サンクコストと治水経済評価：リアルオプションアプローチ
SUNK COST AND ECONOMIC VALUATION OF FLOOD MITIGATION : REAL OPTION APPROACH

小林潔司[1]・横松宗太[2]・織田澤利守[3]
Kiyoshi KOBAYASHI, Muneta YOKOMATSU and Toshimori OTAZAWA

[1]正会員　工博　京都大学教授　大学院工学研究科土木工学専攻(〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)
[2]正会員　工修　鳥取大学助手　工学部社会開発システム工学科 (〒 680-0945 鳥取市湖山町南4丁目101)
[3]学生会員　京都大学大学院工学研究科土木工学専攻(〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

The calculation of expected-losses-reduction, adopted in practices of cost-benefit analysis of flood mitigation investment, is fundamentally based upon now-or-never principle, and fails to assess the flexibility of decision making in future. The real option approach has great advantage in assessing the economic values of option availability that the flood mitigation project creates. The paper presents a real option model to determine the optimal multi-staged timing for flood mitigation investment, and develops an extended framework of economic valuation of flood mitigation project. The methods presented in the paper can evaluate the value of the possibility of facility extension and the value of information by selecting the optimal implementation timing.

Key Words : *flood mitigation, multi-stage investment, real options approach*

1．はじめに

伝統的な費用便益分析では，対象とする社会基盤施設が整備された時 (with-case) とそうでない場合 (without-case) における純便益の現在価値を比較し，プロジェクトの経済効率性を評価する．このような費用便益分析は，経済評価に対して暗黙のうちにいくつかの強い前提条件を設けている．すなわち，1）プロジェクトの不可逆性を考慮しない，2）プロジェクトを「現在行うか，あるいは二度と行わないか」という二者択一の問題として評価する「now-or-never」原則に基づいている[1]．

大規模な社会資本整備はサンクコスト（埋没費用）を伴う．たとえば，治水事業を中止する際に，治水施設を転売・転用することにより事業に投下した費用を回収して整備前の状態に戻ることはできない．一方，費用便益分析では過去の社会資本の整備費用は既にサンクしていると考え，追加的な社会資本整備のための費用便益分析において追加的な整備がもたらす便益と費用のみが考慮される．その結果，ともすれば社会資本が蓄積された地域における追加的投資がより正当化されやすくなる可能性を否定できない．

費用便益分析では現時点でプロジェクトが実施されることを前提としてプロジェクト便益と費用を評価する．しかし，すべてのプロジェクトが現時点で直ちに実施できるわけではない．プロジェクトの実施に遅延が生じ，多くの社会的損失が生まれている場合も少なくない．プロジェクトが長期間にわたり，将来において生じる便益に大きな不確実性が存在する場合，プロジェクトの実施時期に関する議論が重要となる．

流域一貫した堤防施設が完成するまでには長期にわたる事業が必要となる．堤防施設はすべての区間の整備が完了した時点で，はじめて効果的に水害リスクを軽減できる．一部の区間で堤防を整備しても，その効果は限定的にならざるを得ない．現時点での投資費用はサンクし，将来時点に必要となる事業量は確実に減少する．将来時点で上流域での堤防を整備するために下流域での堤防整備が急がれることもある．

長期的な視点で段階的に整備される大規模事業では，整備がもたらす不可逆的な変化や整備の緊急度を評価しうる経済評価の方法が望まれる．本研究では，real option approach を用いた治水事業の段階的整備のための経済評価方法を提案する．２．では real option の基本的な考え方を示す．３．では最適堤防整備モデルを定式化し，４．で治水便益の経済評価方法を提案する．

2．本研究の基本的な考え方

（1）従来の研究概要

不確実性における経済便益評価に関しては膨大な理論的・実証的な研究蓄積がある．それらの研究系譜に関しては，すでに上田[2]，多々納[3]等が詳細に検討している．環境経済学の分野では開発の不可逆性を考慮した戦略決定に関する研究が進んだ[4]．Arrow and Fisherら[5]は将来における選択の可能性が留保される価値を準option価値として定義した．その後，準option価値は将来時点での選択の多様性を保証する選択肢を現時点において選択した場合に生じる情報価値と等価であることが示された[6]．real option理論[1),7)]は金融のoption理論を実物資産に関する意思決定問題に拡張したものである．optionとは将来において何らかの行動をとる権利である．たとえば，call optionの所有者は定められた期間にわたり，ある価値をもった資産を行使価格で購入できる権利を持つ．optionの行使は不可逆性を有し，一度行使すればoptionは復活できない．Dixit and Pindyckはプロジェクトの投資機会をcall optionと捉えることにより，便益の不確実性や投資の不可逆性を考慮した意思決定ができることを示した[7]．不確実性下での投資では，将来のリスクに効果的に対処するため多くのoptionを残しておくことが重要である．real option理論は，将来時点で利用可能なoptionの経済価値を評価する．将来に多様な展開を可能とするoptionは大きな価値が与えられる．逆に，柔軟性を減少させるようなoptionは低く評価される．不確実性下における経済評価で用いられる準option価値は，現在投資することを留保することによって得られる情報価値を意味しており1つのreal optionである．real option理論により，準option価値だけでなく多様なoptionの価値を評価することが可能となる．

（2）問題設定

real option approachの重要性を考えるために簡単な例題を考えてみよう．ある河川において上流と下流の2つの区間に堤防施設の高度化が必要とされている．技術的な制約により，堤防は下流域から順に整備する必要があるが2つを同時に整備できない．上流域で破堤すれば流域全体にわたって甚大な被害をもたらす．流域全体にわたって堤防整備が完了した段階で，効果的に水害を防止することができる．さらに，将来時点において流域が発展するかどうかが不確実であるとしよう．水害リスクは産業立地に影響を及ぼさないと考える．将来，流域人口が減少するリスクがあるため，現時点で堤防施設の高度化を図ることが効果的かどうかが不確実である．このような状況の下で，下流域の堤防を整備する経済効果を費用便益分析を用いて評価する問題を考えよう．費用便益分析では，現時点で下流域の堤防を整備すれば期待被害額がどの程度軽減できるかが計測される．この時，2つの問題が生じる．第1に，下流域の堤防整備が上流域の堤防整備の前提条件になっていることが費用便益分析で考慮されないことである．下流域の堤防の経済評価において，将来上流域の堤防整備を行う可能性を確保できるという便益を考慮する必要がある．第2に，現時点において下流域の堤防を整備することが最適かどうかが分からない点である．堤防整備の時期を遅らせて，流域の発展動向を観察した方が望ましい場合もあるだろう．下流域の堤防整備が遅れており，すぐにでも堤防整備が必要かもしれない．このように堤防整備に最適な実施時期が存在する可能性がある．「now-or-never」原則に基づく費用便益分析では最適実施時刻を考慮できない．

（3）Real Optionと経済評価

以上の例題では，下流域の堤防整備は期待被害額の減少という直接的な効果だけでなく，2つのoptionをもたらしていることが理解できる．1つは下流域の堤防を整備することにより，上流域の堤防を整備できるというoption（発展可能性option）であり，いま1つは経済動向を勘案しながら堤防の実施時期を最適に決定できるというoption（最適実施時刻option）である．伝統的な費用便益分析では，下流域の堤防の効果のみに着目し，それを現時点で整備するかどうかのみを検討するという非常に限定された意思決定問題を考えている．それに対して，real option approachでは直接的便益だけでなく，プロジェクトがもたらす様々なoptionを考え，その経済価値を積極的に評価しようと考える立場に立つ．real option approachは多くのoptionを同時に考慮でき，より望ましい政策決定が可能となる．以下では発展可能性option，最適実施時刻optionを考慮した堤防整備問題を定式化する．

3．段階的治水投資問題のモデル化

（1）モデル化の前提

記述の簡便化を図るためにモデルを可能な限り単純化しよう．堤防全体がn個の区間i $(i=1,\cdots,n)$で構成され，最下流から番号順に上流に向かって整備される．堤防の総延長はnであり各区間の延長は1である．堤防が完成した場合，水害は一切生じない．堤防の未整備区間のみにおいて水害が発生する危険性がある．水害が発生した区間と流域における資産ストックと対応して水害の規模が一意的に決定される．流域において生じる被害率（被害額/総資産額）は，破堤した区間に

対応して一意的に定まる．堤防の力学的劣化は生じない．治水計画者は無限の計画視野を持ち，期待被害額と堤防整備費用の双方を考慮にいれた期待総費用の現在価値を最小にするように段階的に堤防を整備する．以上の仮定は記述を簡単にするために便宜的に設けたものであり本質的なものではない．現実的な議論を行うためにはモデルを修正する必要があるが，このような修正を行ってもモデルの基本的な構造は変化しない．

（2）水害生起確率の定式化

時刻t $(\geq\ 0)$における堤防の整備状況を状態変数$s(t)=i\ (t\geq 0; n\geq i\geq 0)$を用いて表そう．$s(t)=i$は時刻$t$で下流から$i$区間まで堤防整備が完了していることを表す．初期時点では$s(0)=0$である．時刻tにおける対象流域の資産ストックを$K(t)$と表そう．堤防未整備区間$j\ (n\geq j>i)$が破堤した場合の被害額$L(j,t)$を

$$L(j,t)=\psi(j)K(t) \tag{1}$$

と表す．$\psi(j)\ (0\leq\psi(j)\leq 1)$は区間$j$が破堤した場合の被害率である．堤防の整備状況が$i\ (n>i\geq 0)$の場合，水害が平均到着率$\pi(i)$で対象流域にポアソン到着すると仮定する．ただし，$\pi(0)=\pi_0$，$\pi(n)=0$である．$\pi_0$は堤防がまったく未整備の段階における水害到着率である．堤防整備が完了すれば水害は到着せず$\pi(n)=0$が成立する．時刻tに$s(t)=i\ (n>i\geq 0)$であり，水害発生時に堤防未整備区間jが破堤する条件付き確率を$\eta(j|i)$により表現する．ただし，$\sum_{j=i+1}^{n}\eta(j|i)=1$が成立する．水害時に未整備区間が破堤する確率は等しく$\eta(j|i)=1/(n-i)$が成立する．時刻tにおける期待被害額$D_i(K(t))$は次式で表せる．

$$D_i(K(t))=\pi(i)\sum_{j=i+1}^{n}\eta(j|i)L(j,t) \tag{2}$$

（3）資産蓄積過程の定式化

堤防整備が完了するにまでに相当の時間を有する．その間，流域の資産水準が変化する．初期時点における流域の物的資産の総ストックを$K(0)$と表そう．長期にわたる資産の蓄積過程を確定的に予測することは不可能であり総資産が幾何ブラウン過程

$$dK(t)=\mu Kdt+\sigma KdW(t) \tag{3}$$

に従って変化すると考える．ここに，μdtはトレンドを表すドリフト項，$W(t)$は標準ウィナー過程であり，

1) $W(t)$は連続であり$W(0)=0$である．
2) $W(t)$は正規分布$N(0,t)$に従う．
3) 増分$W(t+s)-W(t)$は生起分布$N(0,s)$に従い，時刻tまでの$W(t')$の履歴とは独立である．

という3つの性質を満足する[8]．初期時点からみた$S(t)=\ln K(t)$の期待値及び分散は以下の大きさになる．

$$E[S(t)|S(0)]=S(0)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t \tag{4}$$

$$Var[S(t)]=\sigma^2 t \tag{5}$$

tが大きいほど資産ストックの不確実性は大きくなる．

（4）最適整備時刻決定モデル

ある時刻tにおいて$s(t)=i$であり，第$i+1$区間の最適整備時刻を求める問題（以下，i期問題と呼ぶ）を考えよう．時刻t以降，毎期観測される$\bar{K}(\tau)\ (\tau>t)$の水準に対応して最適な治水政策$s^*(\tau)$が採用されると考えよう．時刻tにおいて$(s(t),K(t))=(i,\bar{K})$であり，かつ時刻t以降において最適な治水政策を採用することにより達成可能な期待総費用の最小値（当該期価値）を$V_i(\bar{K})$により表そう．この時，i期問題は

$$V_i(\bar{K})=\min_{\theta_{i+1}}E\Big[\int_t^{\theta_{i+1}}\big\{D_i(K(\tau))\exp\{-\rho(\tau-t)\}d\tau$$
$$+\big\{V_{i+1}(K(\theta_{i+1}))+c\big\}\exp\{-\rho(\theta_{i+1}-t)\}\Big] \tag{6}$$

subject to

$$dK(\tau)=\mu Kd(\tau-t)+\sigma KdW(\tau-t)\ (\tau\geq t) \tag{7}$$

$$K(t)=\bar{K} \tag{8}$$

と表すことができる．ここに，ρは割引率，cは堤防整備費用，$V_{i+1}(K(\theta_{i+1}))$は第$i+1$区間の堤防整備が完了した時刻における期待総最小費用である．当面の間，関数$V_{i+1}(K(\theta_{i+1}))$の形式を与件として議論を進める．第$i+1$区間の最適実施時刻θ_{i+1}は資産蓄積過程(7)のサンプルパスごとに定義される確率変数である．式(6)における記号$E[\cdot]$はi期問題の終了時刻θ_{i+1}に関する期待値操作を表す．すなわち，第i期問題は第i期の残された期間に生じる期待被害額と第i期の終端時点で生じる終端費用（第$i+1$期以降に生じる期待総最小費用）の現在価値の総和を最小化する問題として定式化できる．ここで，上記の再帰方程式には，費用cの全部ないし一部を回収して状態$i-1$に戻る可能性は考慮されていない．上式は状態$(i,\bar{K})$を評価する最適値関数$V_i(\bar{K})$において，状態iに至るまでに投下されたコストが既にサンクしていることを示している．

（5）最適インパルス制御

i期問題の最適値関数$V_i(\bar{K})$を具体的に導出しよう．最終区間nに着目する．時刻$\bar{\theta}_n$で$s(t)=n$となり，その時の資産ストックが$K(\theta_n)=\bar{K}_n$であるとしよう．時刻$t>\theta_n$では堤防整備費用はすでにサンクしている．堤防全区間が整備完了すれば水害が発生しないため$V_n(\bar{K}_n)=0$が成立する．つぎに，$i\ (n>i\geq 0)$期問題を考えよう．第i期の任意の時刻$t\in[\theta_i,\theta_{i+1})$における資産ストックの観測値を$\bar{K}$と表す．仮に，時刻$t$で

$i+1$区間を整備すれば第i期の終端費用$V_{i+1}(\bar{K})+c$が発生する．いま，$V_i(\bar{K})$が資産ストック$\bar{K}$の下で発生する期待総費用の最小値を表していることより，

$$V_i(\bar{K}) - \{V_{i+1}(\bar{K})+c\} \leq 0 \tag{9}$$

が成立する．時刻tにおいて堤防整備を実施することが最適なのは，最適値関数$V_i(\bar{K})$と$V_{i+1}(\bar{K})$の間に

$$V_i(\bar{K}) = V_{i+1}(\bar{K})+c \tag{10}$$

が成立する時，その時のみである．式(9)が不等式で成立する場合，堤防整備は実施されない．

つぎに，時刻tにおいて$s(t)=i$のまま堤防整備を見送り，微少区間$[t,t+dt]$が経過したとしよう．時刻$t+dt$の資産ストックを$K(t+dt)$で表そう．時点$t+dt$以降，最適インパルス制御を実施した場合，時刻$t+dt$時点で評価した最適値関数は$V_i(K(t+dt))$と表される．この時，時刻tで評価した期待総費用の現在価値は微少区間$[t,t+dt]$に生じる期待費用の現在価値と時刻$t+dt$以降に発生する期待総費用の現在価値の和で表せる．$[t,t+dt]$において堤防整備を見送ったことにより得られる期待費用の現在価値$V_i^{\circ}(\bar{K})$は次式で表される．

$$V_i^{\circ}(\bar{K}) = E\Big[\int_t^{t+dt} D_i(K(\tau))\exp\{-\rho(\tau-t)\}d\tau + V_i(K(t+dt))\exp(-\rho dt)\Big] \tag{11}$$

期待値は$K(t+dt)$に関して定義される．$V_i(\bar{K})$は時刻tにおける期待総便益の最小値であるので，一般に

$$V_i(\bar{K}) \leq V_i^{\circ}(\bar{K}) \tag{12}$$

が成立する．いま，$V_i(K(t+dt))$を$\bar{K}$の近傍でTaylor展開し，伊藤のレンマを適用すると（**付録I参照**），

$$E\Big[V_i(K(t+dt))|\bar{K}\Big] = V_i + \mu\bar{K}\frac{dV_i}{dK}dt + \frac{\sigma^2}{2}\bar{K}^2\frac{d^2V_i}{dK^2}dt + o(dt) \tag{13}$$

ただし$o(dt)$は高次の微小項である．よって式(12)は，

$$V_i(\bar{K}) \leq D_i(\bar{K})dt + \exp(-\rho dt)\Big[V_i(\bar{K}) + \mu\bar{K}\frac{dV_i}{dK}dt + \frac{\sigma^2}{2}\bar{K}^2\frac{d^2V_i}{dK^2}dt\Big] + o(dt) \tag{14}$$

となる．両辺をdtで割り$\lim_{dt\to 0}$の極限をとると，

$$\Psi V_i(\bar{K}) + D_i(\bar{K}) \geq 0 \tag{15}$$

となる（**付録I参照**）．ここで，Ψは微分演算子であり

$$\Psi = \mu K\frac{d}{dK} + \frac{\sigma^2}{2}K^2\frac{d^2}{dK^2} - \rho \tag{16}$$

である．時刻tでプロジェクトを見送ることが最適であれば，式(15)が等号で成立する．一方，プロジェクトを実施することが最適であれば，$V_i^{\circ}(\bar{K})$は$V_i(\bar{K})$より大きい値をとる．最適プロジェクト過程では不等式(9),(15)の内，どちらか一方が必ず等式で成り立つ．最適プロジェクト実施戦略の最適条件を準変分不等式

$$\min\{\Psi V_i(\bar{K}) + D_i(\bar{K}), V_{i+1}(\bar{K}) + c - V_i(\bar{K})\} = 0 \tag{17}$$

により表現することができる．

（6）最適化条件

第i期の問題に着目しよう．最適値関数V_iの形式が既知であると仮定する．継続集合$\mathcal{C}_i$を次式で定義する．

$$\mathcal{C}_i = \big\{K|V_{i-1}(K) \leq V_i(K) < V_{i+1}(K)+c\big\} \tag{18}$$

継続集合$\mathcal{C}_i$はプロジェクトを見送ることが最適となる資産ストック集合である．$V_i(K)$の単調性より

$$\mathcal{C}_i = \{K|K_i^* \leq K < K_{i+1}^*\} \tag{19}$$

と定義できる．資産ストックが臨界水準K_{i+1}^*より大きい場合プロジェクトを直ちに実施することが最適となる．時刻tにおいて資産ストック$\bar{K}$を観測した場合，第$i+1$区間の整備戦略は次式のようになる．

$$\mathcal{F}_i = \begin{cases} \text{直ちに整備する} & \bar{K} \geq K_{i+1}^* \\ \text{整備を見送る} & \bar{K} < K_{i+1}^* \end{cases}$$

資産ストックが臨界水準K_{i+1}^*にはじめて到達する時刻が$i+1$区間の最適整備時刻となる．資産ストックが継続集合$\mathcal{C}_i$の内部にある場合，

$$\Psi V_i(K) + D_i(K) = 0 \tag{20}$$

が成立する．式(17)は通常のsmooth pasting条件の下における自由境界値問題の解法により解くことができる．境界値条件としてValue matching条件

$$V_i(K_{i+1}^*) = V_{i+1}(K_{i+1}^*) + c \tag{21}$$

が成立しなければならない．さらに，臨界資産ストックK_{i+1}^*において2つの最適値関数$V_i(K)$と$V_{i+1}(K)$が$K=K_{i+1}^*$において滑らかに接続していなければならない．すなわち，smooth pasting条件

$$\frac{dV_i(K_{i+1}^*)}{dK} = \frac{dV_{i+1}(K_{i+1}^*)}{dK} \tag{22}$$

が成立しなければならない．したがって，プロジェクトの最適実施戦略は境界条件(21), (22)のもとで常微分方程式(20)を解くことにより，最適値関数$V_i(K)$と臨界資産ストックK_{i+1}^*を求める問題に帰着する．

（7）最適実施戦略の導出

非斉次微分方程式(20)に対応する斉次微分方程式は

$$\mu K\frac{dV_i}{dK} + \frac{\sigma^2}{2}K^2\frac{d^2V_i}{dK^2} - \rho V_i = 0 \tag{23}$$

と表される．ここで，$D_i(K)=\lambda_i K$と特定化しよう．ただし，$\lambda_i = \pi(i)\sum_{j=i+1}^{n}\eta(j|i)\psi(j)$である．この常微分方程式の一般解を$V_i(K)=\alpha_i K^{\beta}$と仮定しよう．式(23)に代入することにより以下の2次方程式を得る．

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \mu\beta - \rho = 0 \tag{24}$$

上式は以下の２つの実根$\beta_1(>0), \beta_2(<0)$をもつ．

$$\beta_1, \beta_2 = \frac{f \pm \sqrt{f^2 + 8\rho\sigma^2}}{2\sigma^2} \tag{25}$$

ただし，$f = \sigma^2 - 2\mu$である．非斉次微分方程式$\Psi V_i(K) + D_i(K) = 0$の特殊解を$\kappa_i K$と仮定する．特殊解を非斉次微分方程式に代入することにより次の関係を得る．

$$\kappa_i = \frac{\lambda_i}{\mu - \rho} \tag{26}$$

$\kappa_i > 0$が成立するためには$\mu > \rho$が満たされていなければならない．最適値関数の一般形を

$$V_i(K) = \alpha_{1i} K^{\beta_1} + \alpha_{2i} K^{\beta_2} + \kappa_i K \tag{27}$$

と表せる．α_{1i}，α_{2i}は未知パラメータである．最適値関数がKに関する増加関数であり，$\lim_{K \to 0} V_i(K) = 0$が成立するためには$\alpha_{2i} = 0$でなければならない．同様にして，すべての$i$ $(n > i \geq 0)$ 期整備問題に対して最適値関数$V_i(K)$の一般形(27)を定義することができる．未知数はα_{1i} $(i = 0, \cdots, n-1)$，K^*_{i+1} $(i = 1, \cdots, n)$の合計$2n$個ある．初期値K_0は外生変数である．境界条件(21),(22)は各i $(i = 0, \cdots, n-1)$に対して２個ずつ合計$2n$個存在する．α_{1i}, K^*_{i+1}は非線形連立方程式

$$\alpha_{1i} K^{\beta_1}_{i+1} + \kappa_i K_{i+1} = \alpha_{1,i+1} K^{\beta_1}_{i+1} + \kappa_{i+1} K_{i+1} + c \ (i = 0, \cdots, n-2) \tag{28}$$

$$\alpha_{1i} \beta_1 K^{\beta_1 - 1}_{i+1} + \kappa_i = \alpha_{1,i+1} \beta_1 K^{\beta_1 - 1}_{i+1} + \kappa_{i+1} \ (i = 0, \cdots, n-2) \tag{29}$$

$$\alpha_{1,n-1} K^{\beta_1}_n + \kappa_{n-1} K_n = c \tag{30}$$

$$\alpha_{1,n-1} \beta_1 K^{\beta_1 - 1}_n + \kappa_{n-1} = 0 \tag{31}$$

を解くことにより求めることができる．

4．Real Optionと経済評価

初期時点$t = 0$において堤防整備を行うか否かを意思決定する問題（0期問題）を考える．以下の議論は任意の時刻においても同様の議論を展開できる．まず，費用便益分析の枠組みでプロジェクト便益を評価しよう．初期時点において，１）堤防を整備しない，２）第１区間の堤防を整備するという２つのシナリオの下で達成される期待総費用$\overline{V}_0(K_0), \overline{V}_1(K_0)$を

$$\overline{V}_0(K_0) = E\left[\int_0^\infty D_0(K(t)) \exp\{-\rho t\} dt\right] \tag{32}$$

$$\overline{V}_1(K_0) = E\left[\int_0^\infty D_1(K(t)) \exp\{-\rho t\} dt\right] \tag{33}$$

と定義する．費用便益分析により第１区間の整備が正当化されるためには次式が成立する必要がある．

$$\overline{\Delta}_0(K_0) = \overline{V}_0(K_0) - \overline{V}_1(K_0) - c \geq 0 \tag{34}$$

ただし，$\overline{\Delta}_0(K_0)$は純便益である．

real option approachによる経済評価を行うために初期時点における最適値関数を定義しよう．初期時点で第１区間を整備しない場合，最適値関数は

$$V^*_0(K_0) = E_{\theta_1}\Big[\int_0^{\theta^*_1} \{D_0(K(t)) \exp(-\rho t) dt + \big\{V^*_1(K(\theta^*_1)) + c\big\} \exp\{-\rho\theta^*_1\}\Big] \tag{35}$$

と表される．記号$E_{\theta_1}[\cdot]$は第０期のサンプル経路$K(t)$およびθ^*_1に関する期待値操作である．最適値関数V^*_0, V^*_1, $\bar{K}^*$は最適整備時刻決定モデルの解を用いている．つぎに，初期時点で第１区間を整備し，その後最適実施戦略を採用した場合を考える．初期時点で評価した期待総費用の現在価値$V^*_1(K_0)$は

$$V^*_1(K_0) = E_{\theta_2}\Big[\int_0^{\theta^*_2} \{D_1(K(t)) \exp(-\rho t) dt + \big\{V^*_2(K(\theta^*_2)) + c\big\} \exp\{-\rho\theta^*_2\}\Big] \tag{36}$$

と表される．初期時点における投資が最適であるためには，第０期の問題において，初期時点において堤防整備が実施されなければならない．すなわち，

$$V^*_0(K_0) = V^*_1(K_0) + c \tag{37}$$

が成立する．式(37)が成立する場合，第１区間の最適整備時期は初期時点その時か，もしくは整備が遅延している場合のいずれかである．一方，

$$V^*_0(K_0) - V^*_1(K_0) < c \tag{38}$$

が成立する場合，初期時点に第１区間を整備するのは最適でない．費用便益分析におけるプロジェクト採択の条件(34)の場合，第１区間の便益のみに考慮してプロジェクトの採択が議論されるが，式(38)に示すようにreal option approachの場合には第１区間のみでなく，その後のプロジェクトがもたらす便益も考慮して第１区間のプロジェクト採択が議論される．最適値関数(35)を分解すれば次式を得る．

$$\begin{aligned} V^*_0(K_0) &= E\Big[\int_0^\infty D_0(K(t)) \exp(-\rho t) dt \\ &\quad - \int_{\theta^*_1}^\infty \{D_0(K(t)) - D_1(K(t))\} \exp(-\rho t) dt - \cdots \\ &\quad - \int_{\theta^*_n}^\infty \{D_{n-1}(K(t))\} \exp(-\rho t) dt + c \sum_{i=1}^n \exp(-\rho\theta^*_i)\Big] \\ &= \overline{V}_0(K_0) - E\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (\overline{\Delta}_i(\bar{K}^*_{i+1})) \exp(-\rho\theta^*_{i+1})\Big] \end{aligned} \tag{39}$$

記号$E[\cdot]$はサンプル経路とθ^*_i $(i = 1, \cdots, n)$に関する期待値操作を表す．$\overline{\Delta}_i(\bar{K}^*_{i+1})$は資産が$K(\theta^*_{i+1}) = \bar{K}^*_{i+1}$の時に第$i+1$区間を整備した時に得られる期待純便益の当該時刻における現在価値であり，

$$\overline{\Delta}_i(\bar{K}^*_{i+1}) = E\Big[\int_0^\infty \{D_i(K(t)) - D_{i+1}(K(t))\} \cdot \exp(-\rho t) dt\Big] - c \tag{40}$$

$$\text{subject to 式(3) and } K(0) = \bar{K}^*_{i+1}$$

で定義される．ここに，記号$E[\cdot]$は$K(t)$に関する期待値操作を表す．同様に，式(36)を分解すれば

$$V_1^*(K_0)=\overline{V}_1(K_0) -E[\sum_{i=1}^{n-1}(\overline{\Delta}_i(\bar{K}_{i+1}^*))\exp(-\rho\theta_{i+1}^*)] \qquad (41)$$

となる．式(39),(41)より，初期時点において第1区間の整備を見送ることによる情報の価値Δ_0は

$$\Delta_0(K_0)=V_1^*(K_0)+c-V_0^*(K_0) =E[\overline{\Delta}_0(\bar{K}_1^*)\exp(-\rho\theta_1^*)]-\overline{\Delta}_0(K_0) \qquad (42)$$

となる．$\Delta_0(K_0)$は初期時点で事業実施を見送ることにより得る情報価値である．初期時点が最適時刻であれば$\theta_1^*=0$であり$\Delta_0=0$が成立する．式(37)が成立する時，初期時点でプロジェクトを実施する純便益は

$$\overline{V}_0(K_0)-V_1^*(K_0)-c =-\Delta_0(K_0)+E[\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{\Delta}_i(\bar{K}_{i+1}^*)\exp(-\rho\theta_{i+1}^*)] \qquad (43)$$

と表される．すなわち，右辺第1項で表される最適実施時刻optionの価値と第2項で表される将来の発展可能性option価値を加えた値となる．現時点が最適な実施時刻であれば第1項はゼロとなり，事業実施を遅らせることが望ましい場合には第1項は負の値となる．換言すれば，第1項は将来便益の不確実性に伴うリスクプレミアムである．将来の不確実性が大きいほど，現時点での事業実施が正当化されるためにはより，現時点でのプロジェクト便益がリスクプレミアム分大きくなければならない．第2項は将来の発展可能性に関するクレジットであり，第2区間以降のプロジェクト便益が大きいほど第1区間の便益も大きく評価される．

5．おわりに

長期的な視点で段階的に整備されるような大規模事業においては，現在の投資がもたらす不可逆的な変化や投資の時間的な緊急度を考慮にいれることができるような経済評価の方法が望まれる．本研究では，real option approachを用いた治水事業の段階的整備のための経済評価方法を提案した．本研究で提案した方法によれば，治水事業の便益は通常の費用便益分析で用いられる治水事業による純便益に加えて，将来時点における治水事業の発展可能性optionを加えた値になる．しかし，将来時点における不確実性が存在する場合，初期時点でプロジェクトを実施するためには発展可能性optionを加えた治水事業の総便益が，事業の実施時刻を遅らせることによる情報価値（リスクプレミアム）より大きくなる必要がある．real option approachを用いる場合，経済評価において考慮するoptionによりプロジェクトの便益が異なる．治水事業の便益評価において，たとえば治水事業の実施が流域における資産蓄積過程に影響を及ぼす場合を考慮した成長option，治水事業の実施期間が長期間に及ぶ場合を考慮した工期optionを考慮することも可能である．このような経済評価方法は本研究で提案した最適実施時刻モデルを発展させることにより対処可能である．

付録I　伊藤のレンマの適用

$\bar{K}$の近傍において$V_i(K(t+dt))$をTaylor展開する．

$$V_i(K(t+dt))=V_i(\bar{K})+\frac{dV_i(\bar{K})}{dK}(dK) +\frac{1}{2}\frac{d^2V_i(\bar{K})}{dK^2}(dK)^2+o(dt)$$

式(3)と$(dK)^2=\sigma^2\bar{K}^2(dW)^2$を代入する．伊藤過程の定義より$E[dW]=0$, $E[(dW)^2]=dt$である．

$$E[V_i(K(t+dt))]=V_i+\mu\bar{K}\frac{dV_i}{dK}dt +\frac{\sigma^2}{2}\bar{K}^2\frac{d^2V_i}{dK^2}dt+o(dt)$$

上式を不等式$V_i(\bar{K})\leq V_i^\circ(\bar{K})$に代入する．$V_i^\circ$を$\bar{K}$の近傍でTaylor展開し，両辺を$dt$で割れば次式を得る．

$$\frac{\{1-\exp(-\rho dt)\}V_i}{dt}\leq D_i(\bar{K})+\exp(-\rho dt)\left[\mu\bar{K}\frac{dV_i}{dK} +\frac{\sigma^2}{2}\bar{K}^2\frac{d^2V_i(\bar{K})}{dK^2}+\frac{o(t)}{dt}\right]$$

ここで$\lim_{dt\to 0}o(dt)/dt=0$．$dt\to 0$の極限をとると，

$$\text{左辺}=\rho V_i\lim_{-\rho dt\to 0}\frac{\exp(-\rho dt)-\exp(0)}{-\rho dt} =\rho V_i\left.\frac{d\exp(x)}{dx}\right|_{x=0}=\rho V_i$$

また$\lim_{dt\to 0}\exp(-\rho dt)=1$より$\Psi V_i(\bar{K})+D_i(\bar{K})\geq 0$.

参考文献

1) Trigeorgis, L.: *Real Options*, MIT Press, 1998.
2) 上田孝行: 防災投資の便益評価-不確実性と不均衡の概念を念頭において，土木計画学研究・論文集，No. 14, pp.17-34, 1997.
3) 多々納裕一: 不確実性下のプロジェクト評価：課題と展望，土木計画学研究・論文集, No.15, pp. 19-30, 1998.
4) Johannson, P.-O.: *Cost-Benefit Analysis of Environmental Change*, Cambridge University Press, 1993.
5) Arrow, K.J. and Fisher A.C.: Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.88, pp.312-320, 1972.
6) 多々納裕一：開発留保の便益と開発戦略，応用地域学研究，No.3, pp.21-32, 1998.
7) Dixit, A. K. and Pindyck,R.S : *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
8) たとえば，Baxter, M. and Rennie, A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, 1996.

(2001. 4. 16 受付)