Fokker-Planck方程式を用いた降雨の不確実性 を考慮した降雨流出の予測手法に関する研究 A STUDY ON THE FORECAST OF RAINFALL-RUNOFF PROCESS CONSIDERING THE UNCERTAINTY OF RAINFALL INTENSITY USING FOKKER-PLANCK EQUATION

成 岱蔚¹ · 山田 正² CHENG Daiwei, Tadashi YAMADA

1学生会員 工修 中央大学理工学研究科都市環境学専攻(〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)
 2フェロー会員 中央大学教授 理工学部都市環境学科(〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

Rainfall-runoff process is the central issue of hydrology. However, the deterministic rainfall-runoff models which are widely used nowadays have their limits. Thus, stochastic method had been suggested. Recently, K. Yoshimi and T. Yamada have tried to use Fokker-Planck equation to study the uncertainty of stream flow due to the random fluctuation in precipitation. The present study is based on K. Yoshimi and T. Yamada's theory and tries to apply it into practical problems. Especially, the present study suggested a new method of forecasting runoff by using the Fokker-Planck equation in the first step of Kalman filter. Moreover, the present study also generalizes the method to consider the uncertainty in systems which are controlled by partial differential equations.

Key Words : Unvertainty, Stochastic differential equation, Fokker-Planck equation, rainfall-runoff

1. はじめに

水文学で扱う現象は、通常空間スケールが非常に大き いので、第一原理の物理法則を直接に使うことができ ず、モデル化をする必要がある。それによって、流域の 情報が失われ、解析結果と実現象に差が生じる。更に、 モデルを使わず直接に流域スケールで第一原理の物理法 則を使うことは、計算コストの面で可能だとしても、観 測の限界があるため、その計算と相応しい初期条件を提 供できない。

上記の問題に対して、データ同化、確率過程論¹⁾などの手法を水文学に応用する研究が近年増えてきた。それらの手法の共通点は、モデルと観測データは実現象の近似に過ぎないことを承認し、実現象との差を確率変数として扱い、その上で物理システムの時間発展を議論することである。

データ同化の手法で考慮したシステムの不確実性は, 通常物理的意味を持たないホワイトノイズで表現し,ホ ワイトノイズの大きさは実測データから同定する.しか し,予測の分布は予測時点で持つ情報量に大きく影響さ れているはずであり,データ同化の手法はその影響を 反映することができない.

それに対し、吉見、山田¹らは伊藤の確率微分方程式 論を降雨流出過程に導入し、降雨の不確実性の影響によ る流出高の確率密度関数の時間発展を支配する方程式を 提案した.これによって、不確実性や、不完全な情報を 扱うことのできる新しい予流出予測システムの構築がは じめて可能になった.

以上を踏まえ、本研究では、吉見、山田¹らの理論を 基礎とした実際の降雨流出の予測に適用可能な手法の提 案を目標とする。その第一歩として、データ同化におけ るカルマンフィルタリングの考え方を参考にして、降雨 強度の不確実性を考慮できる流出の予測手法を提案す る.次に、偏微分方程式系にFokker-Planck方程式を適 用する手法を提案し、この拡張した理論を一次元不定流 へ適用した。一次元の非定常開水路流れを支配する方程 式は連続式と運動方程式である。支配方程式である運動 方程式の中に底面せん断応力の項があるが、任意の瞬間 でみると、底面せん断応力は平均値の周りに分布してい ることが既往の研究⁸により分かった。本研究では、こ のような底面せん断力応力の不確実性を考慮した一次元 開水路の不定流の流量と水深の不確実性を検討した。



図-1 山田モデルを用いた草木ダム流域の洪水イベントを再現した結果

2. 降雨強度の不確実性を考慮した流出計算

流出解析の役割は、対象とする流域の情報をモデリン グ(理論化)し、降雨データを入力値として、流量・水 位を決定論的に計算することである.しかし、降雨は時 空間的に分布しており、観測手法によっても、値が異な る.その観測値は、降雨の真値の近似にすぎない.つま り、人間は降雨に関してすべての情報を手に入れること ができないため、降雨の不確実性を考慮する必要があ る.本節では、吉見、山田^Dらが提案した確率微分方程 式を用いた、降雨の不確実性を考慮した流出解析の手法 を簡単に紹介する.

(1) 決定論的な降雨流出の基本式

山田²は,単一斜面に対して幅広矩形断面を想定し, 連続式と運動則を基礎式として,(1)式に示す貯留型の 降雨流出基本式を示している.

$$\frac{dq(t)}{dt} = a_0 q(t)^\beta (r(t) - q(t)) \tag{1}$$

ここにr(t)は降雨強度の時系列であり,q(t)は流出高の 時系列である.a₀,βは流域特性を表すパラメータであ る.このモデルは洪水の再現性が高い木村の貯留関数法 ³⁾と同型であり,その上で,流れの連続式と運動則から 直接導くことができ,パラメータの物理的意味は非常に 明確である²⁾.現実流域への適用性もよく検証されてい る²⁾.以下に例として,(1)式を草木ダム流域に適用し, モデルの再現性を示す.

草木ダムは利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである.ダムが支配している流域面積は約 254km²である.計算のパラメータa₀,βはそれぞれ物理 的意味を持っているため、一般的な山地流域を想定し、 既往の研究により²⁾、 $a_0 = 0.047$ 、 $\beta = 0.4$ を与えた.

図-1は山田モデルを用いた,1982年から1997年まで草 木ダム流域における6つの大きい降雨イベントの再現計 算結果を示している.赤い点は観測値,青い線は計算値 を示している.図-1に示すように,計算結果は流出過程 を再現できることが分かるが,完全に一致しているわけ ではない.

観測値 q^{ob} と計算値 q^{cal} の差は、一般的に誤差と呼ばれている.ここにパラメータは一般的な値を与えているが、誤差をなくすために、パラメータを同定する必要がある.パラメータ同定の基本的な考え方は各時刻の誤差の自乗の和 $\sum_{k=1}^{n} (q_k^{ob} - q_k^{cal})^2$ が最小になるようにパラメータを決定することである.しかし、このように同定したパラメータを用いて計算を行っても誤差が生じる場合は、その誤差は、用いられるモデルのシステム的なエラーと考えられる.したがって、モデルを検討する必要がある.例えば、山田モデルに、鉛直方向の浸透を考慮し、多層的な構造を持つモデルに拡張することによって、より精度の良い再現計算ができる.

しかし、以上の誤差に関する解釈は決定論的な解釈で ある.事実、降雨強度の時空間分布やパラメータの不確 実性、また、降雨流出の物理機構が非線形であることに 起因するカオスなどの本質的な不確実性があるので、 我々ができる予測や、再現計算は、不完全かつ、不確実 性がある情報に基づいている.不確実性がある情報を用 いる計算は一意に予測値が求まるものではなく、その計 算結果は分布を持つ確率変数になる.つまり、観測値と 計算値の差は誤差ではなく、観測値は予測分布のすべて の可能性の母集団の中にある一つの可能性である.

(2) 確率微分方程式を用いる流出解析

まず吉見、山田¹らが提案した確率微分方程式を用い る流出解析の方法を紹介する。(1)式は、流出高q(t)に 関する一階の常微分方程式であり、差分形式で表現する と以下のよう表現できる.

$$dq = a_0 q^\beta (r(t) - q) dt \tag{2}$$

ここで、入力降雨強度r(t)は、各時刻において、ある 平均値r(t)とその平均値周りにホワイトノイズとして微 小な乱れ成分r'(t)が分布していると仮定する.

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \tag{3}$$

(1)式を(1)式に代入すると、(2)式は以下のようになる.

$$dq = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) - q) dt + r' a_0 q^\beta dt \tag{4}$$

ここで、(4)式は伊藤の確率微分学⁴によって、以下の 伊藤の確率微分方程式の形に読み替えることができる.

$$dq = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) - q) dt + a_0 q^\beta \sigma \sqrt{T_L} dw \qquad (5)$$

ここに、右辺第一項が決定論的な項、右辺第二項が確率論的な項を表しており、 $\sigma \geq T_L$ は降雨強度乱れ成分の標準分散と時定数である. dwはWiener過程に従う時系列w(t)の微小時間の間の変化量であり、正規分布N(0, dt)に従う.

(5)式は伊藤の確率微分方程式の形式であるため、伊藤の確率微分学⁴によって、対応するFokker-Planck方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial p(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial a_0 q^\beta (\bar{r} - q) p(q,t)}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q,t)}{\partial q^2}$$
(6)

(6)式は流出高qの確率密度関数の時間発展の支配方程 式である.ある時刻のqの確率密度関数を与えれば、そ の後の確率密度関数が計算できる.このFokker-Planck方 程式の正当性はすでに既往研究⁴⁾で検証されている.

3. Fokker-Planck方程式を用いた流出の予測手法

前章では、降雨の時間的な不確実性を考慮した降雨流 出過程の支配方程式を導出した.本節は提案した式を実 流域に適用するため、データ同化における逐次フィルタ リングの手法を参考にし、Fokker-Planck方程式に基づく 流出の予測手法を提案した.

(1) データ同化の基本概念

データ同化は不確実性のあるシステムを予報する手法 であり、近年気象分野でよく使われている.代表的な データ同化手法はフィルタリング理論と4次元変分法が ある.データ同化の基本的な考え方は以下の図-2に示す. データ同化はシステムの時間発展を状態空間の中の点の運動とみなす.状態空間の中の点は状態ベクトル $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表現する.点の運動は微分方程式に支配される.

決定論的な予報手法では、ある時刻の状態空間の点の 位置を与えれば、そのあと点の運動軌跡が計算できるが、 データ同化の基本概念は、ある時刻のシステムの状態は 不確実性があるため、状態空間の一点に定まることが出 来ない. その代わりにある時刻のシステムの状態は状態 空間上の確率密度関数で記述する必要がある.



通常データ同化は2つステップがある.ステップ1は予 測である.時刻k-1のシステムの状態の確率密度関数を 用いて,時刻kの状態の確率密度関数を予測する.この 予測結果を事前確率密度と呼ぶ.ステップ2はイノベー ションである.時刻 kの事前確率密度と観測値を用いて, 時刻kの事後確率密度関数を計算する.この事後確率密 度関数は k時刻の観測情報を考慮した, k時刻の最終的 な予測である.

ステップ1の予測手法の違いによって、様々な同化の 手法が提案されている。その中の一つにカルマンフィル タという予測手法があるが、この手法は1974年に日野⁵⁰ らによって初めて降雨流出の予測問題に適用された。そ の後、高棹、椎葉⁶⁰ら、星⁷⁰らによって完備化された。

カルマンフィルタのステップ1の予測手法は離散的な 確率過程に基づいて,状態変数の平均値と分散を時間的 に更新していく方法である.それに対し,本研究で提案 する,吉見,山田らによって提案されたFokker-Planck 方程式に基づく予測手法は,時間的に連続しており,平 均値と分散ではなく,状態変数の確率密度関数を更新し ている.さらに,カルマンフィルタのランダム外力はシ ステム誤差と定義されていて,物理的な意味は不明確で あることに対し,Fokker-Planck方程式のランダム成分 は降雨強度の不確実性である.そのため,Fokker-Planck方程式を用いることによって,降雨強度の不確実 性が流出に与える影響がより正しく計算できる.



図-3 Fokker-Planck方程式に基いく予測手法を用いた草木ダム流域の1983-08-14降雨イベントに適用した結果(6時間先予測)

図-3(a)は Fokker-Planck 方程式に基づく予測手法から 求めた降雨のイベント全体の予測区間を示している.同 図に示すように、降雨強度が強いほど、予測区間の拡張 速度が早くなっているように見える. その理由は、用い られる式が降雨強度の不確実性を考慮しているために、 降雨強度が強いほど拡散係数が大きくなるからである. なお、イベント全体から見れば、観測値はほとんど予測 区間内に入っていることが分かる. 図-3(b)は1983年08 月14日0時から始まる降雨イベントのピーク付近の拡 大図である. 図-3(c)は71時間目を予測の開始時刻とし た予測区間を示している.予測の時間的な長さは6時間 である.予測値のとり得る幅が時間に連れて連続的に大 きくなることが確認できる.これは、観測時刻から離れ ると、予測の不確実性が増大することを定量的に表現し ている. (未来ほど予測が難しくなる.) 図-3(d)は71 時間目を予測の開始時刻とした予測計算における6時間 先の予測分布である、この結果は、Fokker-Planck 方程 式から直接得られた結果でもある.

4. 底面せん断応力の不確実性を考慮した一次元開 水路計算

前節では、伊藤の確率微分方程式とFokker-Planck方程 式の対応関係を用いて流出高の確率密度関数の時間発展 を求めることができることが示された.しかし、(1)式は 常微分方程式である.雨が斜面から流出した後は河川に 流入するが、河川中の流れの支配方程式は偏微分方程式 系であり、前節と同様の予測手法は有効であるのだろう か.この問題に対し、本節は一次元の開水路不定流に対 しFokker-Planck方程式に基づく予測手法を適用する方法 を議論した.

ー様な矩形断面を想定した一次元開水路流れにおける 連続式および運動方程式は以下の2つ式である。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial vq}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} - ghi_0 + \frac{gn^2q^2}{h^{7/3}} = 0 \qquad (8)$$

ここに,x:流下方向座標,t:時間,h:水深,q:単 位幅流量,v:断面平均流速, i_0 :河川勾配,n: Manning粗度係数,g:重力加速度である.

(7),(8)式における河川の底面せん断応力はManning 則で表現している.ここで,底面せん断応力は河床と流 れの摩擦によって生じる乱流のエネルギー損失効果をモ デルにしたものである.その平均値はManning則によっ て表現できるが,瞬間で見ると,乱流の効果によって せん断応力はある値の周りにふらつくことが分かってい る.佐野⁸らの実験によって,管路の壁面せん断応力の 瞬間瞬間の変動係数の変動性質が示されている.佐野ら によるとレイノルズ数が大きいほど変動係数の分布が正 規分布になり,標準分散は0.2(変動係数であるから次 元がない)に漸近することが分かった.せん断応力の瞬 間瞬間の変化を考慮すると,一次元不定流の支配方程式 は以下のようになる:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$+ \frac{\partial vq}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} - ghi_0 + \frac{gn^2q^2}{h^{\frac{7}{3}}} (1$$
(10)

$$w') = 0$$

+

 $\frac{\partial q}{\partial t}$

w'は変動係数である. 佐野⁸⁰らの実験結果を用いて, w'は平均0,標準分散0.2の正規分布と設定する. 上流は 以下の流量過程を与える.

$$q^{Upper}(t) = 200 + \left(\left(\frac{t}{15}\right)(2000 - 200)e^{\left(1 - \frac{t}{15}\right)^{20}}\right)$$
(11)

川幅を200m,河川勾配を1/2000と設定した. 乱数を5000 回発生させ,(7),(8)式を解くと,結果は図-4に示すよう になる.単位幅流量は,予測幅があることが分かる.

$$A_{0} = \frac{2q_{0}}{h_{0}}, B_{0} = \frac{q_{0}^{2}}{h_{0}^{2}}, C_{0} = gh_{0}, D_{0} = g\frac{\partial h_{0}}{\partial x}, E_{0}$$
$$= gi_{0}, F_{0} = gn^{2}\frac{2q_{0}}{h_{0}^{\frac{7}{3}}}$$
(12)

$$G_{0} = gn^{2} \frac{7}{3} \frac{q_{0}^{2}}{h_{0}^{3}} H_{0} = gn^{2} \frac{q_{0}^{2}}{h_{0}^{3}}$$

$$\frac{\partial C_{h_{1}q_{1}}(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial A_{0}(y)C_{h_{1}q_{1}}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial B_{0}(y)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$- C_{0}(y) \frac{\partial C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$- C_{0}(y)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$- D_{0}(y)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$- F_{0}(y)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$+ G_{0}(y)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$- \frac{\partial C_{q_{1}q_{1}}(x, y, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial C_{q_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial C_{q_{1}q_{1}}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$- A_{0}(x) \frac{\partial C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial x}$$

$$+ B_{0}(x) \frac{\partial C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial x}$$

$$- C_{0}(x) \frac{\partial C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial x}$$

$$- C_{0}(x) \frac{\partial C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial x}$$

$$+ B_{0}(x) C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$+ G_{0}(x)C_{h_{1}h_{1}}(x, y, t)$$

$$+ C_{0}\frac{\partial C_{q_{1}h_{1}}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$- C_{0} \frac{\partial C_{0}h_{1}(x, y, t)}{\partial y}$$

$$- C_{0} \frac{\partial$$

(7),(8)式は偏微分方程式系だが,空間的に離散化を すれば連立常微分方程式系になる.さらに,摂動解析と 状態変数のモーメントの時間発展式を合わせる手法を用 いることで,状態変数の平均と分散の時間発展を求める ことが可能となる.ここに、具体的な式の導き方は省略 し、結論だけをまとめる.

(12)-(15)式は水深と単位幅流量の変動成分の共分散 に関する方程式である.下付き文字0は摂動成分の0次 オーダーの量であり、1は摂動成分の1次オーダーの量で ある.摂動成分の0次オーダーの方程式は決定論的な式 と同様である.共分散行列の意味は、例えば $C_{h_1h_1}(x,y,t)はx地点のh_1の分散になる.式(12)-$ (15)式を解けば、水深と単位幅流量の確率密度関数の時 間発展に関して、2階モーメントまでの情報がわかる.

図-5は計算の結果から得られたx=50km地点の単位幅流 量の確率密度関数と同じ地点のサンプリング計算のヒス トグラムを比較したものである.サンプリング計算の結 果とよく一致することが分かる.サンプリング手法は, システムの非線形性や,不確実性のソースに関わらず使 える手法であるが,その収束性と計算コストが問題であ る.本研究が提案した手法は計算効率がサンプリング手 法を遥かに超えているため,実際のリアルタイム予測に 使えることが期待できる.

図-6はManningの粗度係数を変換させ、変動係数の不 確実性の影響を検討したものである。色のある区域は2 標準分散の予測空間を示している。Manningの粗度係数 の大きさは流出の非線形と関わっている。Manningの粗 度係数が大きいほど非線形が強い。図に示したように、 非線形性が強いほど、不確実性の影響が大きいことが分 かる。その原因は、非線形性が強いほど、同様のふらつ きに対してその応答が大きいためである。

5. まとめ

本論文では、降雨流出過程を対象として不確実性を有 する物理システムの予測手法の提案とその検証を行っ た. 基本式は山田らによって提案された単一斜面におけ る降雨流出の理論式を用いた. ところで, 流出解析で入 力値として用いる降雨データは多種多様であり、観測手 法の違いや観測地点数等によって、降雨データの時間分 解能や空間分布が異なるため不確実性を含むデータであ る. この降雨の不確実性を考慮することで、伊藤の確率 微分方程式と同型の支配方程式を得られた. そして, 確 率微分方程式とFokker-Planck方程式の対応関係を用いて 流出高の確率密度関数の時間発展を求めることができる ことが示された. さらに, 偏微分方程式系にFokker-Planck方程式を適用する手法を提案し、この拡張した理 論を一次元不定流へ適用した.一次元の開水路不定流を 支配する方程式は連続式と運動方程式である. 支配方程 式である運動方程式の中には底面せん断応力の項がある が、任意の瞬間では、底面せん断応力は平均値の周りに ふらつくことが既往の研究により分かっている.本研究 では、このような底面せん断力応力の不確実性を考慮し た一次元開水路の不定流における不確実性を検討した.







本研究の成果をまとめると,Fokker-Planck方程式をカ ルマンフィルタの第1ステップに置き換えることで,予 測手法を提案した.本研究で提案された手法を用いるこ とにより,予測"誤差",あるいは物理量の不確実性の 連続的な時間発展が計算できるようになった.提案した 手法を利根川上流域に適用した結果,予測の不確実性が 時間とともに増大していることが定量的に表現できた. なお,不確実性の物理的な意味が明確なことを示した. さらに,提案した手法を偏微分方程式系まで拡張し,底 面せん断応力の不確実性が河道計算に及ぼす影響を検討 した.その結果,提案した手法の計算結果はサンプリン グ計算の結果とよく一致することが確認できた.また, 変動係数の不確実性が一定にしても,Manningの粗度係 数を変化させると,単位幅流量の予測幅が異なることを 確認できた.

- 吉見和紘、山田正、山田朋人:確率微分方程式の導入による 降雨流出過程における降雨の不確実性の評価、土木学会論文 集B1(水工学)、Vol.71, No.4, I_259-I264, 2015.
- 山田正:山地流出の非線形性に関する研究,水工学論文集, 第47巻, pp.259-264, 2003.
- 3) 木村俊晃: 貯留関数法による洪水追跡流出法,建設省土木研 究所, 1961.
- 4) 伊藤清: 確率論【現代数学(14)】, 岩波書店, 1953.
- 5) 日野幹雄:水文流出系予測へのカルマンフィルター理論の適 用,土木学会論文集,No.221, pp.39-47, 1974.
- 6)高棹琢馬,椎葉充晴:流出システムのフィルタリングと予測, 自然災害シンポジウム,第16巻,pp.133-136,1979.
- 7) 星清,山岡勲,茂木 映治:流出予測における適応制御理論 の応用に関する研究,昭和56年度土木学会,北海道支部論文 報告集,Ⅱ-17,1981.
- 8) 佐野正利:管内乱流の壁面せん断応力の測定, Savemation Review 山武グループ技術研究報告, Vol. 19, pp.58-65, 2008 (2017.4.3受付)

参考文献