

解析コストの効率化を目的とした 河道・氾濫原一体型解析法の提案

MONOLITHIC MODEL BETWEEN RIVER CHANNELS AND FLOOD PLAIN
WITH QUAD-TREE GRID FOR HIGH REDUCING COMPUTATION COSTS

星野 剛¹・西家 健宏²・小関 博司³・安田 浩保⁴

Tsuyoshi Hoshino, Takehiro Saika, Hiroshi Koseki and Hiroyasu Yasuda

¹ 学生会員 修 (工学) 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

² 正会員 修 (工学) 静岡県 交通基盤部港湾局 (〒 420-8601 静岡市葵区迫手町 9-6)

³ 学生会員 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

⁴ 正会員 博 (工学) 新潟大学准教授 災害・復興科学研究所 (同上)

Quad-tree grid system has two advantages: the grid system can express any geometry of plane forms in river and flood plane. Computation loads and number of grid can be decreased at the same time. This study derives truncation error of Quad-tree grid system for numerical stability, and number of grid of cross section in natural river for 2D computation based on rectangular grid. According to these results, a monolithic model between river channels and flood plain with Quad-tree grid system was developed and was applied to compute inundation of Shiotani river basin as in valley bottom plane. The numerical result can reproduce actual inundation area well and computation load was less than 30 percent comparison with computation employing fine grid for whole area.

Key Words: *monolithic model, quad-tree grid system, flood-inundation analysis*

1. はじめに

2011 年 3 月に発生した東北地方太平洋沖地震津波の河川遡上に伴う氾濫、同年 7 月の新潟・福島豪雨や同年秋からの長期にわたるタイ国の洪水氾濫の発生により、氾濫解析の新たな社会的需要が急増している。これら 3 つの現象には、河道と氾濫原との間の氾濫水の授受が複数点ないしは河道に沿って連続的に発生する共通点があり、水理解析は河道と氾濫原を一体になされるべきである。しかし、既往の氾濫解析^{1),2)}の多くは河道から氾濫原への氾濫水の点的な供給を前提とするため、同種の現象への適用には慎重を要する。現状では河道と氾濫原の一体的な解析法の研究は少ない(うえ^{3),4)}、河道と氾濫原の水理量の適切な授受のために平面 2 次元モデルを導入しているのは秋山らによる非構造格子を導入した方法⁴⁾に限られる。

秋山ら⁴⁾が平面 2 次元モデルに基づく一体型解析の水理学的な合理性を実験値との比較から示唆していることに加え、標高や土地利用などが構造格子型の数値情報として整備されている実状を踏まえると、今後はデカルト座標に基づく河道と氾濫原の一体型解析への大きな需要が見込まれる。こうした技術的背景に従い、本研究ではデカルト座標に基づく河道と氾濫原の

一体的な解析法について論じる。現在までにデカルト座標に基づく一体的な解析法が本格的に開発されてこなかった理由としては、矩形格子の格子構成にまつわる複数の問題の解決が困難であったことが推測され、以下の二つが主要な課題として挙げられよう。

一つ目の課題は、デカルト座標では格子長の部分的な増減や歪曲が許容されないため、局所的な高解像化の要求が全体に波及し、結果的に莫大な格子数の極めて冗長な格子構成になるばかりか、解析対象によっては市販の PC の演算能力と記憶容量を遥かに超える非現実的な格子構成が不可避となる。この問題は、特に、川幅に対して広大な浸水域を生じる解析領域において、氾濫現象に支配的な影響を与える河道などの線状構造物を対象とした高解像化に伴って顕在化する。

二つ目の課題は、細密な数値地理情報の整備に伴い、格子構成に要する作業時間が水理解析の演算時間と同等かそれ以上に達することが問題化してきていることである。この問題は、少なくとも水工学の分野では見過ごされてきた。例えば、複数の流路や道路などの線上構造物の細密な矩形格子への組込は、自動処理に馴染みにくい具体例の一つである。一方で、矩形格子の非効率的な格子構成の回避策として一般座標によ

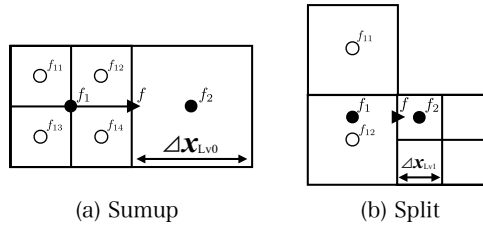


図-1 計算点配置

る境界適合を導入しても、河道と氾濫原を一体化した格子構成は複雑な平面形状となるためにメトリックスの打ち切り誤差⁵⁾が介入しやすく、そのような打ち切り誤差を緩和した格子構成の計算機を活用した自動処理はもはや困難となり、長大な作業時間を要する試行錯誤に依らざるを得ない。

以上までの整理により、矩形格子に基づく河道と氾濫原の一体型解析における課題は、格子数の肥大化とその構築の所要時間の両者を同時に効率化できる格子構成の実現であると結論できる。このような格子構成のもとでは、水理解析の演算負荷の軽減は従属的に実現される。

本研究では、矩形格子を基本としながらも局所的な高解像度化が可能な四分木構造格子⁶⁾の導入により前述の課題の抜本的な解決を目指す。以下では、まず、数値解の安定性を把握するための四分木構造格子が有する打ち切り誤差の評価や、矩形格子による自然河川の水理解析の妥当性を示すことで、四分木構造格子を導入した河道と氾濫原の一体型解析における水理学的な妥当性を明らかにする。続いて、実流域に提案する解析法を適用し、十分な再現性を維持しつつも演算負荷が大幅に軽減されることを示す。

2. 四分木構造格子の接合部における打ち切り誤差の理論的検討

四分木構造格子はデカルト座標系を基礎とするもので、局所的に離散間隔が異なることが特徴である。数値解析において空間的な離散間隔を局所的に変化させると数値解が不安定になることが知られている。四分木構造格子では随所で格子辺長が変化するため、このような格子構成における数値解の安定性を把握することは極めて重要である。ここでは、四分木構造格子が有する打ち切り誤差の評価式を導出するとともに、数値実験による定量評価を行う。

(1) 接合部における打ち切り誤差の導出

四分木構造格子には、着目する格子の風上側の格子辺長が小さいSumupと、格子辺長が大きいSplitの二つの接続形態が有り、それぞれ異なった打ち切り誤差を生じる。ここでは、それぞれの接続形態ごとの打ち切り誤差の評価式を導出する。

まず、図-1 (a) に示したSumupにおける空間的な微分項の差分について考える。図-1 (a) 中の三角で

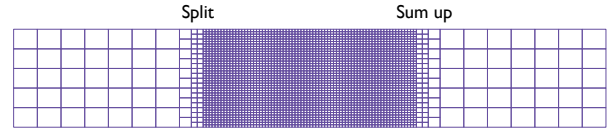


図-2 直線水路の格子構成

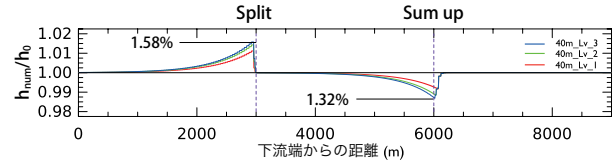


図-3 直線水路の数値実験結果

示した計算点での物理量 f の空間的な微分は、

$$f_x = \frac{f_2 - f_1}{\Delta x_{Lv0}} \quad (1)$$

として f_1 と f_2 及び Δx_{Lv0} から求められる。この時、 f_1 は図中白丸で示した $f_{11} \sim f_{14}$ の4点の物理量を算術平均した値であり、 $f_{11} \sim f_{14}$ および f_2 をTaylor展開して式(1)に代入すると、Sumupの打ち切り誤差として

$$T_x = -\frac{1}{32}[\Delta x_{Lv0}^2 f_{xx} + \Delta y_{Lv0}^2 f_{yy}] \quad (2)$$

が得られる。

次に、図-1 (b) に示したSplitにおける誤差項を導出する。 f_1 を f_{11} と f_{12} から線形補間により求めることに注意すると、Splitの打ち切り誤差として

$$T_x = -\frac{1}{4}\Delta x_{Lv1} f_{xx} \quad (3)$$

が得られる。

式(2)、(3)より、四分木構造格子が有する2種類の打ち切り誤差は、いずれとも物理量 f の集中化に寄与する負の拡散項の形になる。従って、格子構成の際には、 f_{xx} が地形形状などの影響により大きくなることが事前に推測される領域に対しては、格子辺長が変化するSumupやSplitとの重複を回避すべきである。

(2) 接合部における打ち切り誤差が数値解に与える影響

次に、SumupとSplitが有する打ち切り誤差が数値解にもたらす影響の程度を調べるため、以下の数値実験を行う。

a) 実験条件

実験水路は全長 9000m、全幅 200m、水路勾配が 1/1000、マンニングの粗度係数を 0.02 とし、境界条件としては上流端には 2000m³/s、下流端にはその等流水深を与えた。

格子構成には基本となる格子辺長を 40m とし、SumupとSplitにおいて格子辺長が1から3段階に変化する3種類の格子構成を用いた。四分木構造格子では、格子辺長の二分化が繰り返えされ、格子面積は $1/4^1$, $1/4^2$, $1/4^3$ の順に縮小していく。本文では、以降、領域中の最大格子辺長と冪乗の値を基準として

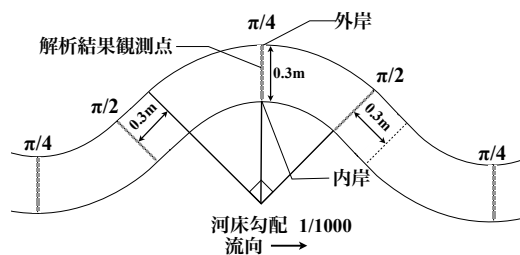


図-4 実験水路

図-2 のような格子構成を 40mLv3 などと表記する。これに則ると、この数値実験で用いた 3 種の格子構成は 40mLv3, 40mLv2, 40mLv1 と表記される。支配方程式には 2 次元の浅水流方程式を用いた。

b) 実験結果

実験結果を図-3 に計算水深 (h_{num}) を等流水深 (h_0) で除した無次元水深を縦断的に示す。理論値からのずれは 40mLv3 の結果が Split において最大 1.58% を示すにとどまり、等流条件においては良好な解が得られることが示された。

3. 矩形格子による自然河川の水理解析の適用性

四分木構造格子は矩形格子を組み合わせた規則性重合格子の一種である。従って、滑らかな曲線状の自然河川は矩形格子により境界適合されることになる。矩形格子による自然河川の水理解析に関する研究例は著者が知る限りほとんど無い。この理由としては、平面形状の境界適合に細密な格子分割が不可欠となり、非効率な格子構成になることが推測される。

ここでは、矩形格子の自然河川の水理解析への適用性を調べるとともに、要求される横断方向分割数の程度を検証した。

(1) 検証計算の対象とした実験水路

自然河川の蛇行部の波長や曲率および水理量を模擬した玉井ら⁷⁾の流況把握を目的とした実験を対象とする。彼らの実験水路はわん曲部と直線部を交互に組み合わせたもので、全体ではこれらが 10 個連続する。水路の一部を図-4 に示す。

(2) 計算条件と支配方程式

上流端と下流端の境界条件には、それぞれ定常流量 1.96 l/s と等流水深を与え、マンニングの粗度係数は 0.012 とした。また、格子構成は以下の 3 つをとし、それぞれ水路幅を 3 分割、6 分割、12 分割する縦横断方向の辺長が同一の矩形格子を用いた。

(3) 解析結果

図-5 に 10 個の蛇行区間の同位相断面で平均化された計算水深 h_{num} を実験水深 h_{exp} で除した横断方向分布を 3 つの横断方向分割数ごとに示した。

実験値からの差異はいずれの横断方向分割数とも ±5% 以内に収まる結果となった。水理量を良好に再現するために必要となる横断方向分割数は、河床の起

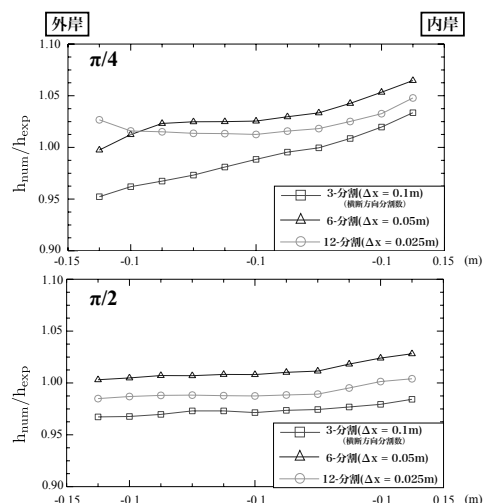


図-5 同位相平均水深分布 (上: 蛇行曲頂部 下: 直線部)

伏への留意も不可欠となるが、少なくとも平面形状の境界適合だけなら、蛇行の連続する自然河川の水理解析であっても流積の適切な確保さえされれば、極端に細密な格子分割を設定せずとも水理量の算出は可能であることが示された。

4. 平面 2 次元解析による越流量推定の妥当性

越流量の算定は、氾濫プロセスの決定に密接に関係するため、慎重に行われるべきである。氾濫解析における破堤箇所からの氾濫流量の算定には本間の越流公式がしばしば用いられるが⁹⁾、この公式は漸変流における横越流の算定を目的としたものである。このことに依拠すると、越流が縦断的に連続したり河道と氾濫原の間で氾濫水の授受が繰り返えされたりする複雑な越流形態への本越流公式の適用には疑義が残る。

平面 2 次元解析による河道と氾濫原の一体的な水理解析は、越流形態や氾濫水の流入角などの越流現象の支配的な因子を包含した越流量の算定法であることが示されている⁴⁾。ここでは、模型実験の再現計算を矩形格子に基づく平面 2 次元一体型解析により行い、同解析法が有する越流量の算定の妥当性を検証する。

(1) 検証計算の対象とした実験の概要

対象としたのは秋山ら⁴⁾による破堤氾濫流の横越流特性の把握を目的とした模型実験である。模型は水路長 3.0m の矩形断面水路部、その左岸側の法面勾配 2 割の堤防部、及び氾濫原部で構成され、堤防部には幅 0.4m の破堤部が設けられている。

なお、実験は完全越流と潜り越流の 2 つの越流形態で行われたが、河道内と氾濫原との強い相互作用を伴う潜り越流を対象とした。

(2) 計算格子

計算には、領域全体の格子辺長をそれぞれ 4cm と 2cm とした 4cmLv0 と 2cmLv0 の格子構成に加え、水路部と氾濫原部を 4cm としながら堤防部と破堤部

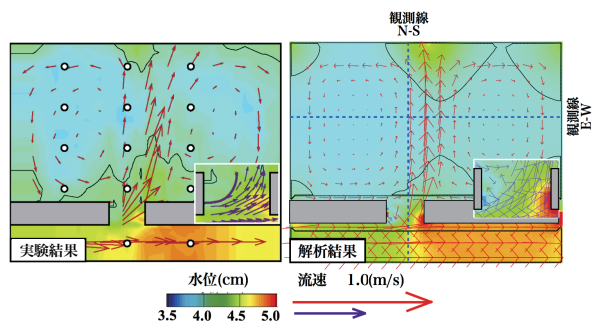


図-6 水位および流速ベクトルの平面的な比較（潜り越流）

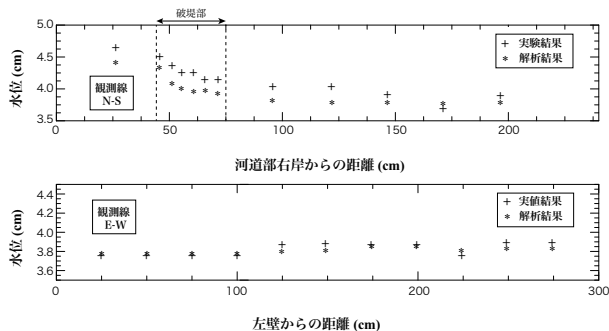


図-7 水位の観測線上における比較（潜り越流）

のみを 2cm とした 4cm.Lv1 の四分木構造格子の計 3 つの格子構成を用いた。

(3) 境界条件

境界条件として、図-6 中左下の河道上流部には $0.0168 \text{ m}^3/\text{s}$ の定常流量を与え、右下の下流部には実験で得られた水位をそれぞれ与えた。また、図中の上端は堰高 0.035m の刃型堰になっており、堰高に限界水深を加えた水位を境界条件として与えた。なお、左右境界は壁になっており、流出は上端部のみである。

(4) 解析結果

図-6 に水位と流速ベクトルの実験値と 2cm.Lv0 の計算値の平面的な比較図を示した。同図中の右下には破堤部の流況を拡大したものも示している。また、同図中の青色点線で示した 2 本の観測線上の水位の比較図を図-7 に示した。

これらの二つの図面から、領域全体としては計算値は実験値を良好に再現し、観測線 N-S、E-W のいずれに沿った水位の計算値は実験値を非常に良好に再現していることが分かる。ただし、破堤部においては、下流側へ偏る特徴的な流れは再現されているものの、実験値に比べ流速の計算値は過大に、また水位の計算値は過小に評価された。

図-8 に越流量の計算値 (Q_{cal}) と実験値 (Q_{exp}) を比較したものを示した。これによると、4cm.Lv0 の格子構成の計算値には実験値から 8% 程度の差異が見られるものの、2cm.Lv0 の格子構成と、破堤部と堤防部のみ格子辺長を 2cm とした 4cm.Lv1 の格子構成ではいずれも差異は 3% 程度の良好な再現性を有して

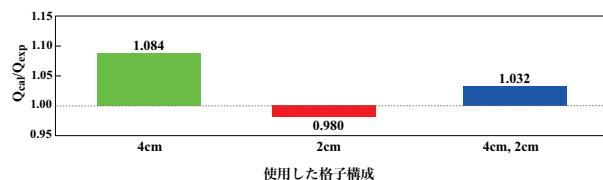


図-8 越流量の比較（潜り越流）

いた。以上から、矩形格子に基づく平面 2 次元解析は氾濫水の流向や堤内地の水位を加味した越流量を算定できることが確認された。

5. 実現象への適用

(1) 対象領域

2011 年 7 月に発生した新潟・福島豪雨は、観測地点によっては総降雨量が 1000mm に迫り、新潟県内をはじめとする各地に様々な形態の水害をもたらした。

この章では、河道沿いに甚大な浸水被害が生じた信濃川水系上流域の塩谷川における流下型洪水氾濫の再現計算を行う。計算結果に基づいて四分木構造格子を用いた実河川における氾濫解析の水理学的な適用性を検証するとともに、演算負荷の軽減について述べる。

(2) 計算格子

図-9 に再現計算に用いた四分木構造格子の格子構成図を示す。ただし、図-9 の格子辺長は紙面解像度に配慮して計算に用いた 5 倍の格子辺長とした。

この領域内の平均的な川幅は 45m 程度であり、2 章で検討した横断方向分割数を踏まえ、河道とその周辺を 5m 、氾濫原を 10m 、 20m とする 20m.Lv2 の四分木構造格子を構成した。ただし、標高が 100m 以上となる山地部については除外した格子構成とした。20m.Lv2 の格子構成では、河道を横断方向に 9 個程度の格子によって分割している。この格子構成では、5m.Lv0 の格子構成に比べて格子数は 87% まで削減される。

本章では以降において合計 4 つの格子構成を用いた計算を行うが、それらの全ての四分木構造格子の格子構成には安田ら⁶⁾により考案された自動処理法を適用した。この自動処理法が要求する入力情報は、境界適合などの局所的な高解像度化の実施が要求される点や線分の任意個数の座標値、および Lv0 の格子辺長、Lv の階層数のみだけでよく、これらの簡便かつ僅かな入力情報だけから完全な自動処理による格子構成が行える。線上構造物などの局所的な高解像度化に対しても同一に処理できる。その演算負荷は、例えば図-9 に示した塩谷川流域の 3 つの階層を有する 20m.Lv2 の格子構成では、ノートパソコン程度の演算能力 (MacBook, 2009 Late, Core2 Duo) でも数十秒程度で格子構成を完了でき、その上、格子構成後の試行錯誤は一切不要である。

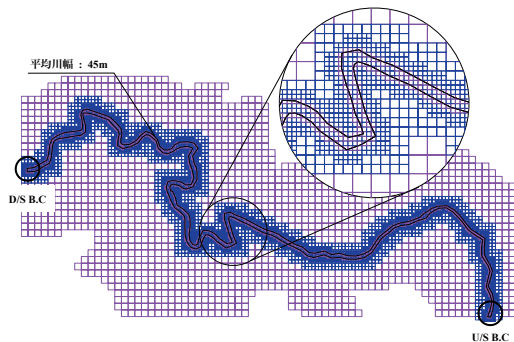


図-9 塩谷川流域の四分木構造格子による格子構成

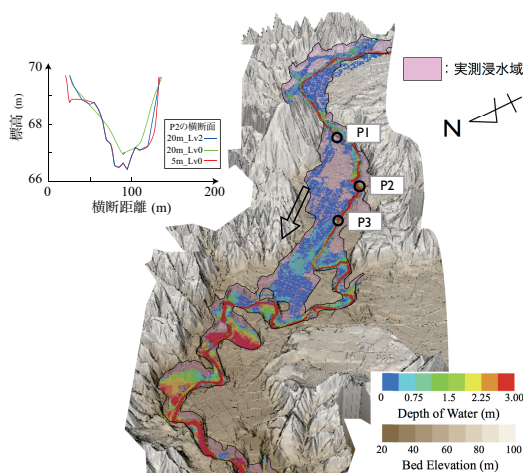


図-10 中央:最大浸水域となる時刻の水深分布 (20m_Lv2), 左上:P2地点での各格子の横断面図

(3) 初期条件・境界条件

初期条件は、解析領域全体で水深が0mになるように設定した。境界条件は、図-9中右下 (U/S B.C.) の上流端には2011年新潟・福島豪雨で観測された流量ハイドロを、図中左端 (D/S B.C.) の下流端には同流量ハイドロを与えて事前に1次元解析から算出した水位をそれぞれ与えた。

(4) 解析結果

a) 浸水域の再現性

再現計算の結果の一部を図-10に浸水面積が最大となる時刻の水深分布として示した。計算により得られた浸水域は、図中の黒線で囲まれた桃色で示された実測浸水域にほぼ包含され、全体に良好な再現性を有していることが分かる。

再現計算を行った領域内にはおよそ20カ所の霞堤が設置されている。著者らは浸水被害の直後に現地調査を行い、これらの霞堤を経由した河道と氾濫原の間の氾濫水の授受が各地点で生じていたことを確認している。詳細な記述は割愛するが、今回の再現計算においてもこのことを裏付けるような河道と氾濫原の間で流れが相互に影響を及ぼし合う流況が確認された。

b) 河道からの越流量

図-11に図-10中のP1, P2, P3の3地点からの越流量の時間的な変化を示した (P1が3点中で最上流)。これら3点は、霞堤が設置されているために河道か

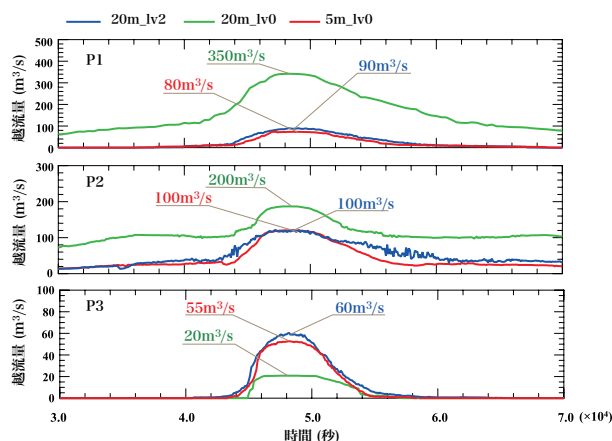


図-11 格子構成の違いによる越流量の比較

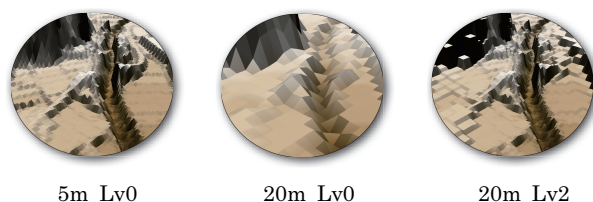


図-12 P1地点の付近の地形形状の解像度の比較

ら氾濫原への流出が顕著であった地点である。図中の赤線は5m_Lv0、緑線は20m_Lv0、また青線は河道周辺は5mとして氾濫原を10mと20mとした20m_Lv2の格子構成から得られた河道から氾濫原への越流量を示している。

まず、赤線の5m_Lv0と青線の20m_Lv2の格子構成から得られた越流量は、比較対象となる実績値が存在しないために相対的な言及に留まざるを得ないが、P1からP3のいずれの地点においても非常に近い値となった。このことは、図-12に示した格子構成ごとのP1地点付近の地形の解像度から分かるように、20m_Lv2の格子構成は越流量を規定する河積や河道に沿った堤体などの地形形状が5m_Lv0とほぼ同一の形状として計算に反映されているためと考えられる。なお、P2の20m_Lv2の計算値に含まれる高周波成分は、式(2)、(3)から説明されるものである。

つぎに、緑線で示した20m_Lv0の格子構成から得られた3地点の越流量は、赤線の5m_Lv0と青線の20m_Lv2で示した格子構成の越流量と大幅に異なった。そのうえ、20m_Lv0格子構成から得られた越流量は下流に向かうに従って低下していることが分かる。このことを図-12と組み合わせて考えると、20m_Lv0では河道形状の解像が20m_Lv2などと比べて明らかに劣り、図-10の左上に示したように3分の2程度に河積が過小評価されるため、上流区間ほど河道からの越流が顕著となる。

(5) 格子数及びCPU時間の削減率

a) 塩谷川流域

上述した格子構成の他に、新たに2つの格子構成による計算を追加し、格子数と計算負荷の削減傾向を

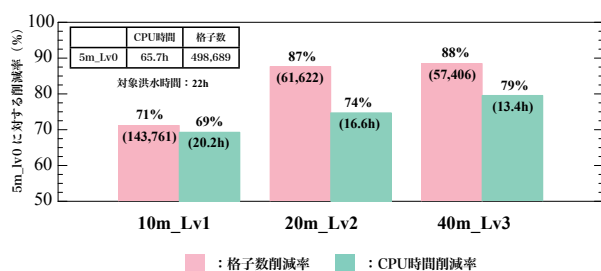


図-13 計算負荷の削減率

調べた。いずれの格子構成も河道周辺は5mに統一した。計算に使用したのはデスクトップ型のパソコン (MacPro 2008 Mid, Xeon 4Core) である。

図-13に5m_Lv0を基準値とした場合の10m_Lv1, 20m_Lv2, 40m_Lv3の格子構成における格子数とCPU時間の削減率を示した。

河道と氾濫原で格子サイズを使い分けることで格子数は、10m_Lv1で70%程度、40m_Lv3では90%近くの削減が実現されることが分かった。領域中の地形の起伏の度合いなどに応じて必要な解像度が異なり、これに依存して削減率は変化するものの、氾濫原と河道の格子辺長を個別に使い分けられる四分木構造格子では、解析領域の大きさに対して相対的に川幅が狭くなるにつれて計算負荷の削減傾向が顕著になることが推測される。

CPU時間は格子数に従属的であり、格子数の削減に応じて70%から80%の削減率を示した。図-9に示した20m_Lv2の格子構成であれば、5m_Lv0の格子構成と比べてCPU時間を74%程度削減できることが示された。

b) チャオプラヤ川流域

タイ国のチャオプラヤ川流域では2011年秋に長期に渡る大規模な洪水氾濫が発生した。平均的な川幅を500m程度、浸水の可能性がある解析領域を20,000平方kmと仮定し、四分木構造格子を導入した河道と氾濫原の一体型解析のための格子構成の格子数について見積りを行った。

河道を十分に解像するために格子辺長が50mの50m_Lv0により20,000平方kmの格子構成を行うと格子数は8,000,000個となり、一般的なPCの記憶容量と処理速度では対応がほぼ不可能な水準に達するうえ、計算結果の記憶も困難となる。これに対し、400m_Lv3による格子構成の格子数は50m_Lv0のわずか3%足らずの240,000個にまで一挙に削減でき、ノートパソコンレベルの処理能力でも解析を現実的な演算時間で実現できることが推定された。

6. おわりに

本研究では、矩形格子に基づく河道と氾濫原の一体型解析の課題として、格子数の肥大化とその格子構成の所要時間の両者の効率的な削減が不可欠であること

を指摘し、抜本的な解決策として、矩形格子を基本としながらも局所的な高解像度化が可能な四分木構造格子の導入が有効なことを提案した。

これまでに四分木構造格子を導入した河道と氾濫原の一体型解析の水理学的な妥当性が明らかにされていないことから、(1)数値解の安定性を把握するための四分木構造格子が有する打ち切り誤差の評価、(2)自然河川の矩形格子に基づく水理解析で求められる横断方向分割数について調べた。また、流下型洪水氾濫に見舞われた実流域に四分木構造格子を導入した河道と氾濫原の一体型解析法を適用し、水理学的な妥当性とともに、格子数や演算負荷を大幅に軽減できることを示した。最後に、四分木構造格子を導入した一体型解析においては、解析領域の大きさに対して相対的に川幅が狭くなるにつれて演算負荷の削減傾向が顕著になることが推測され、特にタイ国チャオプラヤ川の洪水氾濫のような事例において解析コストが飛躍的に軽減されることを示した。

謝辞：本研究は、科研費基盤研究(B)(代表者 渡邊康玄)および河川整備基金・指定課題(代表者 渡邊康玄)の支援を受けて実施された。また、解析結果の整理には新潟大学大学院 水口大輔君に多大なる協力を得た。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 水鳥雅文: 氾濫水の水理の数値解析法, 京都大学防災研究所年報, 第23号B-2, pp.305-317, 1980.
- 2) 栗城稔, 末次忠司, 海野仁, 田中義人, 小林裕明, 氾濫シミュレーション・マニュアル(案), 土木研究所資料, 第3400号, 1996.
- 3) 佐山敬洋, 藤岡奨, 牛山朋来, 建部祐哉, 深見和彦: インドス川全流域を対象とした2010年パキスタン洪水の降雨流出氾濫解析, 土木学会論文集B1(水工学), Vol. 68, No.4, I493-I498, 2012.
- 4) 秋山 壽一郎, 重枝 未玲, 梅木 雄大, 伊藤 雄亮: 破堤氾濫流の横越流特性と河道・氾濫域包括解析の適用性の検討, 水工学論文集, Vol.54, pp.853-858, 2010.
- 5) 星野剛, 安田浩保, 自然河川の水理解析における一般座標格子が有する打ち切り誤差の理論的評価とその緩和手法, 土木学会論文集A2(応用力学 Vol.16), 投稿中.
- 6) 安田浩保, 星野剛: 四分木構造格子による局所的な高解像度格子を導入した浅水流方程式の数値解法, 土木学会論文集, Vol.67, No.2(応用力学論文集 Vol.14), 2011.
- 7) 玉井信行, 池内幸司, 山崎晶: 連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文報告集, Vol.331, pp.83-94, 1983.
- 8) 栗城稔, 末次忠司, 小林裕明, 田中義人, 横越流特性を考慮した破堤氾濫流量公式の検討, 土木技術資料, 第38巻, 第11号, pp.60-61, 1996.
- 9) 土木学会, 水理公式集 平成11年版, 1999.

(2013. 4. 4 受付)