

積雪層の貯留効果を取り入れた融雪流出モデルの検討

AN EXAMINATION OF SNOWMELT RUNOFF MODEL WITH STORAGE EFFECT IN SNOWPACKS

臼谷友秀¹・星 清²・山下彰司³

Tomohide USUTANI, Kiyoshi HOSHI and Syouji YAMASHITA

¹ 正会員 (財)日本気象協会 北海道支社 (〒064-8555 札幌市中央区北4条西23丁目1-18)

² フェロー会員 (財)北海道河川防災研究センター (〒060-0807 札幌市北区北7条西4丁目5-1)

³ 正会員 (独)土木研究所 寒地土木研究所 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1条3丁目1-34)

This paper develops the two-cascade storage routing model with four parameters that can generalize the snowmelt runoff for study river basins of interest. First, the present study describes the algorithms that mathematically optimize model parameters, using the Newton-Raphson method in which sensitivity coefficients are analytically derived. Second, model parameters are identified only from the largest flood event during the whole melting season. Finally, the four optimized model parameters are employed to reproduce a series of snowmelt flood hydrographs with high accuracy from April to June.

The proposed methods are applied to analyses of snowmelt runoff in Hoheikyo Dam located in the Toyohira River, which is a tributary of the Ishikari River. It was found from simulation results that the proposed two-cascade storage routing model could reproduce snowmelt hydrographs in good accordance for the whole melting season in different water years.

Key Words : Snow melt runoff model, Two-cascade storage routing model, Newton-Raphson method, Sensitivity coefficients

1. はじめに

積雪寒冷地における多目的ダムの管理運用にあたっては、かんがい等の利水需要に備えて融雪期に貯水位を高く設定しておく必要がある。一方、地球温暖化等を原因とした融雪期の大雨が懸念されており¹⁾、融雪期の大規模な出水は管理上大きな脅威となる。現に2000年5月には、札幌市の豊平峡ダムで予想外の大雨に見舞われ、危機管理を要する事態が起きている²⁾。このように、水資源管理と洪水管理といった相反する条件下では、降雨や融雪に伴う流出量を的確に予測することが重要な課題となる。

融雪期の流出量を求める手法としては、流出機構の概念が反映されていること、また、水収支が明確になっているなどの理由からタンクモデルを採用する例が多い³⁾。菅原の直列4段タンクモデルに代表されるように、タンクモデルのモデル定数は10個を超え、これら多数のモデル定数の探索に対しいくつかの研究例が報告されている^{4),5)}。しかしながら、モデル定数が多いことから最適なモデル定数が探索できないことがあり、初期値の変更といった試行錯誤的な作業を伴う場合がある。従って、実務面での適用に当たっては、より簡便かつ客観的にモデル定数を同定できる融雪流出モデルの開発が望まれる。

そこで本論文では、融雪流出モデルとして4個のモデル定数を持つ2段タンク型貯留関数モデルを提案し、このモデルによって融雪期全体のハイドログラフの再現を試みた。このモデルは、表面・中間成分の流出量に加えて、地下水流出成分も考慮されており、中長期的な水収支を明確化できるモデルとなっている。モデルの適用にあたっては、以下の手順を採った。

- 1) モデル定数の最適値を探索するための計算方法を導出した。最適値の探索にあたっては、Newton-Raphson法を用い、実測流出高と計算流出高の平均2乗誤差が最小になるようにモデル定数を探索した。また、このとき必要になる感度係数を解析的に算定するアルゴリズムを提案した。
- 2) 提案流出モデルを実流域に適用し融雪期ハイドログラフを再現した。モデル定数は、融雪期の最大出水事例を training data として用い、これに対し最適同定を試みた。なお、融雪流出モデルへの入力値となる融雪量は熱収支法によって求め、融雪水が積雪層を流下する際の遅れを線形貯留関数法によって考慮した。training data から得られた最適モデル定数を用い、5年間の融雪期におけるハイドログラフ(checking data)をシミュレートした。

以上の結果、本報告で提案した2段タンク型貯留関数

モデル定数は、客観的かつ効率的に同定され、融雪期全体のハイドログラフを良好に再現できることが分かった。

2. 融雪流出モデルへの入力値の算定

融雪流出モデルへの入力値(以下、土壤供給水量と呼ぶ)は、熱収支に基づいて求めた融雪量に雨量を加えた値とした。融雪量は気象因子から1kmメッシュ毎に算定するが、融雪流出モデルに入力する際には、このメッシュ値を流域全体にわたってランピングした。

融雪量の算定には、近藤・山崎らが提案した熱収支法⁶⁾を基本として、日射量の遮断など植生の影響を加味した次式を用いた。

$$\frac{1}{2}c_s\rho_s\{Z(T_0-T_s)-Z_n(T_0-T_{sn})\} + W_0\rho_s l_f(Z-Z_n) + M_0\Delta t = G\Delta t \quad (1)$$

$$\varepsilon\{f_v L\downarrow + (1-f_v)\sigma T_v^4 - \sigma T_{sn}^4\} - H - IE + \lambda_s \frac{T_0 - T_{sn}}{Z_n} = 0 \quad (2)$$

$$G = (1-\alpha)f_v S + \varepsilon\{f_v L\downarrow + (1-f_v)\sigma T_v^4 - \sigma T_{sn}^4\} - H - IE \quad (3)$$

ここで、 c_s :積雪の比熱(J/kg/K)、 l_f :雪の融解潜熱(J/kg)、 T_0 :0(°C)、 T_s :雪温(°C)、 T_v :植被層の温度(°C)、 W_0 :最大含水率(=0.1)、 Z :凍結深(m)、 ε :射出率、 λ_s :積雪の熱伝導率(W/m/K)、 ρ_s :積雪の密度(kg/m³)、 σ :Stefan-Boltzmann定数(W/m²/K⁴)、 Δt :時間間隔(s)、 f_v :植被層の透過率、 G :積雪が受けるエネルギー(W/m²)、 H :顕熱(W/m²)、 IE :潜熱(W/m²)、 $L\downarrow$:下向き長波放射量(W/m²)、 M_0 :融雪熱(W/m²)、 T_{sn} :時間 Δt 後の雪温(°C)、 Z_n :時間 Δt 後の凍結深(m)、 S :日射量(W/m²)、 α :アルベド。顕熱 H 及び潜熱 IE は、バルク式によって求める⁷⁾。

以上によって雪面の融雪量が算定されるのだが、雪面で発生した融雪水は、直接土壤には到達せず、積雪層を流下することになる。この流下に伴う遅れ時間は、中津川⁸⁾が提案する1価線形貯留関数法を用いて考慮することにした。基礎式は次のとおりである。

$$s_s = k_s q_s, \quad \frac{ds_s}{dt} = q_m - q_s \quad (4)$$

$$k_s = k_{01}H_s + k_{02} \quad (5)$$

ここで、 s_s :積雪貯留量(mm)、 k_s :積雪の貯留係数、 q_m :融雪量(mm/h)、 q_s :土壤供給水量(mm/h)、 k_{01}, k_{02} :係数、 H_s :積雪深(cm)。式(4)において、積雪の貯留効果は貯留係数 k_s によって表現される。式(5)の係数 k_{01} と k_{02} は、中津川らの報告⁸⁾に基づき、 $k_{01}=0.16\text{h/cm}$ 、 $k_{02}=8.24\text{h}$ を用いた。なお、雨量の浸透に関しては、雨量が融雪量に比べて極めて多い場合があるため、式(4)で表わされる

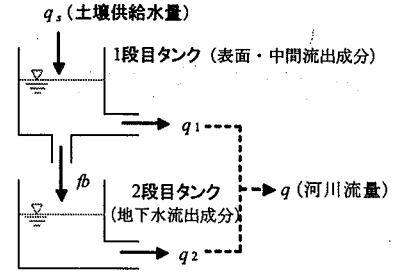


図-1 2段タンク型貯留関数モデル

ようなゆっくりとした流下形態とはならない場合がある。そこで、降雨の流下形態としては水路流下⁹⁾を仮定し、降雨は直接土壤に達するものとして扱った。

3. 融雪流出モデルの概要

融雪流出モデルには、次に示す2段タンク型貯留関数モデルを用いた(図-1)。

(表面・中間流出成分)

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ \frac{ds_1}{dt} = q_s - q_1 - f_b \\ f_b = k_{13}q_1 = (c_3 - 1)q_1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} p_1 = 0.6, & p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_1 A^{0.24}, & k_{12} = c_2 k_{11}^2 (\bar{q}_s)^{-0.2648} \end{cases} \quad (7)$$

(地下水流出成分)

$$s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt}, \quad \frac{ds_2}{dt} = f_b - q_2 \quad (8)$$

$$k_{21} = 0.0617c_4 A^{0.4}, \quad k_{22} = 0.4k_{21}^2 \quad (9)$$

ここで、 s_1 :1段目タンクの貯留高(mm)、 s_2 :2段目タンクの貯留高(mm)、 q_s :土壤供給水量(mm/h)、 q_1 :表面・中間流出成分の流出高(mm/h)、 q_2 :地下流出成分の流出高(mm/h)、 f_b :1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量(mm/h)、 $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$:貯留係数、 k_{13} :浸透係数、 p_1, p_2 :貯留指数、 A :流域面積(km²)、 $\bar{q}_s$:土壤供給水量の平均強度(mm/h)、 c_1, c_2, c_3, c_4 :モデル定数(未知定数)。

このモデルによって流出量を計算するには4個のモデル定数(c_1, c_2, c_3, c_4)が必要となる。モデル定数値の組み合わせは、流出予測を考えると一種類であることが望ましい。通常、モデル定数は出水毎に異なる値を取るため、複数の出水例からモデル定数の代表値を決めることが困難となる場合が多い。そこで本研究では、複数の出水事例からモデル定数を同定するのではなく、比較的大きな規模の一つの出水の最適値を探索することでモデル定数を定めることにした。加えて、融雪期全体のハイドログラフを再現し、モデル定数の代表性を検証する。次章で

は、流出モデル定数の最適値探索手法について詳述する。

4. モデル定数の最適化手法

(1) 融雪流出モデルの数値計算

1 段目タンクの計算にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) = \frac{dy_1}{dt} \quad (10)$$

式(6)と式(10)より、式(11)に示す非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \mathbf{F}_1(\mathbf{Y}_1) \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}_1 = [y_1 \quad y_2]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Y}_1) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 - \frac{c_3}{k_{12}} y_1^{\frac{p_1}{p_2}} + \frac{q_s}{k_{12}} \end{cases} \quad (14)$$

$$c_3 = 1 + k_{13} \quad (15)$$

ここで、T：転置記号。

あらかじめ与えられた $\mathbf{Y}_1^*$ のまわりで $\mathbf{F}_1(\mathbf{Y}_1)$ を 1 次の項までテーラー級数展開すると、式(11)は次のようになる。

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_1 + \mathbf{B}_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{\frac{p_1}{p_2}-2} (y_2^*) \\ \quad - \frac{c_3}{k_{12} p_2} (y_1^*)^{\frac{p_1}{p_2}-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (y_1^*)^{\frac{p_1}{p_2}-1} \end{cases} \quad (18)$$

$$b_2 = f_2(y_1^*, y_2^*) - a_1(y_1^*) - a_2(y_2^*) \quad (19)$$

さらに、式(16)は式(20)に示す差分方程式に変換できる。

$$\mathbf{Y}_{1,i+1} = \Phi \mathbf{Y}_{1,i} + \Gamma \mathbf{B}_{1,i} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{1,i} = [y_1 \quad y_2]^T, \quad \mathbf{B}_{1,i} = [0 \quad b_2]^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 i ：任意のタイム・ステップ。なお、 Φ 及び Γ は次の級数で与えられる。

$$\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 T + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1^2 T^2 + \frac{1}{6} \mathbf{A}_1^3 T^3 + \frac{1}{24} \mathbf{A}_1^4 T^4 \quad (22)$$

$$\Gamma = T \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 T + \frac{1}{6} \mathbf{A}_1^2 T^2 + \frac{1}{24} \mathbf{A}_1^3 T^3 \right) \quad (23)$$

ただし、 $\mathbf{I}$ ：単位行列、 T ：計算時間間隔 ($T < 1$)。

2 段目タンクについては、次の変数変換を行う。

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} = \frac{dy_3}{dt} \quad (24)$$

このとき、式(8)と式(24)より次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{dy_3}{dt} = f_3(y_3, y_4) = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = f_4(y_3, y_4) = -\frac{1}{k_{22}} y_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}} y_4 + \frac{f_b}{k_{22}} \end{cases} \quad (25)$$

行列で表わすと式(26)のとおりとなる。

$$\frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_2 \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$a_3 = -\frac{1}{k_{22}}, \quad a_4 = -\frac{k_{21}}{k_{22}}, \quad b_4 = \frac{f_b}{k_{22}} = \frac{k_{13}}{k_{22}} q_1 \quad (28)$$

なお、1 段目タンクから 2 段目タンクへの浸透供給量 f_b は既知量として扱う。式(26)の解法は、式(16)のそれに準ずれば良い。

全流出高 q は、式(10)第 1 式と式(24)第 1 式により次のように求まる。

$$q = q_1 + q_2 = y_1^{\frac{p_1}{p_2}} + y_3 \quad (29)$$

(2) モデル定数の最適化

4 個のモデル定数 (c_1, c_2, c_3, c_4) の最適化には Newton-Raphson 法を用いた。このとき、感度係数は以下に示すように、解析的に算定される。

a) 感度係数の算定

今、モデル定数が時間的に変化しないと仮定し、1 段目タンクに関する式(11)をモデル定数 k_{11}, k_{12}, c_3 で微分すると式(30)を得る。

$$\frac{d\mathbf{U}_1}{dt} = \mathbf{A}_3 \mathbf{U}_1 + \mathbf{D}_1 \quad (30)$$

$$\mathbf{U}_1 = \left[\frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \quad \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \quad \frac{\partial y_1}{\partial c_3} \quad \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \quad \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \quad \frac{\partial y_2}{\partial c_3} \right]^T \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{I} & \mathbf{a}_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{D}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T \quad (33)$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 \\ d_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \left(k_{11} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 + c_3 y_1^{\frac{1}{p_2}} - q_s \right) \\ d_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_3} = -\frac{1}{k_{12}} y_1^{\frac{1}{p_2}} \end{cases} \quad (34)$$

ただし、式(32)の $\mathbf{0}$ は (3×3) のゼロ行列、 $\mathbf{I}$ は (3×3) の単位行列、 $a_1 \mathbf{I}$ は対角要素が a_1 の (3×3) の行列、 $a_2 \mathbf{I}$ は対角要素が a_2 である (3×3) の行列を表わす。

1 段目タンクの流出高 q_1 に関する感度係数は、式(10)第1式より、次式で求められる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} y_1^{\frac{1}{p_2}-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} y_1^{\frac{1}{p_2}-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_3} = \frac{1}{p_2} y_1^{\frac{1}{p_2}-1} \frac{\partial y_1}{\partial c_3} \end{cases} \quad (35)$$

同様に、2 段目タンクに関しても、式(25)をモデル定数 $k_{11}, k_{12}, c_3, k_{21}$ で微分すると式(36)が得られる。

$$\frac{d\mathbf{U}_2}{dt} = \mathbf{A}_4 \mathbf{U}_2 + \mathbf{D}_2 \quad (36)$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} & \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} & \frac{\partial y_3}{\partial c_3} & \frac{\partial y_3}{\partial k_{21}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} & \frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} & \frac{\partial y_4}{\partial c_3} & \frac{\partial y_4}{\partial k_{21}} \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ a_3 \mathbf{I} & a_4 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7]^T \quad (39)$$

$$\begin{cases} d_4 = \frac{\partial f_4}{\partial k_{11}} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}}, \quad d_5 = \frac{\partial f_4}{\partial k_{12}} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \\ d_6 = \frac{\partial f_4}{\partial c_3} = \frac{1}{k_{22}} \left(q_1 + k_{13} \frac{\partial q_1}{\partial c_3} \right) \\ d_7 = \frac{\partial f_4}{\partial k_{21}} + \frac{\partial f_4}{\partial k_{22}} \frac{\partial k_{22}}{\partial k_{21}} \end{cases} \quad (40)$$

ただし、式(38)の $\mathbf{0}$ は (4×4) のゼロ行列、 $\mathbf{I}$ は (4×4) の単位行列、 $a_3 \mathbf{I}$ は対角要素が a_3 の (4×4) の行列、 $a_4 \mathbf{I}$ は対角要素が a_4 である (4×4) の行列を表わす。なお、式(30)と式(36)は式(16)と同形であり、計算にあたっては式(20)の解法に準拠すればよい。

式(40)の q_1 に関する微係数は式(35)で与えられる。また、 d_7 の右辺に含まれる微係数 $\partial f_4 / \partial k_{21}$ 、 $\partial f_4 / \partial k_{22}$ 及び $\partial k_{22} / \partial k_{21}$ は、式(25)と式(9)より次のように与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial f_4}{\partial k_{21}} = -\frac{1}{k_{22}} y_4, \quad \frac{\partial f_4}{\partial k_{22}} = \frac{1}{k_{22}^2} (y_3 + k_{21} y_4 - f_b) \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial k_{21}} = 0.8 k_{21} \end{cases} \quad (41)$$

流出高 q_2 に関する感度係数は、次のように算出される。

$$\frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} = \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial c_3} = \frac{\partial y_3}{\partial c_3}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial k_{21}} = \frac{\partial y_3}{\partial k_{21}} \quad (42)$$

全流出高 $q (= q_1 + q_2)$ に関する感度係数は、式(7)と式(9)を用いて次のように計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_1} = \frac{\partial k_{11}}{\partial c_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) = A^{0.24} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_2} = \frac{\partial k_{12}}{\partial c_2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \quad = k_{11}^2 (\bar{q}_s)^{-0.2648} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_3} = \frac{\partial q_1}{\partial c_3} + \frac{\partial q_2}{\partial c_3} \\ \frac{\partial q}{\partial c_4} = \frac{\partial q_2}{\partial k_{21}} \frac{\partial k_{21}}{\partial c_4} = 0.0617 A^{0.4} \frac{\partial q_2}{\partial k_{21}} \end{cases} \quad (43)$$

式(43)の最右辺における感度係数は式(35)と式(42)で既に与えられている。

b) Newton-Raphson 法によるモデル定数の最適化

モデル定数の最適化にあたっては、観測流出高 q_m^* と計算流出高 $q_m(\mathbf{K})$ との平均誤差二乗和 $J(\mathbf{K})$ が最小になるようにモデル定数ベクトル $\mathbf{K} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$ を同定する。すなわち、目的関数 $J(\mathbf{K})$ を次式で定義する。

$$J(\mathbf{K}) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{e_m(\mathbf{K})\}^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{q_m^* - q_m(\mathbf{K})\}^2 \quad (44)$$

ここで、 m : データ番号、 N : データ数。

今、モデル定数ベクトル $\mathbf{K}$ を $\Delta \mathbf{K} (= [\Delta c_1 \ \Delta c_2 \ \Delta c_3 \ \Delta c_4]^T)$ だけ変化させることを考える。このとき、誤差 $e_m(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K})$ をモデル定数 $\mathbf{K}$ のまわりで1次の項までテーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) = e_m(\mathbf{K}) + \sum_{j=1}^4 \left\{ \Delta c_j \frac{\partial e_m(\mathbf{K})}{\partial c_j} \right\} \quad (45)$$

なお、式(45)の誤差 $e_m(\mathbf{K})$ に関する感度係数は、式(44)より次式で計算される。

$$\frac{\partial e_m(\mathbf{K})}{\partial c_j} = -\frac{\partial q_m(\mathbf{K})}{\partial c_j} = -w_{jm} \quad (46)$$

式(45)及び式(46)を式(44)に代入すると、次式を得る。

$$J(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ e_m(\mathbf{K}) - \sum_{j=1}^4 (\Delta c_j w_{jm}) \right\}^2 \quad (47)$$

式(47)が最小となる条件 $(\partial J(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) / \partial (\Delta \mathbf{K}) = 0)$ から、式(47)を $\Delta \mathbf{K}$ で微分し整理すると、ベクトル $\Delta \mathbf{K}$ は式(48)で与えられる。

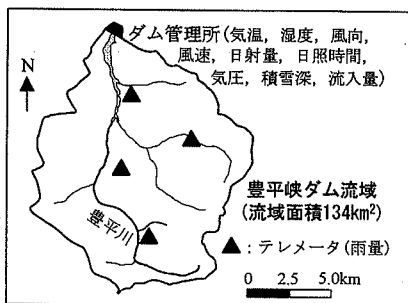


図-2 解析対象流域(豊平峡ダム)

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V} \quad (48)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [w_1^2] & [w_1 w_2] & [w_1 w_3] & [w_1 w_4] \\ [w_2 w_1] & [w_2^2] & [w_2 w_3] & [w_2 w_4] \\ [w_3 w_1] & [w_3 w_2] & [w_3^2] & [w_3 w_4] \\ [w_4 w_1] & [w_4 w_2] & [w_4 w_3] & [w_4^2] \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{V} = [[ew_1] \quad [ew_2] \quad [ew_3] \quad [ew_4]]^T \quad (50)$$

ここで,

$$\begin{cases} [w_i w_j] = \sum_{m=1}^N (w_{im} w_{jm}) & (i, j = 1, 2, 3, 4) \\ [ew_i] = \sum_{m=1}^N (e_m w_{im}) & (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \quad (51)$$

なお、行列 $\mathbf{W}$ は対称行列である。上記で得られた $\Delta \mathbf{K}$ によってモデル定数ベクトル $\mathbf{K}$ を更新し、この処理を繰り返すことによって目的関数 $J(\mathbf{K})$ が最も小さくなる $\mathbf{K}$ が求まる。なお、本研究では、 $|\Delta \mathbf{K} / \mathbf{K}| < 0.001$ になった時点でモデル定数が収束したものと判断して、繰り返し計算を終了させた。なお、繰り返し計算過程での式(48)の効率的解法には成分回帰分析法を用いた¹¹⁾。

5. 実流域への適用とモデル定数の代表性

前章で述べた2段タンク型貯留関数モデルを、図-2に示す札幌市の豊平峡ダム流域(流域面積: 134km²)に適用し、最適化手法の検証および最適モデル定数の代表性を検討する。

training data には、2000年5月12日～14日の出水事例を用いた。この3日間の総雨量は117mm、総融雪量は79mm、ピーク流量は300.30m³/s、ピーク比流量は2.24m³/s/km²である。このtraining dataを用いて、最適値を探索した結果を表-1に示す。表には4個のモデル定数(c_1, c_2, c_3, c_4)と目的関数 $J(\mathbf{K})$ の値を、繰り返し計算毎に示した。表によれば、10回の繰り返し計算によって、モデル定数は収束している。この収束したモデル定数を用いて、training data を再現した結果が図-3である。この図から、最適化によって得られたモデル定数は、training data を良好に再現していることが分かる。以上の結果、前章で示した最適化手法は、モデル定数を同

表-1 流出モデル定数の探索過程

No	c_1	c_2	c_3	c_4	$J(\mathbf{K})$
1	5.0000	0.1500	1.5000	100.0000	0.225
2	5.8240	0.1186	1.4001	84.0916	0.085
3	6.4839	0.0812	1.3267	71.0002	0.040
4	6.6233	0.0622	1.3194	64.2785	0.035
5	6.4925	0.0641	1.3392	61.3444	0.035
6	6.4131	0.0690	1.3501	60.2293	0.035
7	6.3948	0.0707	1.3526	59.8259	0.035
8	6.3912	0.0710	1.3531	59.6994	0.035
9	6.3895	0.0710	1.3534	59.6578	0.035
10	6.3884	0.0711	1.3535	59.6427	0.035

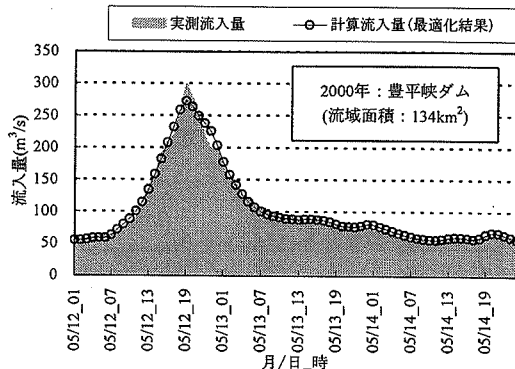


図-3 最適流出モデル定数による再現ハイドログラフ

定するのに有効であることが検証された。

次に、前記で求めたモデル定数の代表性を確認するため、training data の最適モデル定数を用いて複数年のハイドログラフを再現した。checking data としたのは、1996年から2000年における各年の4月から6月までのハイドログラフである。その再現結果を図-4に示す。図によれば、5カ年の計算ハイドログラフは、短期的な出水を見逃さず、かつ、その規模も的確に再現していることから、実用上十分な精度を持つことが確認された。加えて、融雪期全体の長期的な流出形態をも良好に再現されている。なお、図-4に示される2000年洪水は、3個のピークを持つ最大出水例である。図-3のtraining dataは、第3番目のピークを含むハイドログラフに対応している。表-1で得られたモデル定数最適値は、1・2番目のピークを良好に再現していることが分かる。図-5には1996年から2000年における実測・計算流入量の時系列を比較して示した。また、表-2には式(52)で求めた平均2乗誤差の平方根(RMSE)をまとめた。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{oi} - q_{ci})^2} \quad (52)$$

ここで、 q_{oi} : 観測流入量(m³/s)、 q_{ci} : 計算流入量(m³/s)、 N : データ数。

いずれの図表とも、計算流入量が十分な精度で実測ハイドログラフを再現していることを示している。以上の結果、一つのtraining data で決めたモデル定数であっても、流域を代表し得る流出モデル定数が得られることが分かった。

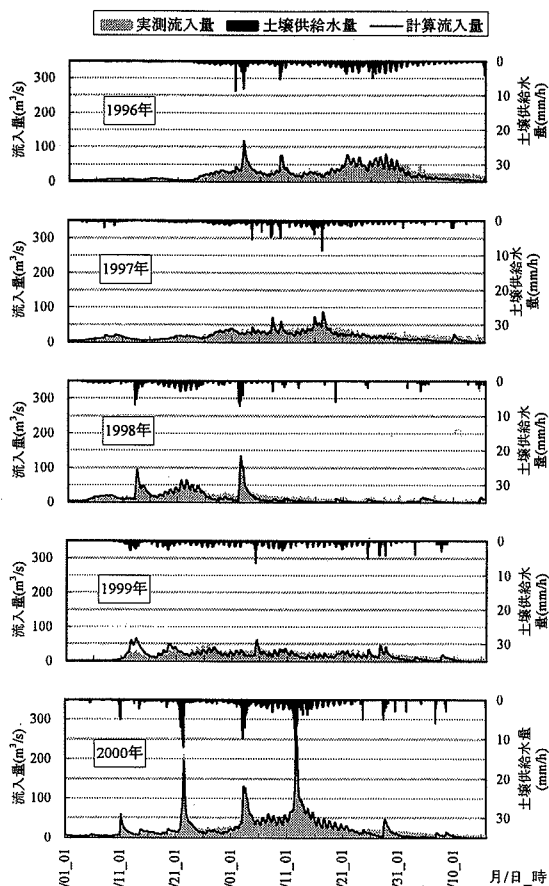


図-4 融雪期ハイドログラフの再現結果
(豊平峡ダム：流域面積 134km²)

6. まとめ

本研究で得られた結果をまとめると、次のとおりである。

- 1) 2 段タンク型貯留関数モデルの 4 個の未知定数を、Newton-Raphson 法によって、客観的に最適化する手法を導出した。また、このとき必要になる感度係数を解析的に算定するアルゴリズムを提案した。この手法を洪水ハイドログラフに適用した結果、モデル定数の探索を客観的かつ効率的に行うことができた。
- 2) 1) によって得られたモデル定数を用いて全融雪期間のハイドログラフを再現した。その結果、わずか一つの training data で同定したモデル定数であっても、checking data は実用上十分な精度で再現されていることが分かった。その結果、少ない出水事例数であっても流域を代表し得るモデル定数が同定されることから、融雪期の流出解析・流出予測を行う上で大きなメリットと言える。

本論文で提案した 2 段タンク型貯留関数モデルは、通常用いられている菅原のタンクモデルに比べて、構造式が簡易であり、しかもモデル定数の最適化が比較的容易である。従って、提案モデルは融雪期間を有する河川流

表 2 平均 2 乗誤差の平方根(RMSE)：単位 m³/s

1996 年	1997 年	1998 年	1999 年	2000 年
8.91	6.33	7.57	8.98	7.24

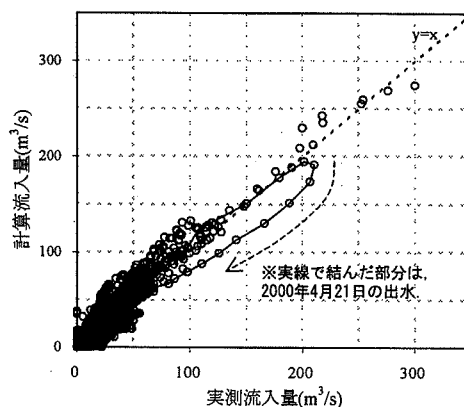


図-5 実測・計算流入量の時系列比較(1996 年～2000 年)

域への汎用性が高いと言える。今後は、提案モデルを多くの流域に適用して、その有効性を検証していきたい。

謝辞：本研究の一部は、国土交通省北海道開発局受託研究費によって実施したものである。ここに記して謝意を表わす。

参考文献

- 1) 臼谷友秀, 中津川誠: 北海道における冬期温暖化の傾向と水循環へ与える影響, 地球環境シンポジウム論文集, 第 13 回, pp. 1-6, 2005.
- 2) 中津川誠, 星 清: 融雪期に豪雨が相俟って生起する出水の予測について, 河川技術論文集, 第 7 回, pp. 453-458, 2001.
- 3) 角屋睦, 田中丸治哉: 長短期流出両用モデルによる実時間洪水予測, 農業土木学会論文集, No. 177, pp. 31-41, 1995.
- 4) 角屋睦, 永井明博: 流出解析手法(その 12)ータンクモデルと SP 法による最適同定ー, 農業土木学会誌, No. 48(12), pp. 935-943, 1993.
- 5) 田中丸治哉: 遺伝的アルゴリズムによるタンクモデル定数の同定, 京都大学防災研究所年報, 第 36 号(B-2), pp. 231-239, 1993.
- 6) Kondo, J. and Yamazaki, T.: A prediction model for snowmelt, snow surface temperature and freezing depth using a heat balance method, *J. Appl. Meteor.*, vol. 29, pp. 375-384, 1990.
- 7) 近藤純正: 水環境の気象学, 朝倉書店, 337p., 1994.
- 8) 中津川誠, 工藤啓介, 星 清: 積雪貯留を考慮した汎用的な融雪流出解析, 水工学論文集, 第 48 回, pp. 37-42, 2004.
- 9) 吉田順五: 融雪水の積雪内浸透, 低温科学 物理篇, 23, pp. 1-16, 1965.
- 10) 馬場仁志, 星 清, 藤田睦博: 蒸発散及び浸透を組み合わせた二段貯留関数型流出モデルの開発, 水文・水資源学会誌, Vol. 14, No. 5, pp. 364-375, 2001.
- 11) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行: 単一流域を対象とした貯留関数法の精度比較, 189p., 2002.

(2006. 4. 6 受付)