

中小河川の水位予測モデルにおける非線形 フィルタリング法の適用性評価

APPLICABILITY EVALUATION FOR NON LINER FILTERING MODEL TO WATER LEVEL FORECASTING SYSTEM FOR SMALL SIZE RIVERS

杉浦 正之¹・田中 耕司²

Masayuki SUGIURA and Kohji TANAKA

¹正会員 株式会社 アスコ (〒550-0006 大阪市西区江之子島1丁目10番1号)

²正会員 修(工) 株式会社 建設技術研究所大阪本社 (〒541-0045 大阪市中央区道修町1丁目6番7号)

Flood prediction system for small-medium size basin was constructed without using HQ curve equation. We applied Unscented Kalman filter for feedback method in this system, because we had already confirm the application of this method. UKF is capable of the application for non-linear model. We think UKF is superior to Particle Filter which spends much time in calculating making process of particles and assimilating the observed datum. However precision of the filtering, the validity of assuming Gaussian distribution for error distribution, the stability of the filtering have not been inspected. In presented paper, the accuracy of UKF compared with the results of particle filter. The error distribution was assumed by hierarchy Bayesian method, and then the filtering effect of a rain error given intentionally was confirmed by Bootstrap method. As a result of these analyses, it is showed that UKF could apply to a simple water level model from aspects of precision, application range and stability.

Key Words : Conceptual Runoff Model, Flood Forecasting system, Unscented Kalman Filter, Particle Filter

1. はじめに

近年、分布型流出モデル¹⁾等が洪水予測システムに組み込まれ、予測流量や水位の精度が向上している。これは、降雨量が従来の地点雨量からレーダ雨量の観測精度の進歩により、面的に捉えることができるようになっていく背景がある。一方で、H-Q式の精度は従来とほとんど変わっておらず、洪水時の河床が大きく変動するような場合の精度は低い可能性が高い。また、中小河川の水位観測所では、流量観測を行っていないため、H-Q式での高水管理がされていない河川もある。このため、著者等は、主に中小河川を対象に、H-Q式を使用しないで、雨量から水位を直接予測する簡易水位予測モデル²⁾を提案してきた。この簡易水位モデルの中核となるものが、水位予測モデルの定数をフィルタリングしていく Unscented Kalman Filter³⁾ (UKF)である。簡易水位予測モデルの実河川への適用性については、田中ら⁴⁾が実証しているが、UKFそのものが、河川水文分野での適用実績がほとんどないため、適用の妥当性が明らかにされていない。このため、今後の計算効率化や計算速度という観点から非常に有効な本手法の適用性を検証する必要があると考えている。

本研究では、UKFによるフィルタリングの精度を検証

するにあたり、非線形性・非ガウス分布を仮定した Particle Filter⁵⁾ (PF)と比較し、今回対象にしているモデルの適用性について検討を行う。UKFは $2n+1$ 個のSigma Pointsで確率分布を近似するため、粒子フィルタ等と比較すると観測推定値の数は圧倒的に少なくなる。そのため、大きな降雨誤差が発生した場合の安定性が問題になる。意図的に降雨誤差を与えて、予測水位の変動幅を確認した結果、PFより変動幅は大きい、フィルタリングの信頼区間内の変動幅であり、安定性が確保されていることを報告する。

次に、UKFは二次の統計量を近似し、誤差分布をガウス分布とした前提としているため、フィルタリングの過程においては、この分布形による近似が成立する必要がある。そこで、観測値更新ステップ後の誤差分布を Markov Chain Monte Carlo method (MCMC法)で推定することにより、ガウス分布に従うかどうかを確認した結果を報告する。

2. 簡易水位予測モデルの概要

(1) モデルの概念

図-1に示す貯留関数モデル⁶⁾から算定した流量が、H-Q式から得られる流量と等値とし、さらに、貯留関数法の

定数 p を $1/2$ とすることにより、簡便にしたものである。ここに、 s_t は貯留高(mm)、 t は時間(hr)、 r_t はモデルに直接投入する雨量(mm/hr)、 k は貯留関数モデルの定数、 f は流出係数、 A は流域面積(km²)である。また a 、 b はH-Q式の係数である。

呉ら⁷⁾は洪水の通減特性から p は $0.5 \sim 0.9$ の範囲にあるとしている。本モデルは、通減が最も早い $p=0.5$ 着目して貯留関数法定数 k を決定した。すなわち、 $p=0.5$ より遅い通減はベースフローで表現したモデルであると考えられる。

(2) 基礎式

みかけのタンク水位と流出量の関係に貯留関数モデルを適用し、モデルに投入する雨量はベースフロー分を加算することとして、図-1に示す3つの式を整理すると(1)式が得られる。これが本研究で用いる基礎式である。

$$k \frac{d(H_t - b)}{dt} = C(r_{a,t} + r_{b,t}) - \frac{1}{C}(H_t - b)^2 \quad (1)$$

ここに、 $C = (fA/3.6/a)^{1/2}$ である。(1)式は、 k 、 C 、 b の3個の定数で表現されており、非常に簡易な双曲線型の全微分方程式で表される。

(3) 状態量の自己回帰モデル

未知のパラメータ C 、 b を状態量とする。また、水位計算に直接影響する入力降雨の誤差を調整することが、水位予測モデルには不可欠と考え r_b を追加し、(2)式のとおり3個の状態量とした。

状態量は1ステップ前の状態量と相関関係があると考えて自己回帰モデルを用いた。 b と r_b は線形の自己回帰モデルとする。 C は流出係数の関数であることから上限と下限があるためLogit関数で表現し、その最大値を C_{max} とする。また、 r_b は降雨が発生しているときは降雨の誤差を調整する役割を果たすので、マイナス値となることを許容する。

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ b_t = \alpha_b b_{t-1} + e_b \\ 2) \ \text{logit}(C_t / C_{max}) \\ \quad = \alpha_c \text{logit}(C_t / C_{max}) + e_c \\ 3) \ r_{b,t} = \alpha_r r_{b,t-1} + e_r \end{array} \right\} \quad (2)$$

ここに、 α_b 、 α_c 、 α_r は自己回帰係数でそれぞれ1.0、0.75、0.8と設定する。また、 e_b 、 e_c 、 e_r は自己回帰モデルにおける誤差項を付加した。

(4) UKFの基礎式

a) 時間更新ステップと観測値更新ステップ

(3)式が時間更新ステップで、(7)式が観測値更新ステップである。時間更新ステップは状態量の自己回帰モデルであり、観測更新ステップは、簡易水位予測モデルである。

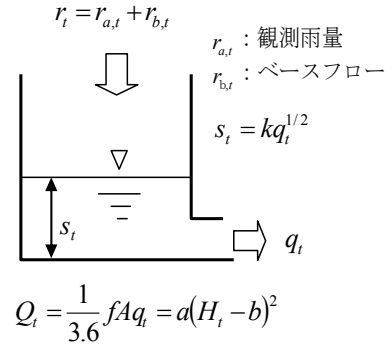


図-1 水位予測モデルの概念図

1) 時間更新ステップ

$$x_{t|t-1} = A x_{t-1|t-1} + e + w \quad (3)$$

ここに式中 x 、 e 、 A は以下のように表される。

$$x = \begin{bmatrix} b \\ \text{Logit}(C / C_{max}) \\ r_b \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_b & e_c & e_r \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_b & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

2) 観測更新ステップ

$$y_t = S(b_{t|t-1}, C_{t|t-1}, r_{b,t|t-1}) + v \quad (7)$$

ここに、 e は自己回帰モデルの誤差項、 w はシステムノイズ、 S は簡易水位予測モデルによる解析水位で、 v は観測ノイズである。

b) 時間更新ステップ後の期待値と誤差共分散行列

期待値は(8)式で表され、誤差項があることにより、時間更新後に A 倍になることがわかる。

$$\hat{x}_{t|t-1} = A \hat{x}_{t-1|t-1} \quad (8)$$

自己回帰モデルの誤差項は時間更新後の誤差に含まれると仮定し(9)式で表現する。これを整理し(10)式を時間更新ステップとする。ここに P_{xx} は状態量の誤差共分散行列である。また I は単位行列である。

$$P_{xx,t|t-1} = A P_{xx,t-1|t-1} A^T + P_{xx,t|t-1} - A P_{xx,t-1|t-1} A^T + W \quad (9)$$

$$P_{xx,t|t-1} = P_{xx,t-1|t-1} + A^{-1} W (A^{-1})^T \quad (10)$$

c) 観測値更新ステップ後の期待値と誤差共分散行列

状態量の期待値と誤差共分散行列を(11)、(12)式に示す。 Y_t は観測値でここでは観測された河川水位に相当する。また、 $\hat{y}_{t|t-1}$ は観測推定値で、簡易水位予測モデルによる水位の期待値である。 P_{yy} は観測推定値、 P_{xy} は状態量と観測推定値の誤差共分散行列である。

1) 状態量の期待値

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K(Y(t) - \hat{y}_{t|t-1}) \quad (11)$$

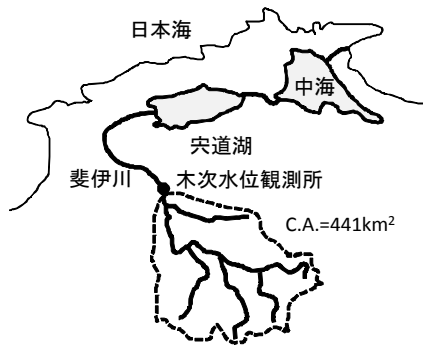


図-2 斐伊川の木次水位観測所の位置図

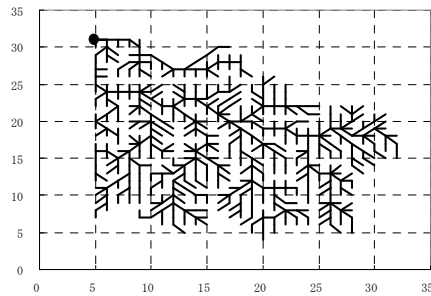


図-3 斐伊川木次地点上流の落水線図

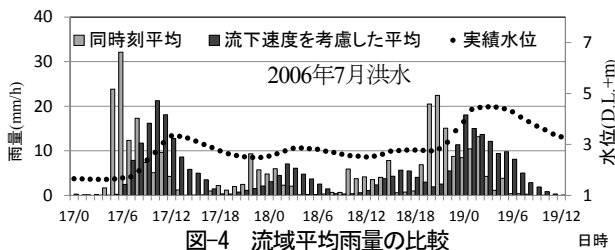


図-4 流域平均雨量の比較

2) 状態量の誤差共分散行列

$$P_{xx,t|t} = P_{xx,t|t-1} - KP_{xy,t|t-1} \quad (12)$$

ここに $K = P_{xy,t|t-1} P_{yy,t|t-1}^{-1}$ はカルマンゲインを表している。

d) Sigma Pointsの設定方法

UKFでは、誤差共分散行列から特異値分解により平方根行列を求め、観測推定値を解析するためのSigma Pointsを設定する。Sigma Points数は $2n+1$ 個 (n は状態量の数)で、(13)式で表現される。

$$\left. \begin{aligned} x_{t|t}^{(0)} &= \hat{x}_{t|t} & W_{s,0} &= \kappa / (n + \kappa) \\ x_{t|t}^{(i)} &= \hat{x}_{t|t} + \left(\sqrt{(n + \kappa) P_{xx,t|t}^{(i)}} \right) & W_{s,i} &= 1/2 / (n + \kappa) \\ x_{t|t}^{(n+i)} &= \hat{x}_{t|t} - \left(\sqrt{(n + \kappa) P_{xx,t|t}^{(i)}} \right) & W_{s,n+i} &= 1/2 / (n + \kappa) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $x^{(i)}$ はSigma Pointsにおける状態量、 $\hat{x}$ は状態量の期待値、 $\sqrt{P_{xx,t|t}^{(i)}}$ は誤差共分散行列の平方根行列の i 列の値、 $W_s^{(i)}$ はSigma Pointsにおける重み、 κ はチューニングパラメータである。

3. モデル流域の概要

洪水中に河床変動が大きいといわれている島根県の東部を流下する斐伊川(図-2参照)を対象河川とし、上流部にある木次水位観測所(C.A.=441km²)を選定した。

4. 水位及び流域平均雨量の算定

(1) 使用する水位・雨量データ

実績水位は水文水質データベース⁸⁾から抽出し、降雨データは気象庁の2006年以降の解析雨量を使用した。2006年以前は、気象庁レーダとアメダスにより作成したものであるが、2006年以降は国土交通省水管理・国土保全局、道路局が管理するレーダ、テレメータ雨量計を追加している⁹⁾。

(2) 流域平均雨量の算定

現時刻の水位が、1ステップ前の水位と現時刻の雨量で説明できるようにする必要がある。このため、落水線図¹⁰⁾を使用して、流下速度を考慮した流域平均雨量を使用する。落水線図は国土数値250mメッシュ標高データを用いて作成し、図-3に木次水位観測所の上流域の1kmメッシュの落水線図を示す。

流下速度は8メッシュで1時間と設定した。8メッシュの延長はメッシュが辺で接する場合は8km、頂点で接する場合は11kmで、流速に換算すると約2~3m/sで、洪水流速から推測して妥当な値である。また、クラーク式¹¹⁾の流下速度は2.1m/s~3.5m/sであり、設定した流下速度はラーヘン式と同程度である。

流域平均雨量と実績水位を図-4に示す。流下時間を考慮することにより、降雨波形が水位波形と似たものとなり、1ステップ前から現時刻まで水位変化を雨量で説明しやすくなったことがわかる。

5. 簡易水位予測モデルの適用結果

UKFでフィルタリングを行うためには、貯留関数モデル定数 k と、システムノイズ及び観測ノイズを設定する必要がある。貯留関数モデル定数は $k=40 \text{ mm}^{1/2} \text{ hr}^{1/2}$ 、観測ノイズは水深の5%の2乗とし、システムノイズは以下のとおりに設定した。

$$W = \begin{bmatrix} 0.04^2 (H-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4^2 \text{ mm}^2 / \text{hr}^2 \end{bmatrix}$$

3時間先の予測結果を図-5に示す。波形全体の適合度をNash-Sutcliffe(N.S.)係数¹¹⁾で評価すると表-1のとおりで、精度の基準0.7以上であることがわかる。また、2乗誤差(RMSQ/PO: 予測値と実績値の2乗誤差を最大水深の2乗で割ったもの)を図中に示す。精度の基準値3%¹¹⁾以下で

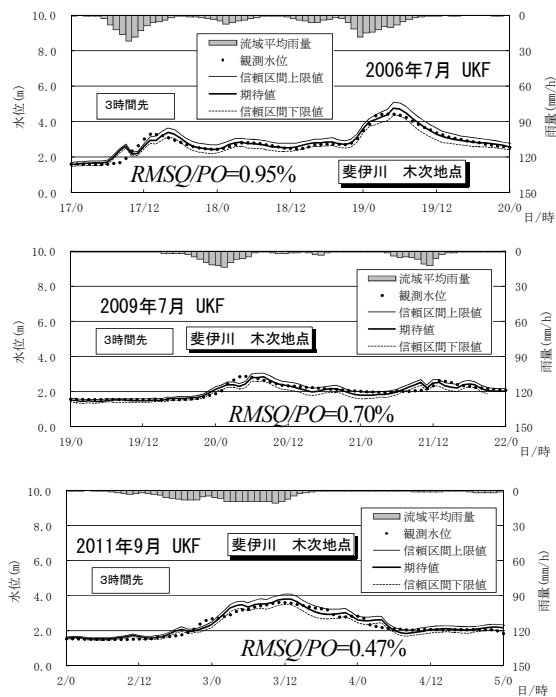


図-5 UKFによる3時間先の予測結果

あることがわかる。

6. 粒子フィルタとの精度比較

非ガウス分布にも対応でき、水位予測における実績¹²⁾がある手法に粒子フィルタがあり、UKFがこの手法と同程度の精度あればUKFが演算時間からみて優れた手法であることがわかる。

(1) 自己回帰モデルを表現した粒子フィルタの基礎式

時間更新ステップは(14)式で表現される。式中の1ステップ前の状態量の確率分布には、自己回帰係数と誤差項がはいる。観測値更新ステップは観測値により、現時刻の状態量を最適化するもので(15)式のとおりである。

1) 時間更新ステップ

$$p(x_t | Y_{t-1}) = \int p(x_t | x_{t-1}) p(Ax_{t-1} + e | Y_{t-1}) dx_{t-1} \quad (14)$$

2) 観測値更新ステップ

$$p(x_t | Y_t) = \frac{p(y_t | S(x_t)) p(x_t | Y_{t-1})}{p(y_t | Y_{t-1})} \quad (15)$$

(2) UKFとPFの比較

PFの解析では、粒子数を2,000個とし、解が安定するようにした。2006年7月洪水の予測結果を比較すると図-6のとおりで、UKFの結果と予測結果に差がない。

誤差を定量的に評価するために、N.S.係数を用いて他の2洪水とあわせて比較結果を示すと表-1のとおりである。

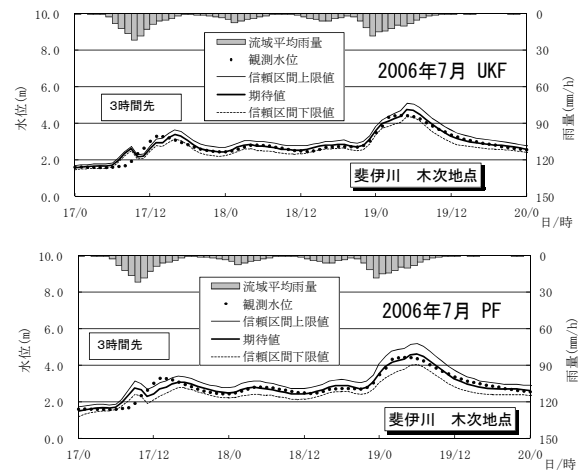


図-6 UKF, PFのフィルタリング手法の比較

表-1 3手法におけるNash-Sutcliffe 係数

洪水名	UKF	PF	MCMC
2006年7月	0.931	0.913	0.923
2009年7月	0.808	0.694	0.613
2011年11月	0.914	0.903	0.919

る。同表よりUKFはPFと同程度の精度があるといえる。参考に後述のMCMC法の結果を示すがUKFとほとんど変わらない結果となった。

信頼区間についてはUKFがPFより狭い。これは、UKFは誤差共分散行列から推定したもので、PFより間接的な推定方法であり、UKFの信頼区間の精度は低いと考える。図は掲載していないが、MCMC法の信頼区間はPFとほぼ同じであった。

7. MCMC法による誤差分布形状の推定

UKFは誤差分布をガウス分布と仮定しているが、 $2n+1$ 個のSigma Pointsによる近似であるため、誤差分布形はわからない。そこで観測値更新ステップ後の誤差分布形を階層ベイズ法で作成し、MCMC法で理論解を推定することとした。

(1) 基礎式の導出

a) 事前分布の確率密度

時間更新ステップを階層ベイズ法における事前分布とみなし、(8)式と(10)式と同等の事前分布を作成すると(16)式のとおりである。期待値に自己回帰モデルの誤差項があり、分散は現時刻における誤差分散行列である。 $F(x, \mu, \sigma^2)$ は期待値が μ 、分散が σ^2 のガウス分布における変数 x の場合の確率密度を示している。

$$P(x_t | Y_{t-1}) = F[x_t, A\hat{x}_{t-1} + |I - A|e, p(x_{t-1} | Y_{t-1})] \quad (16)$$

b) 自己回帰モデルの誤差項の確率密度

誤差項もガウス分布を仮定し、(17)式のとおり平均値0、分散は自己回帰係数とシステム誤差の関数となる。

$$P(e_t | Y_{t-1}) = F[e_t, 0, A^{-1}W(A^{-1})^T] \quad (17)$$

c) 尤度の確率密度

観測推定値と観測値の差の分布を(18)式のガウス分布で表現する。尤度の確率変数は簡易水位予測モデルによる解析値である。

$$P(y_t | Y_t) = F[S(x_t | Y_{t-1}), Y_t, V] \quad (18)$$

d) 事後分布の確率密度

階層ベイズ法から(19)式の後分布が導かれ、MCMC法により確率分布の理論解が推定できる。

$$P(x_t | Y_t) = P(y_t | Y_t)P(x_t | Y_{t-1})P(e_t | Y_{t-1}) \quad (19)$$

(2) 事後分布の推定方法

MCMCの解法の一つで、汎用性のあるMetropolis-Hastings method¹³⁾ (M-H法)を用いる。M-H法のアルゴリズムは、誤差分布を酔歩で推定するもので、酔歩の歩幅は(20)式のとおり、正規乱数に従うものとする。

$$x_t^{(i+1)} = x_t^{(i)} + \delta x N(0,1) \quad e_t^{(i+1)} = e_t^{(i)} + \delta e N(0,1) \quad (20)$$

ここに $x_t^{(i)}$ は t 時刻における i 回目の状態量の位置で $x_t^{(i+1)}$ は酔歩後を示している。 $e_t^{(i)}$, $e_t^{(i+1)}$ 自己回帰モデルの誤差量の位置である。 δx , δe は基準となる歩幅で、 $N(0,1)$ は平均0分散1の正規乱数である。

M-H法は(21)式で示すとおり、前位置と酔歩後の位置の確率密度比を提案密度(proposal density)とし、その提案密度の大小で採否を決定するものである。採否の判断に0~1区間の一様乱数 $U(0,1)$ を使用し、下記の基準で採否を決定する。

1) 提案密度

$$pr(i+1) = P^{(i+1)}(x_t | Y_t) / P^{(i)}(x_t | Y_t) \quad (21)$$

2) 提案密度の取捨選択の判断基準

- ・ $pr(i+1) \geq U(0,1)$ の場合
 $P^{(i+1)}(x_t | Y_t)$ を採用し、酔歩を1歩進める。
- ・ $pr(i+1) < U(0,1)$ の場合
 $P^{(i+1)}(x_t | Y_t)$ を不採用とし、もとに戻る。

確率分布が収束するまでには非常に多くの酔歩が必要で、解が収束するまで試算し、サンプリングデータを10,000とした。採択率は約50%で、10,000個のデータをサンプリングするために約20,000回の計算を行った。さらに、酔歩の初期値を仮定するため、初期の解析結果を棄却する。解の収束を確認しつつ、前半の5,000回を棄却し、後半の5,000個を採用した。

(3) 誤差分布の理論解の推定結果

観測値更新ステップ後の確率分布について、歪度、尖度で正規分布との差を評価する。事前分布はガウス分布であることから、観測値更新ステップによるガウス分布の変形具合がわかる。図-7に洪水期間中の誤差分布の歪

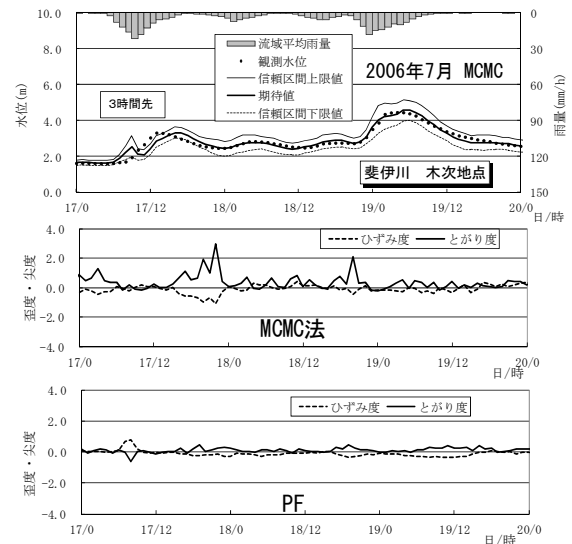


図-7 歪度と尖度の時間変化(観測値更新ステップ後の観測推定値の誤差分布 尖度=0がガウス分布)

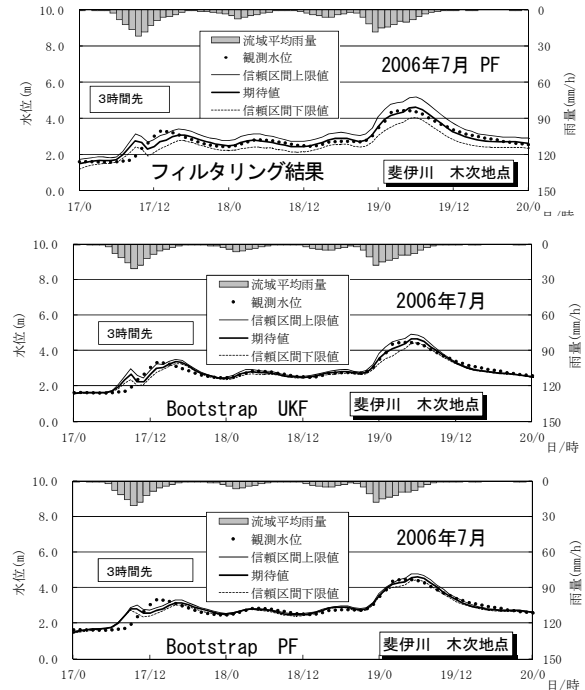


図-8 平均2割の誤差を与えた場合の水位的変動幅

度と尖度を示す。

フィルタリングでは、観測推定値と推定値が近いと誤差分散が小さくなり、離れると誤差分散が大きくなる。特に、急激に観測推定値と観測値が接近すると誤差分布の尖度が大きくなる。歪度の絶対値が大きくなるときは、尖度が大きいときで、符号は観測値と期待値との大小関係で決まり、期待値が観測値より大きい場合は、歪度は負値になる。

このように歪度と尖度の変化はフィルタリングの過程で生じるもので、簡易水位予測モデルの固有のものではないので、観測値更新後の誤差分布はおおむねガウス分布と見なすことができる。

PFの事後分布は、事前分布を任意の分布とした場合の

表-2 Bootstrapによる降雨誤差に対する安定性評価

評価項目	UKF	PF	MCMC
最大変動幅(m)	0.79	0.52	0.70
平均変動幅(m)	0.21	0.16	0.22

事後分布であり、時間更新ステップと観測値更新ステップを繰り返すサイクルにおける平均的な歪度と尖度である。歪度と尖度は小さく、おおむねガウス分布であるといえる。

8. 解の安定性の評価

リアルタイムで運用することが多い水位予測モデルは、雨量データに誤差があっても、一定の精度を維持していく必要があり、降雨の誤差に敏感に反応するモデルは実運用に適さない。そこで、降雨誤差を意図的に与え、予測水位の変動傾向を分析することとする。

(1) Bootstrap分布の作成

平均値0、分散が実績雨量の2割の2乗とした誤差を1時間ピッチで与えて、1つの降雨波形を作成し、これを1,000個作成し1洪水の誤差分布とした。この分布は平均が2割で、5%の確率で4割以上となり、かなり大きな誤差であると考えられる。

(2) Bootstrap分布の解析結果

Bootstrap分布の95%の信頼区間を変動幅と定義すると結果は図-8、表-2のとおりである。UKFは洪水のピーク付近で誤差が大きくなる。一方、PFはUKFと比べて変動幅の小さい手法であることがわかる。しかし、UKFの変動幅は図-6のPFのフィルタリングの信頼区間内の変動幅程度であり、実用上は問題なく、UKFは降雨誤差に対する安定性を担保しているものと判断できる。また、表-2からMCMC法の最大変動幅・平均変動幅も示したが、UKFのそれとほぼ同じであることから、UKFとPFの変動幅の違いは、粒子数あるいはsigma points数の違いの他に、前提条件としている確率分布の違いが含まれているものと考えられる。

9. おわりに

PFとの精度と雨量誤差に対する安定性の比較と、MCMC法による誤差分布の分析により、簡易水位予測モデルにおけるUKFの適用性が明らかになった。UKFはPFと同程度の精度が期待でき、かつ、比較的安定したフィルタリングができ、演算時間を考慮するとUKFは簡易水位予測モデルにおいては、優れたフィルタリング手法であることがわかった。

UKFはガウス分布を前提としたモデルであるため、簡易水位予測モデルがこの前提に対応できるか疑問があっ

た。そこで、MCMC法により、観測値更新ステップ後の誤差分布を作成し、誤差分布のガウス分布からのずれを確認した。その結果、これらのずれは、フィルタリング過程で生じる誤差分散の変化によって生じるものであり、観測値更新ステップ後の誤差分布は、概ねガウス分布とみなすことができることがわかった。

PFの粒子数とUKFのSigma Points数の違いにより、UKFは、降雨誤差が大きくなった場合は、期待値の変動幅が大きくなる可能性がある。この可能性をBootstrapにより分析した結果、洪水の立ち上り部は、PFと比べて変動幅が大きくなる。本解析では、変動幅は信頼区間内であり、実用上は問題ない範囲と考えられるが、UKFを適用する場合の観測値の変動特性を確認することが必要と考えられる。

参考文献

- 1) 吉野文雄, 吉谷純一, 堀内輝亮: 分布型流出モデルの開発と実流域への適用 土木技術資料32-10, pp.54-59 1990.
- 2) 辻倉裕喜, 田中耕司, 杉浦正之: Unscented Kalman Filter を用いた洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測システムの適用, 河川技術論文集 第20巻, pp.253-258, 2013.6.
- 3) S.J. Julier and J.K. Uhlmann: A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems, *Proc. SPIE, Signal Processing Sensor Fusion and Target Recognition IV*, pp.182-193, 1997.
- 4) 田中耕司, 辻倉裕喜, 杉浦正之: 非線形フィルタリングを用いた実時間河川水位の集中型モデルへのデータ同化, 土木学会論文集B1(水工学) Vol.70, No.4, I_409-I_414, 2014.
- 5) 北川源四郎: モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について, 統計数理, Vol.4, No.1, pp.31-48, 1996.
- 6) 木村俊晃: 貯留関数法による洪水流出追跡法, 建設省土木研究所, 1961.
- 7) 呉修一, 越塚雄太, 山田正: ハイドログラフの逓減特性を用いた流出特性の抽出, 水工学論文集, vol.48, pp.13-18, 2004.2.
- 8) <http://www1.river.go.jp/>.
- 9) <http://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/kurashi/kaiseki.html>.
- 10) 野上道男, 杉浦芳夫: パソコンによる数理地理学演習, pp.56, 古今書院, 1986.
- 11) <http://www.nilim.go.jp/lab/rcg/newhpc/checklist/setumei.pdf>.
- 12) 田中耕司, 辻倉裕喜, 大八木豊, 杉浦正之: 予測雨量誤差を考慮した洪水予測システムの開発, 水工学論文集, Vol.57, pp.1591-1596, 2013.3.
- 13) W.K. Hastings: Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications, *Biometrika*, 57(1), pp.97-109, 1970.

(2014.4.3受付)