

Unscented Kalman Filterを用いた 洪水到達時間の短い流域を対象にした 水位予測システムの適用

DEVELOPMENT OF FLOOD FORECASTING MODEL WITH UNSCENTED
KALMAN FILTER AND APPLICATION FOR SMALL-MEDIUM RIVERS

辻倉裕喜¹・田中耕司¹・杉浦正之²

Hiroki TSUJIKURA, Kohji TANAKA and Masayuki SUGIURA

¹正会員 修(工) (株)建設技術研究所大阪本社水システム部 (〒541-0045 大阪市中央区道修町1-6-7)

²正会員 (株)建設技術研究所大阪本社水システム部 (〒541-0045 大阪市中央区道修町1-6-7)

This paper is discussed to make possibility to the flood forecasting system with small-medium river. Equation of relation between precipitation and water surface level is led by combination with basic equation of reserved function model and equation of HQ curve. Temporal series of constants in equation is analyzed by self regression equation.

Unscented Kalman Filter was employed with complicated non-linear model in order to assume suitable constants in equation. We applied flood forecasting model with Unscented Kalman Filter for actual flood data of River Doki and River Old-Yoshino, and the result of the numerical experiment gave good agreement with the value that had been obtained by the observed water level of two rivers.

Key Words : *Unscented Kalman Filter, Flood forecasting system, reserved function model, data assimilation, basin of small-medium river*

1. はじめに

洪水予測において、雨量から流量を予測し、流量からH-Q式を使用して水位を予測する方法が一般的であり、予測誤差には、降雨の誤差、流出モデルの誤差、H-Q式の誤差が考えられる。

近年、情報通信などの発達、演算能力の飛躍的な向上に伴い、レーダ雨量などの大量のデータを取得し、流出の物理的な過程を反映した分布型流出モデル¹⁾等により流量を推定することが多くなっている。しかし、H-Q式の精度は従来からほとんど変わらないため、流量推定の精度向上の成果が水位予測精度に十分反映されていない場合がある。

H-Q式の精度向上のための方策として、水位流量観測の精度向上によるH-Q式の精度向上や、不定流モデルの導入等が考えられている²⁾が、特に洪水到達時間の短い流域においては、流量観測資料自体が存在しないことや、計算時間を短縮する必要があることから高次な演算処理を適用できない等の問題がある。また、こうした流域の

急流河川では洪水中に河床変化すること、緩流河川では背水の影響を受けることなどにより、何らかのH-Q式を用意したとしても洪水中に変化するという問題がある。

そこで、河川管理において流量より重要な情報であり、洪水時に直接観測できる水位に対して、洪水予測モデルを同化させることができれば、上記問題の大部分が解消され、水位予測精度が向上すると考えたことが本論文の出発点である。

本論文では、水位を直接データ同化することの可能性を見極めるため、まず使用実績の多い貯留関数法モデル³⁾の基礎式とH-Q式を組み合わせることで水位-雨量の関係式を作成し、関係式における定数を自己回帰モデルで現した。最適な定数の推定には、洪水到達時間が短く計算時間を短縮する必要がある流域に適用することを考え、複雑な非線形モデルにも対応でき、かつCPUへの負荷も小さいUnscented Kalman Filter⁴⁾(UKF)をフィルタリング手法として用いた。洪水中にH-Q式が変化すると考えられる急流河川と緩流河川を対象にした実洪水におけるデータ同化実験の結果、十分な水位予測精度が確保できたため、ここに報告するものである。

2. 対象流域の概要と洪水予測上の課題

(1) 対象流域の概要

1流域の貯留関数法モデルで構築できる100～300km²の流域面積⁶⁾で、洪水毎に河床が変化する⁶⁾土器川流域と、洪水時に河口から背水の影響を受ける⁷⁾旧吉野川流域を対象とする。

土器川は香川県西部に位置し、瀬戸内海に注ぐ河川である。流域面積は127km²（基準点祓川橋：106.7km²）で、河床勾配は河口部の感潮区間では約1/1,200であるが、中下流部では1/400～1/100、上流部では1/100以上と全国有数の急流河川である⁶⁾。

旧吉野川は吉野川第十地点で吉野川本川から分派され、宮川内谷川などを合わせて東流し、今切川を分派しつつ紀伊水道に注ぐ河川である。流域面積は211km²（基準点大寺橋：98.7km²）で、河床勾配は今切川との分派下流で1/20,000～1/10,000、今切川で1/10,000～1/5,000、分派上流で1/5,000以上と緩流河川の様相を呈している⁷⁾。

(2) 洪水予測上の課題

水文・水質データベース⁸⁾から、祓川橋（土器川）の2003年から2012年の10ヶ年における流量が概ね100m³/s以上の洪水を対象に、H-Q換算流量と、土器川流域内の5雨量観測所（図-1参照）のテレメータ雨量を取得した。

まず、ティーセン法により総雨量を算定した。次に、H-Q換算流量のハイドログラフから水平分離法によって総流出高を算定し、総雨量との関係を把握した。

ここで、総雨量とH-Q式が正確であれば、総流出高は総雨量より小さいはずであるが、総流出高が総雨量より大きい場合がある（図-3参照）。これはテレメータ雨量、H-Q式、もしくは観測水位に含まれる誤差によるものと考えられ、観測雨量・水位の誤差が大きいと考えにくいことから、H-Q式の誤差が洪水予測における水位予測を困難にしていることを示している。

3. 水位予測モデルの構築

(1) 水位予測の基本的な考え方

従来から水位予測は図-4に示すフローで行われている。観測水位からH-Q式で換算した流量と、流出モデルにより雨量から推定した流量でフィルタリングを行い、状態量（流出係数）を推定する。このときに、H-Q式の誤差は流出率にしわ寄せすることとなり、雨量の誤差が大きい場合やH-Q式が変化する場合には、予測水位の信頼度は大きく低下する。

本論文で提示する水位予測のフローは図-5のとおりで、水位予測モデルにより雨量から推定した水位を観測水位によりフィルタリングし、予測段階では、雨量から水位

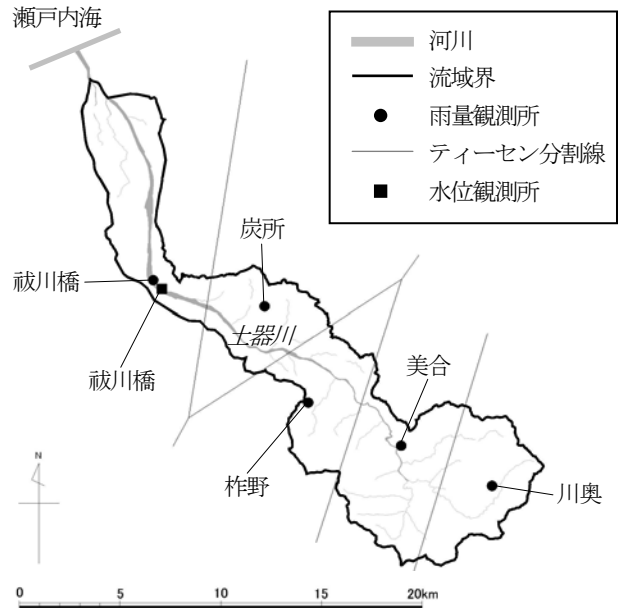


図-1 土器川流域の概要図

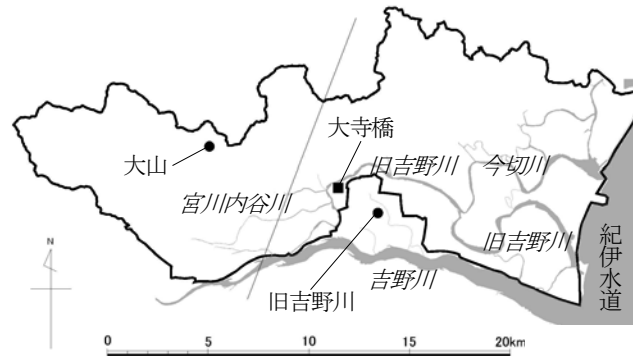


図-2 旧吉野川流域の概要図

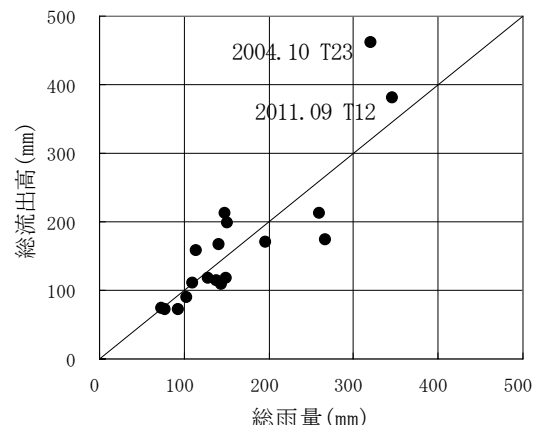


図-3 総雨量と総流出高の関係（土器川：祓川橋）

を直接推定する。

(2) 水位予測モデルの概要

1流域の貯留関数法モデルを基本とし、算定した流量がH-Q式から得られる流量と等しいとしたもので、定数 p を1/2に固定して式を簡便にしたものを提示する。

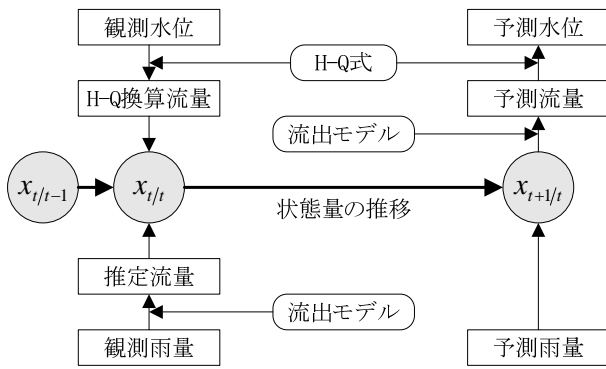


図-4 従来の水位予測のフロー

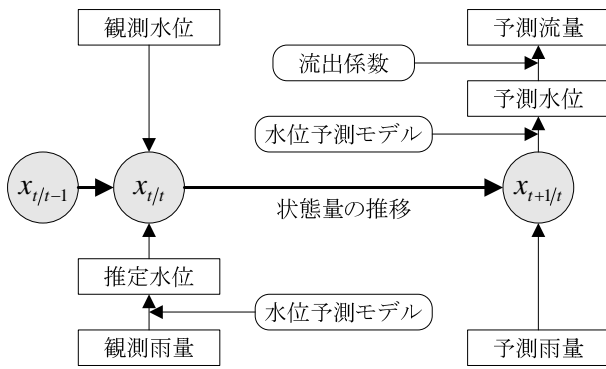


図-5 本論文の水位予測のフロー

図-6に示す概念図より流量項を消去することができるため、雨量から直接水位を推定できることが分かる。

(3) 水位予測モデルの基礎式

a) 基礎式の導出

貯留関数法の基礎式は(1)～(4)式に示すとおりである。モデルに投入する雨量には、ベースフロー分も加算する。

$$\text{<連続式>} \quad \frac{ds(t)}{dt} = r(t) - q(t) \quad (1)$$

$$\text{<投入雨量>} \quad r(t) = r_a(t - Tl) + r_b(t) \quad (2)$$

$$\text{<貯留高と流出高の関係式>} \quad s(t) = kq(t)^p \quad (3)$$

$$\text{<実流域流量への変換>} \quad Q(t) = \frac{1}{3.6} f(t) A q(t) \quad (4)$$

ここに、 s : 貯留高 (mm), t : 時間 (hr), r : モデルに直接投入する雨量 (mm/hr), r_a : テレメータ等から推定される流域平均雨量 (mm/hr), Tl : 遅れ時間 (hr), r_b : ベースフローに相当する雨量 (mm/hr), q : 流出高 (mm), Q : 実流域流量 (m³/s), k, p : 貯留関数法モデルの定数 ($p=1/2$), f : 流出係数, A : 流域面積 (km²) である。また、 (t) は時間の関数であることを示している。

H-Q式は(5)式のとおり流量を水位の二次式で表現する。H-Q式の右辺の括弧の中は $H + b$ と表すことが多いが、本論文では $H - b$ としている。これは、 b に流量ゼロとなる基準面からの高さという水理的な意味を持たせたためである。また、定数 a, b は時間の関数としている。

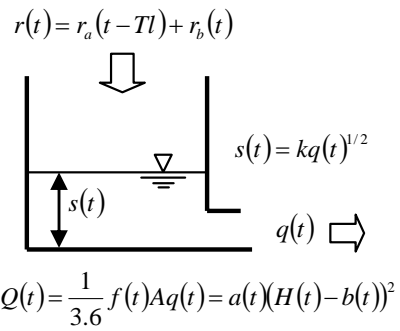


図-6 水位予測モデルの概念図

$$Q(t) = a(t)(H(t) - b(t))^2 \quad (5)$$

ここに、 H : 基準面からの水位 (m), a, b : 定数である。(6)式に示す定数 c を導入し、(3), (4), (5)式を用いて(1)式を H と r の関数にすることにより、本論文の水位予測モデルの基礎式である(7)式を導くことができる。

$$c(t) = \left(\frac{f(t)A}{3.6a(t)} \right)^{1/2} \quad (6)$$

$$k \frac{d(H(t) - b(t))}{dt} = c(t)r(t) - \frac{1}{c(t)}(H(t) - b(t))^2 \quad (7)$$

b) 解析方法

(7)式は、水位が雨量と k, b, c の3定数で表現できることを示している。また、(7)式は、 Δt 時間内は定数が一定と仮定し積分することにより、(8)～(12)式に示す双曲線関数等で表現できる。これにより、水位は関数に値を代入して推定できるので、解の安定性を保持できる。

① $(H(t-1) - b(t))/c(t)/r(t)^{1/2} < 1$ のとき

$$H(t) = c(t)r(t)^{1/2} \tanh\left(\frac{r(t)^{1/2}}{k} \Delta t + \xi\right) + b(t) \quad (8)$$

$$\xi = \tanh^{-1}\left[\frac{(H(t-1) - b(t))/c(t)}{r(t)^{1/2}}\right]$$

② $(H(t-1) - b(t))/c(t)/r(t)^{1/2} = 1$ のとき

$$H(t) = H(t-1) \quad (9)$$

③ $(H(t-1) - b(t))/c(t)/r(t)^{1/2} > 1$ のとき

$$H(t) = c(t)r(t)^{1/2} \coth\left(\frac{r(t)^{1/2}}{k} \Delta t + \xi\right) + b(t) \quad (10)$$

$$\xi = \coth^{-1}\left[\frac{(H(t-1) - b(t))/c(t)}{r(t)^{1/2}}\right]$$

④ $r(t) = 0$ のとき

$$H(t) = \frac{kc(t)(H(t-1) - b(t))}{(H(t-1) - b(t))\Delta t + kc(t)} + b(t) \quad (11)$$

⑤ $r(t) < 0$ のとき

$$H(t) = c(t)r(t)^{1/2} \cot\left(\frac{r(t)^{1/2}}{k} \Delta t + \xi\right) + b(t) \quad (12)$$

$$\xi = \cot^{-1}\left[\frac{(H(t-1) - b(t))/c(t)}{r(t)^{1/2}}\right]$$

(4) 定数の自己回帰モデル⁹⁾

a) 定数の選定

b, c は時間とともに変化するパラメータである。この2つの状態量でフィルタリングできるが、洪水の初期の低水流量時と洪水終了後の無降雨時の水位が上手く再現できないので r_b を加えた3つをパラメータとする。なお、洪水前後の雨量によらない変動を調整するものとみなすこともできるので、 r_b はマイナス値となることもある。

b) 定数の次数と係数

自己回帰モデルは簡便なものとして、(13)～(15)式に示すとおりとし、次数は1とした。次数1の場合は、自己回帰係数は自己相関係数である。このことから、定数 b は洪水中に常に大きな変動をしないため、自己相関係数は1.0に近いと考え、自己回帰係数 $\alpha_b = 1.0$ を設定した。

c は流出係数 f とH-Q式の定数 a の関数で正值である。また、 a は一定幅で変動し、 f は0～1の値であるため、 c も一定幅で変動するものとする。そこで、 c/c_{\max} (c_{\max} は c の最大値) のLogit関数で自己回帰モデルを表現することとし、自己回帰係数 $\alpha_c = 0.75$ とした。

r_b は洪水中に b よりも大きく変動するものと考え、自己回帰係数 $\alpha_r = 0.8$ と仮定した。

$$b(t) = \alpha_b b(t-1) + e_b \quad \alpha_b = 1.0 \quad (13)$$

$$\log \frac{1}{1 - c(t)/c_{\max}} = \alpha_c \log \frac{1}{1 - c(t)/c_{\max}} + e_c \quad \alpha_c = 0.75 \quad (14)$$

$$r_b(t) = \alpha_r r_b(t-1) + e_r \quad \alpha_r = 0.8 \quad (15)$$

4. データ同化手法の構築

(1) フィルタリング手法の選定

非線形モデルに対応したフィルタリング手法には、Extended Kalman Filter¹⁰⁾ (EKF) が多用されてきたが、ヤコビアンを解く必要があり、プログラムソースコードを書き換える作業が必要であった。また、ヤコビアンがゼロに近づくと不安定になる¹¹⁾ことが指摘されており、EKFの普及は限定的であった。1990年代にEnsemble Kalman Filter¹²⁾ (EnKF), Particle Filter¹³⁾ (PF)などの非線形モデルに対するフィルタリング手法が提案された。しかし、両モデルは統計量をモンテカルロ近似しているため、CPUへの負荷が大きい。このため、統計量の近似にU変換⁴⁾ (Unscented Transform)を採用し、CPUへの負荷の小さいUnscented Kalman Filter⁴⁾ (UKF)を採用する。

(2) Unscented Kalman Filterの構築

a) 基礎式の整理

時間更新ステップ式と観測値更新ステップ式からなる。

時間更新ステップ式は、 $x_{t-1/t-1}$, $x_{t/t-1}$ を状態量の行列とし(16)式に示すとおり簡易な線形式で表現できる。定数の状態量は(17)式で表現でき、行列は(18)式となる。 q_n はシステムノイズである。なお、サフィックス $t-1/t-1$ は1ステップ前の状態量を、 $t/t-1$ は1ステップ前の情報から時間更新した結果で、また、 t/t は現時点における観測値更新した結果であることを示す。

$$x_{t/t-1} = Ax_{t-1/t-1} + q_n \quad (16)$$

$$\text{ここに、} x_{t/t-1}^T = \begin{bmatrix} b_{t/t-1} & c_{t/t-1} & r_{B_{t/t-1}} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_b & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (18)$$

観測値更新ステップ式は(19)式で表現することができ、 $F_t(x_{t/t-1})$ は(8)～(12)式である。 $y_{t/t-1}$ は観測推定値、 r_n は観測ノイズである。

$$y_{t/t-1} = F_t(x_{t/t-1}) + r_n \quad (19)$$

b) システムノイズと観測ノイズの設定

システムノイズは、後述の水位予測モデルを運用した結果、 b のノイズは $H - b$ の6%とし $H - b$ が大きくなると b が変動しやすくなるようにした。Logit c は、土器川で0.03、旧吉野川で0.3として、 r_b は1.0mm/hrとした。土器川のシステムノイズの共分散を(20)式に示す。

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0.06^2(H-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 \times 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \times 1.0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

観測ノイズの共分散についても水位予測モデルの運用結果から、 $H - b$ の5%と仮定し(21)式のとおりとした。

$$R_n = 0.05^2(H-b)^2 \quad (21)$$

(3) Unscented Kalman Filterのアルゴリズムの整理

二次の統計量である状態量の誤差共分散行列をU変換⁴⁾によりSigma Pointsで近似することがUKFの特長である。

a) 状態量の観測値更新方法の概要

カルマンゲイン (G) は(22)式のとおり誤差共分散行列から求めることができる。カルマンゲインによって状態量を更新する式はKalman Filter¹⁴⁾と同一で(23)式より与えられる。状態量の誤差共分散行列の時間更新は(24)式で与えられる。なお、表記は片山¹⁵⁾を参考にした。

$$G = U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} \quad (22)$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + G(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) \quad (23)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} U_{t/t-1}^T \quad (24)$$

(22)～(24)式に使用した変数は以下の(25)～(29)式で定義される。

<状態量の誤差共分散行列>

$$P_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \begin{bmatrix} x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \\ x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \end{bmatrix}^T + Q_n \quad (25)$$

<状態量と観測推定値の誤差共分散行列>

$$U_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left| x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \right| \left| y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right|^T \quad (26)$$

<観測推定値の誤差共分散行列>

$$V_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left| y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right| \left| y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right|^T + R_n \quad (27)$$

<観測推定値> $\hat{y}_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} y_{t/t-1}^{(i)} \quad (28)$

<状態量推定値> $\hat{x}_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} x_{t/t-1}^{(i)} \quad (29)$

b) U変換の概要

2つの状態量がある場合を想定してU変換を概説する。図-7に示すとおり (ξ, ν) 平面上に独立な状態量誤差分布があると仮定する。2軸の一方を長軸とし、他方を短軸とした誤差分布になる。これを (x, y) 平面上の誤差分散特性を反映した分布に変換することをU変換という。

(ξ, ν) 平面上の2軸上に状態量から観測推定値を算定するSigma Pointsを設定する。2変数でSigma Pointsは5となり、これを一般化すると n 次元では $2n+1$ となる。

c) Sigma Pointsの設定方法の概要

状態量 $x_{t/t-1}$ の誤差共分散行列 $P_{t/t-1}$ は、特異値分解より(30)式のとおり平方根行列で表現できるものとする。

$$P_{t/t-1} = \sqrt{P_{t/t-1}} \sqrt{P_{t/t-1}}^T \quad (30)$$

Sigma Pointsの数は $2n+1$ 個で(31)～(33)式とする。

① $i=0$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(0)} = \hat{x}_{t/t-1} \quad W^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} \quad (31)$$

② $i=1 \sim n$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(i)} = \hat{x}_{t/t-1} + \left(\sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}^{(i)}} \right) \quad W^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad (32)$$

③ $i=n+1 \sim 2n$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(i)} = \hat{x}_{t/t-1} - \left(\sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}^{(i)}} \right) \quad W^{(n+i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad (33)$$

ここに、 $x^{(i)}$:Sigma Pointsでの状態量、 \hat{x} :状態量の期待値、 $\sqrt{P_{t/t-1}^{(i)}}$:誤差共分散の平方根行列の i 列の値、 $W^{(i)}$:Sigma Pointsの重み、 λ :パラメータである。

5. 水位予測モデルの適用結果

実洪水に対して水位予測モデルを適用した結果を示す。パラメータ $k=20$ と仮定して、水位のフィルタリングの状況、定数の変動状況を把握した上で適用性を確認する。

(1) 洪水中に河床変化する河川への適用～土器川

洪水の立ち上がりが急な2004年10月洪水と、緩やかに立ち上がる2011年9月洪水を対象に、水位予測モデルを適用した結果を図-8、図-9に示す。両図とも、上段には

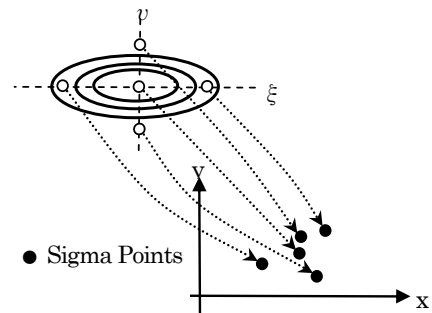


図-7 U変換とSigma Pointsの概念図

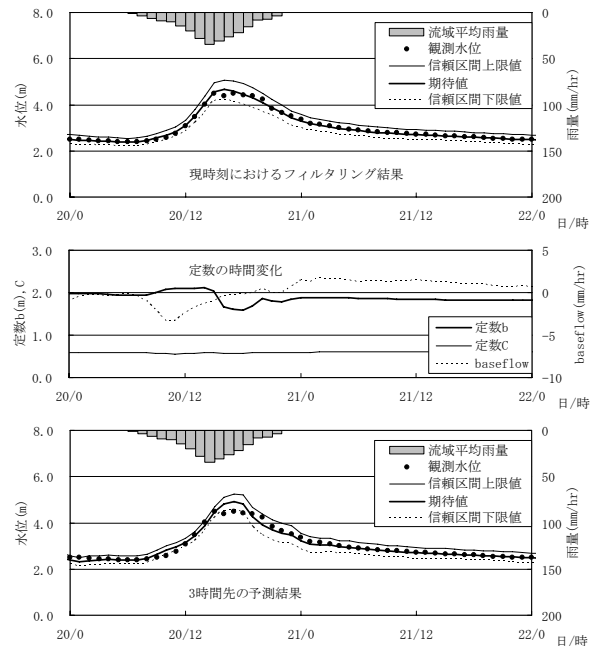


図-8 土器川への適用結果 (2004年10月・台風23号)

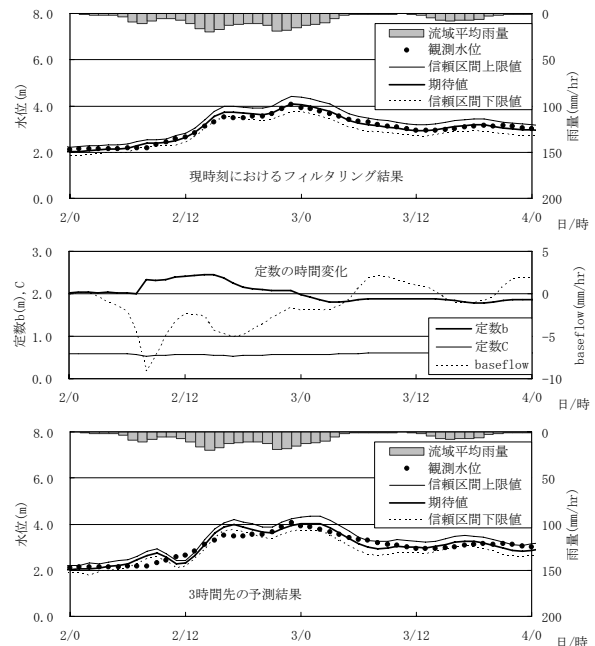


図-9 土器川への適用結果 (2011年9月・台風12号)

現時刻におけるフィルタリング結果を、中段には定数の時間変化を、下段には3時間先の予測結果を示している。

現時刻におけるフィルタリング結果および3時間先の予測結果とともに、観測水位が概ね95%信頼区間に入っており、フィルタリング結果に問題ないことが分かる。

また、定数の時間変化より、 r_b による誤差の調整ができなくなると、 b が変化し、観測水位との調整を行う傾向が伺える。これは、河床高変化を表す b に c よりも比較的大きな誤差を設定したことに起因しており、河道特性の違いによりノイズを調整する有意性を示している。

(2) 背水の影響を受ける河川への適用～旧吉野川

洪水の立ち上がり之急な2004年10月洪水と、緩やかに立ち上がる2011年9月洪水を対象に、水位予測モデルを旧吉野川に適用した結果を図-10、図-11に示す。

現時刻におけるフィルタリング結果、3時間先の予測結果とともに、土器川への適用結果同様、フィルタリング結果に問題ないことが分かる。

また、定数の時間変化より、河床高変化以外の変化を表す c により大きな誤差を設定したことで、 r_b による誤差の調整ができなくなると、 b だけでなく c も変化し、観測水位との調整を行う傾向が伺える。このことから、河道特性の違いによりノイズを調整する有意性が伺える。

6. おわりに

本論文で提示した水位予測モデルを、河床変化や背水の影響等により洪水中にH-Q式に影響を与えるといった特性を持つ河川に適用した結果、河川毎に自己回帰係数、フィルタのシステムノイズ（定数 c については河道特性により変更）、観測ノイズを変更することなく、良好な予測結果が得られた。また、水位予測モデルが解析途中で発散するようなことはほとんどなく、UKFが洪水予測モデルのフィルタリングに適用できることが確認できた。

参考文献

- 1) 吉野文雄, 吉谷純一, 堀内輝亮: 分布型流出モデルの開発と実流域への適用, 土木技術資料32-10, pp.54-59, 1990.
- 2) http://www.nilim.go.jp/lab/rcg/newhp/checklist/kadai_taiou.pdf.
- 3) 木村俊晃: 貯留関数法による洪水流出追跡法, 土木研究所, 1961.
- 4) S.J. Julier and J.K. Uhlmann: A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems, *Proc.SPIE, Signal Processing Sensor Fusion and Target Recognition IV*, pp.182-193, 1997.
- 5) 河川砂防技術基準 調査編, 平成24年6月版, 第3章第2節-15
- 6) 国土交通省河川局: 土器川水系河川整備基本方針, 2007.
- 7) 国土交通省河川局: 吉野川水系河川整備基本方針, 2005.
- 8) <http://www1.river.go.jp/>.
- 9) 北川源四郎: 時系列解析入門, 2005.
- 10) A.H. Jazwinski: Stochastic Processing and Filtering Theory, Academic Press, 1970.

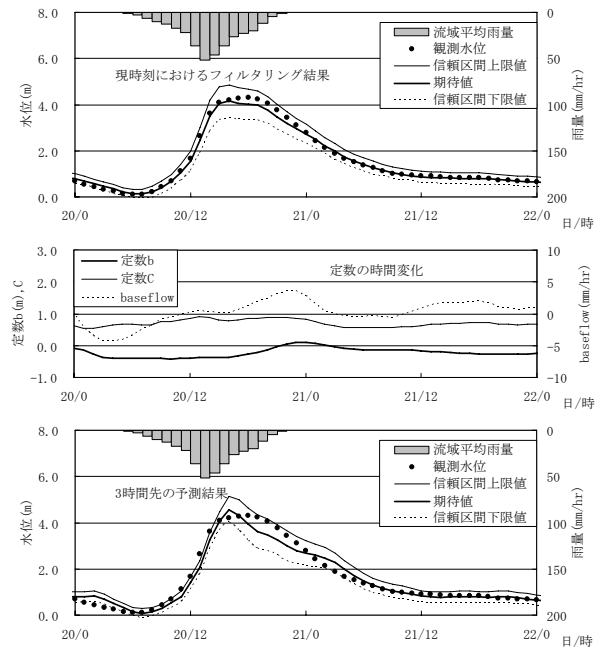


図-10 旧吉野川への適用結果 (2004年10月・台風23号)

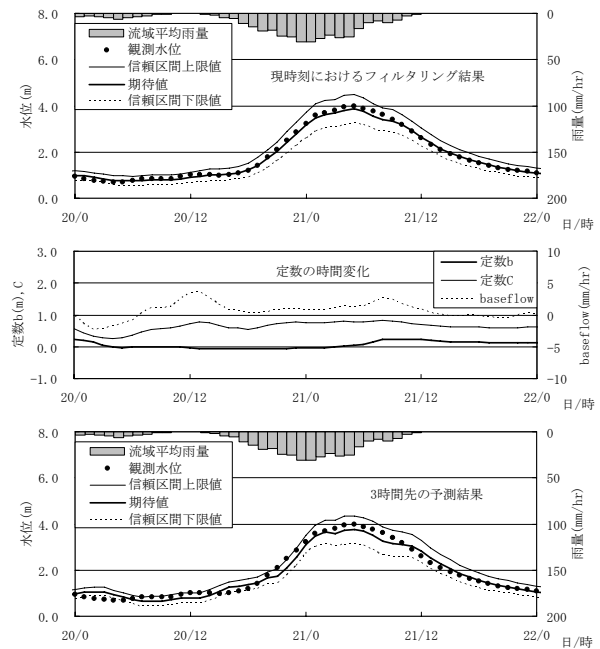


図-11 旧吉野川への適用結果 (2011年9月・台風15号)

- 11) 中村和幸, 上野玄太, 樋口知之: データ同化その概念と計算アルゴリズム, 統計数理, Vol.53, No.2, pp.211-229, 2005.
- 12) Geir Evensen: Sequential data Assimilation with a nonlinear quasi-geotropic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *Journal of Geo-phys Research*, Vol.99, 10143-10162, 1994.
- 13) 北川源四郎: モンテカルロフィルタおよび平滑化について, 統計数理, Vol.4, No.1, pp.31-48, 1996.
- 14) R.E. Kalman: A new approach to liner filtering and prediction problems, *Trans.ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol.83D, No.1, pp.95-108, 1961.
- 15) 片山徹: 非線形カルマンフィルタ, pp.103-109, 2011.

(2013. 4. 4受付)