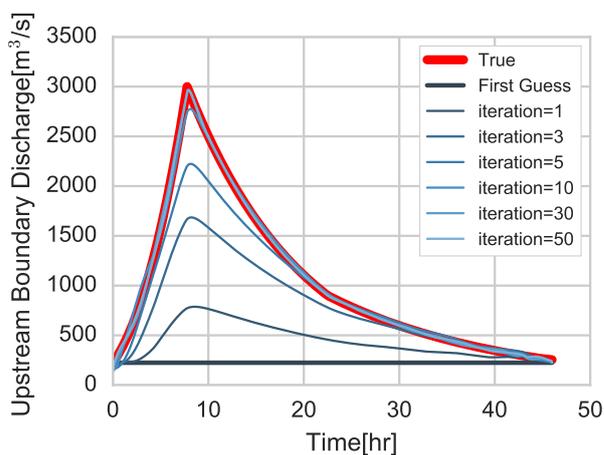


図-2 繰り返し回数ごとの上流端流量の収束過程

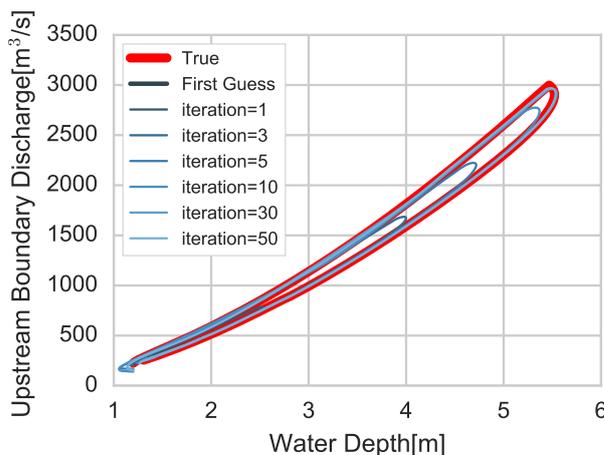


図-3 繰り返し回数ごとの上流端水位-流量関係の収束過程

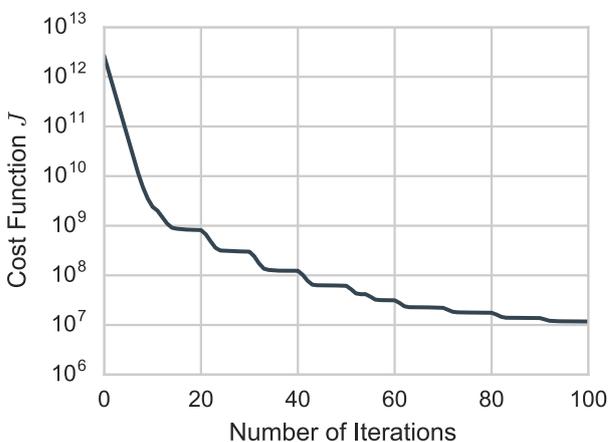


図-4 繰り返し回数と評価関数の関係

#### (2) 模型実験による検証

##### a) 模型実験の概要

Ashida・Takahashi<sup>12)</sup>によって行われた洪水波形伝播特性の把握を目的とした模型実験に対して本手法の適用性を検証した。実験水路の諸元は、水路幅 60 cm, 長さ 150 m, 水路勾配 1/500, マニングの粗度係数は 0.0116 である。上流端流量は継続的に計測されていないが、初期流量 5.0 l/s の定常状態に対して、最大流量 31.5 l/s と

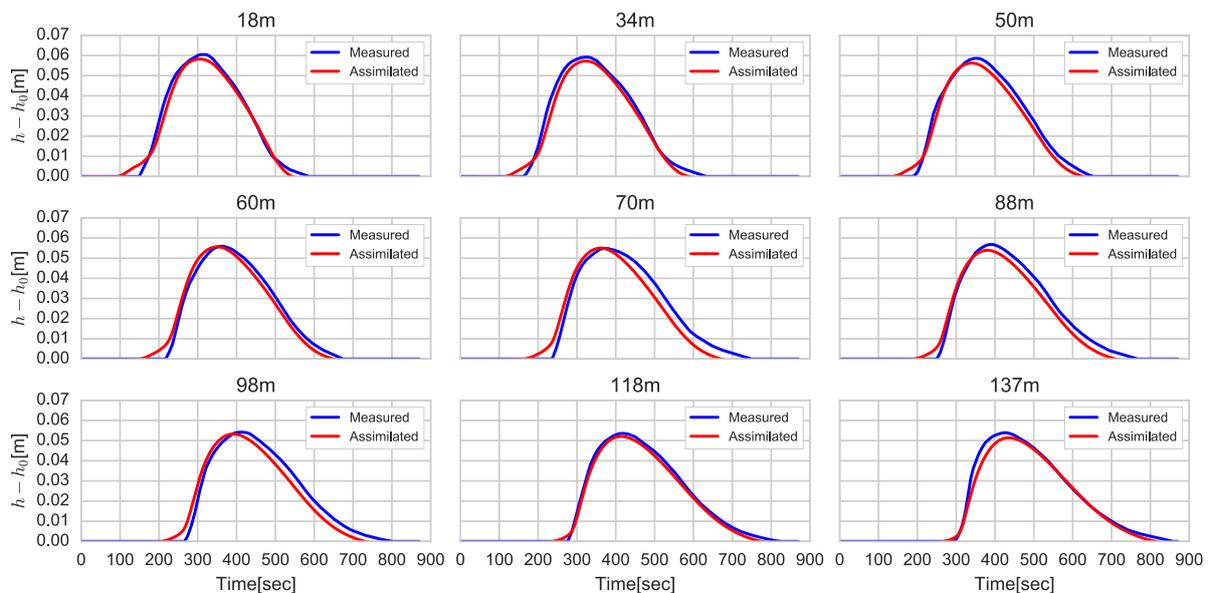


図-5 各地点の水深の計測値と解析値の比較(水深は初期水位で基準化, 各図のタイトルは上流端からの距離を示す)

なるような流量波形を与えた。水深計測は、9地点において約1秒間隔で実施している。

#### b) 検証結果と考察

計算条件は概ね実験条件と同様とするが、下流端は等流近似が可能となるように十分下流側に設定した。初期条件は、実験条件より5.0l/sによる計算値を与えた。また、 $\Delta t=0.1$ 秒、 $\Delta x=1$ mとした。データ同化期間は、水深計測期間と同様に870秒間とした。上流端流量の第一推定値は、初期条件と同様に設定した。評価関数は、図-5青線の計測水深より設定した。

水深の計測値と解析値を比較すると、図-5のとおり、全地点で概ね一致している。これより、本手法によるデータ同化の妥当性が示された。また、上流端流量の解析値は、図-6のとおりである。流量波形を計測していないため、ピーク流量のみの比較となるが、解析値は35.0l/s程度であり、実験値31.5l/sと比較して、差異は1割程度と概ね一致している。この結果は、水位のデータ同化の精度が十分であった場合、解析範囲全体の水理量を高精度で解析可能であることを示している。

### 4. 実河川におけるリアルタイム水位予測への本手法の適用

前項では、対象波形の全期間の水位情報による解析を実施したが、ここでは、リアルタイム水位予測を想定して、観測水位の取得間隔ごとにデータ同化を実行するものとした。

#### (1) 対象洪水および計算方法の概要

多摩川における平成19年9月台風9号による出水を対象として、本手法の適用性を検証した。解析範囲は、

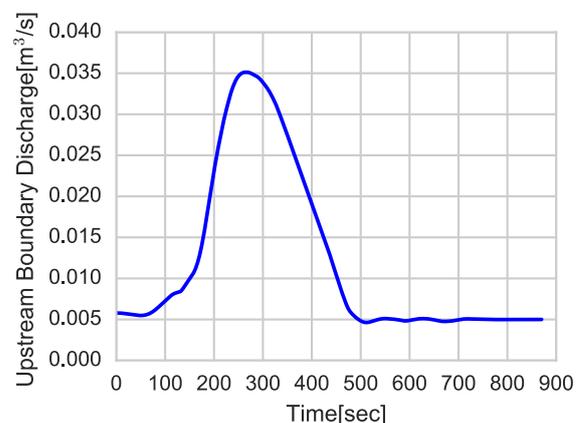


図-6 上流端流量波形の解析値

大規模な支川流入を含まない距離標12.0k-27.8k区間の約15.8kmとした(図-7)。当該区間には、水位観測所(石原, 玉川, 田園調布)が3箇所位置しており、1時間間隔の観測水位データが得られている。これらの内、流量観測は、石原観測所のみで行われている。洪水期間中の観測水位は、図-8の青点のとおりである。また、解析範囲には、二ヶ領上河原堰, 二ヶ領宿河原堰, 調布取水堰の3つの可動堰が存在するが、解析期間内は全開状態と想定されるため、堰操作は考慮していない。

データ同化期間は、洪水流の流下時間が1時間程度であることをふまえて、3時間と設定し、更新の度に3地点の4時点(直前3時間以内、1時間間隔)の観測水位を用いてデータ同化を実行した。初期条件(3時間前の水位・流量の縦断分布)は、前回の予測更新時のデータ同化で得られた2時間前の水位・流量の解析値の縦断分布で与えた。上流端流量の第一推定値は、初期条件と同様に設定した。また、 $\Delta t=2$ 秒、 $\Delta x=200$ m、下流端水



図-7 計算範囲位置図

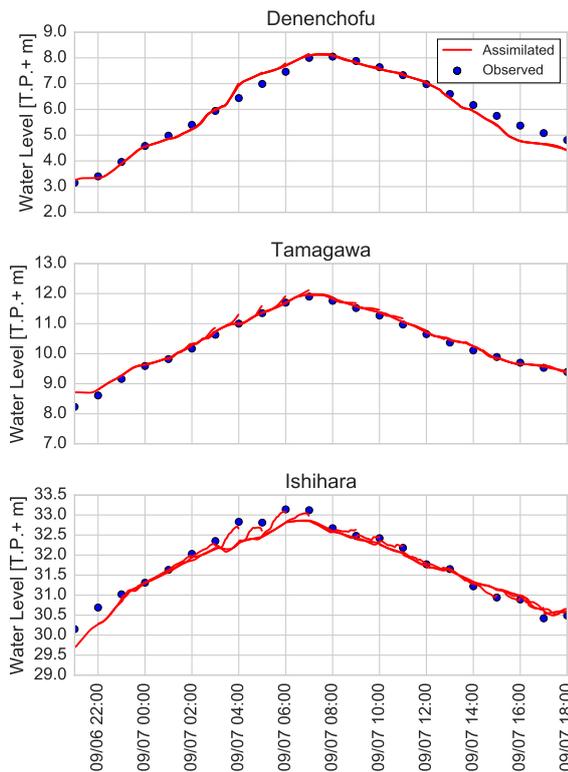


図-8 観測水位と解析水位の比較

位は等流水深とし、マンニングの粗度係数は、ピーク流量流下時の不等流計算の結果を参考に、0.023 とした。

## (2) 解析結果と考察

各水位観測所地点の解析水位と観測水位の比較結果は、図-8のとおりであり、部分的に最大50cm程度の差異はあるが、その他の時間では、両者は概ね一致している。詳細に確認すると、石原地点の観測水位は、玉川地点、田園調布地点と比較して、ピーク前の7日2時から6時にかけて、不連続な変化を示している。この要因は不明であるが、物理的に評価できない観測値は、解析精度を低下させる要因となる。この課題を解消するために、水位観測の空間密度を上げることが望

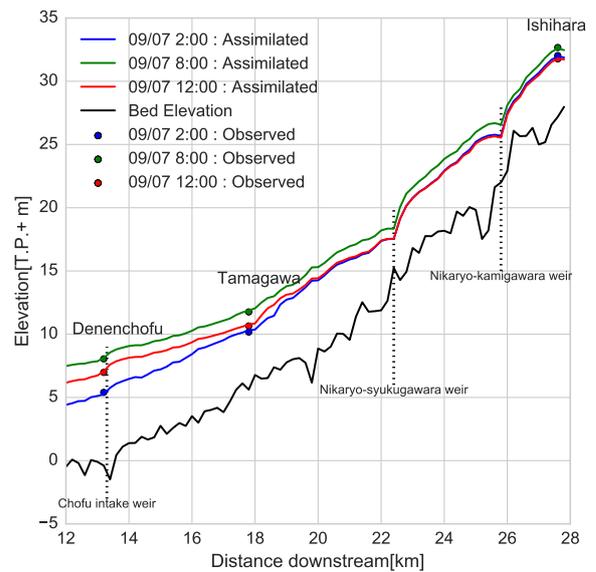


図-9 各時刻の解析水位縦断面図

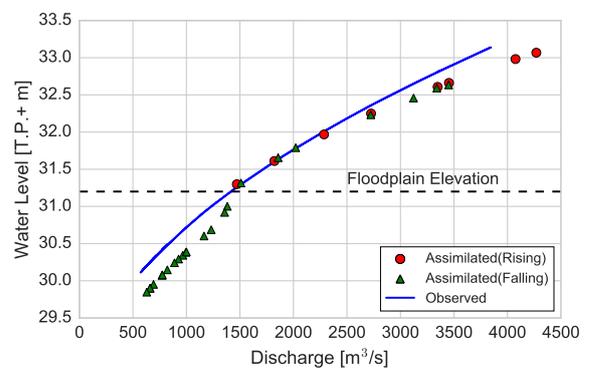


図-10 石原地点水位-流量関係式と解析値の比較

まれる。

次に、洪水の増水期（7日2時）、ピーク時（7日8時）、減水期（7日12時）の3時刻の解析水位縦断面分布を図-9に示す。前述のとおり、解析水位と観測水位は概ね一致している。これらの結果より、本手法は、実河川の出水を対象とした解析において、3地点の観測水位のみにより解析範囲全体の水理量の実況分布を精度良く推定可能であると考えられる。本手法によって得られた実況水位の縦断面分布は、防災上極めて価値の高い情報である。また、水理量の実況分布は、物理モデルを満足しているため、将来予測の初期値として有用である。

さらに、石原水位観測所の水位-流量関係式と解析値のヒステリシスの比較を図-10に示す。石原地点においては、水位が高水敷高より高い範囲とそれ以下では、水位-流量関係式が異なることを示唆している。また、増水期と減水期で水位と流量の関係が一致しているため、両者の関係がほぼ一価関数である。つまり、貯留効果が顕著でないことが示される。このように、本手法は、

流量観測の性能を評価する際の参考にもなる。

## 5. 結論

本研究では、水位の観測データのみにより、解析範囲全体の実況水位、流量の縦断分布を予測することを目的として、随伴変数法によるデータ同化について検討を行った。本研究の主な成果は、以下のとおりである。

1. 一次元河川流解析における随伴変数法の解析手法を整理した上で、随伴方程式、感度係数の計算式を導出し、その数値計算方法を示した。
2. 仮想水路における双子実験において、複数地点の観測水位との解析値が真値と一致するかを確認することによって、妥当性を検証した。上流端流量の同化値は、真値とほぼ一致しており、本手法は妥当かつ強力な同化手法であることが示された。
3. 洪水波形伝播の模型実験の計測水位に対してデータ同化を行った結果、水位の同化精度は十分であり、上流端流量も計測値と概ね一致した。これより、本手法は、水位を同化することにより、解析範囲全体の水理量を高精度で解析可能であることが示された。
4. 実河川の出水を対象として、本手法によるリアルタイム水位予測への適用性を検証した。その結果、わずか3地点の観測水位のみにより解析範囲全体の水理量の実況分布を精度良く推定可能であることを示した。

今後は支川流入を含む流れ場での本手法の適用性を検証し、対象河川全川のリアルタイム予測に本手法を適用することを予定している。

## 参考文献

- 1) 福岡捷二：洪水流の水面形観測の意義と水面形に基づく河川の維持管理技術，河川技術論文集，第12巻，pp.1-6,2006

- 2) 小泉耕：最新の数値予報，公開気象講演会「数値予報の過去・現在・未来—数値予報現業運用開始50周年記念—」，2009
- 3) たとえば，淡路敏之，蒲地政文，池田元美，石川洋一：データ同化：観測・実験とモデルを融合するイノベーション，京都大学学術出版会，2009.
- 4) 気象庁 報道発表資料：全球数値予報モデルの改善について～高度な初期値解析手法「4次元変分法」の導入～，<http://www.jma.go.jp/jma/press/0502/16a/4jigen.pdf>，2005.
- 5) 雷忠，牧野好和，岩宮敏幸：Adjoint 感度解析を用いた勾配法による空力形状最適設計，宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-049，pp.1-21，2008.
- 6) Sanders, Brett F and Katopodes, Nikolaos D : Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control, *Journal of Engineering Mechanics*, 126-9, pp.909-919, 2000.
- 7) Ding, Yan and Wang, Sam SY : Identification of Manning's roughness coefficients in channel network using adjoint analysis, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol.19-1, pp.3-13, 2005.
- 8) Elhanafy, Hossam, Copeland, Graham JM and Gejadze, Igor Yu : Statistical Modelling of Uncertainties in Flood Wave Propagation Using Adjoint Sensitivity Analysis, *Flood Risk Assessment II: IMA Conference Proceedings: University of Plymouth 4-5* , pp141, 2007.
- 9) 吉田圭介，石川忠晴：変分法と浅水流モデルを併用した河床粗度の逆推定法に関する研究，*水工学論文集* 54号，pp.991-996, 2010.
- 10) Yoshida, Keisuke and Ishikawa, Tadaharu : Flood hydrograph estimation using an adjoint shallow-water model, *Journal of Hydro-environment Research*, vol.9-3, pp.429-440, 2015.
- 11) Ying, Xinya, Khan, Abdul A and Wang, Sam SY : Upwind conservative scheme for the Saint Venant equations, *Journal of hydraulic engineering*, vol.130-10, pp.977-987, 2004.
- 12) Ashida, Kazuo and Takahashi, Tamotsu : On the characteristics of flood waves under various boundary conditions, *Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University*, 16(3), pp.23-47, 1967.

(2017.4.3 受付)