

最適なトンネル覆工厚分布の探索

Study on Optimal Distribution of Lining thickness

西藤潤¹・朝倉俊弘²・田村武³

Jun Saito, Toshihiro Asakura and Takeshi Tamura

¹工修 京都大学博士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: saito-j@mbox.kudpc.kyoto-u.ac.jp

²工博 京都大学教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

³工博 京都大学教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

In this paper, the optimal design of tunnel lining is considered from the mechanical point of view and an optimal design method is proposed. The object of the optimal design method is minimizing the cost of tunnel lining under the condition that the tunnel will not collapse plastically due to the external forces. To show the effectiveness of this proposed optimization method, we solve three types of tunnel examples; circular tunnel, horseshoe-shaped tunnel, and rectangular-shaped tunnel.

Key Words : rigid-plastic analysis, size optimization, bar structure, bending moment

1. はじめに

トンネルを設計する際には、機能性、経済性、環境、景観など様々な要素を考慮する必要がある。なかでも、安全性は重要な要素の1つであり、構造物が意図せず崩壊するような事態は万に一つもあってはならない。崩壊を避けるためには、最適設計の観点からすると「トンネルの形状を最適なものにすること」と「トンネルの物性を最適なものにすること」の2通りの方法が考えられる¹⁾。前者については、トンネルの形状は施工方法や用途などから決定されることが多く、設計において形状を自由に決める余裕はさほどないため困難であると考えられる。それに対して、後者は比較的容易に実現可能である。例えば、覆工の厚さはある範囲内では自由に設計できると考えられる。当然、覆工が厚ければ崩壊に対する強度は増すが、過度に覆工を厚くすることはコスト面から見て望ましいことではない。崩壊しやすい部分には十分な厚さを持たせ、崩壊しにくい部分には崩壊しない程度まで厚さを落としてコストを削減することが理想的な設計といえる。そこで、本論文では理想的な覆工厚の分布を求める手法を提案したい。また、その手法を用いて行った数値解析例を示す。

2. 解析手法

(1) 極限解析手法

次節で示す強度(覆工厚)分布最適化と比較するために、下界定理を用いた極限解析の一般的な定式化を示しておく。下界定理は以下のことを主張している。「与えられた荷重系 f に荷重係数 α を乗じた荷重 αf に対して、降伏条件を破らない静力学的許容場 σ が見出されたとする。このとき、この α は荷重係数の下界値であり、 α の最大値は崩壊時の真の荷重係数である。」すなわち、真の荷重係数を求めるためには次の問題を解けばよい。

$$\begin{aligned} &\alpha \rightarrow \max \\ &\text{sub.to } \begin{cases} \alpha f = B^t \sigma \\ g_\sigma(\sigma) \leq 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

1つめの制約条件式は力の釣合式を表している。2つめの制約条件式は降伏関数 $g_\sigma(\sigma)$ が非正、つまり降伏曲面の外側の状態はとらないことを表している。これらの制約条件に関してはそれぞれ3.2節、3.3節で詳述する。

問題(1)を解くため、Lagrange乗数 u, λ を用いて次のようなLagrange関数を定義する²⁾。

$$L(\alpha, \sigma, u, \lambda) = \alpha - u^t (\alpha f - B^t \sigma) - \lambda^t g_\sigma(\sigma) \quad (2)$$

これに対するKarush-Kuhn-Tucker(KKT)条件、すな

わち問題 (1) の最適性条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - f^t u = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = Bu - \left(\frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} \right)^t \lambda = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \alpha f - B^t \sigma = 0 \quad (5)$$

$$\Lambda g_\sigma = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g_\sigma \leq 0 \quad (6)$$

となる。\$\Lambda\$ は \$\lambda_i\$ を対角項に持つ対角マトリクスである。ラグランジュ乗数 \$u, \lambda\$ が持つ物理的意味はそれぞれ変位速度、塑性乗数である。式 (3) は変位の大きさを一意に定める式であり、式 (4) は 3.3 節で示すように適合条件と関連流れ則をまとめたものを表している。これらは上界定理を極限解析法に適用したときに得られる式である。つまり、下界定理による極限解析を解こうとすると、同時に上界定理による極限解析も解くこととなる。なお、式 (6) は相補性条件式と呼ばれる式であり、下界定理による極限解析と上界定理による極限解析の目的関数値のギャップが 0 であることを表している。

式 (3)–(6) を満足する解は Newton-Raphson 法を用いて計算できる³⁾。ただし、式 (6) は非負制約、非正制約を含んでいるため、増分計算を行う際は注意が必要である。

(2) 強度分布を最適化する手法

強度 (覆工厚) 分布最適化問題を一般的な形で定式化を行う。強度分布最適化問題も極限解析とほぼ同様に静力学的なアプローチによって定式化を行うことができる。与えられた荷重系 \$f\$ に対して降伏条件を破らない許容場 \$\sigma\$ が存在し、さらに強度 (覆工厚) \$h\$ に関する制約条件 \$g_h(h) \leq 0\$ を満たしているとする。このとき、コスト \$C(h)\$ が最小になるものが最適解である。以上のことを数式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} C(h) \rightarrow \min \\ \text{sub.to } \begin{cases} B^t \sigma = f \\ g_\sigma(\sigma, h) \leq 0 \\ g_h(h) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

問題 (7) を解くために、Lagrange 乗数 \$u, \lambda, \gamma\$ を用いて Lagrange 関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} L(h, \sigma, u, \lambda) = C(h) + u^t (f - B^t \sigma) \\ + \lambda^t g_\sigma(\sigma, h) + \gamma^t g_h(h) \end{aligned} \quad (8)$$

Lagrange 関数 (8) に対する KKT 条件は以下の通りで

ある。

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial C(h)}{\partial h} + \left(\frac{\partial g_\sigma}{\partial h} \right)^t \lambda + \left(\frac{\partial g_h}{\partial h} \right)^t \gamma = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = Bu - \left(\frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} \right)^t \lambda = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f - B^t \sigma = 0 \quad (11)$$

$$\Lambda g_\sigma = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g_\sigma \leq 0 \quad (12)$$

$$\Gamma g_h = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad g_h \leq 0 \quad (13)$$

\$\Gamma\$ は \$\gamma_i\$ を対角項に持つ対角マトリクスである。式 (10) は適合条件式と流れ則をまとめたものであり、極限解析と同様、KKT 条件に運動学的条件が表れていることがわかる。式 (9) は覆工厚が最適であるための条件式である。

これらの式を非負、非正制約に注意しながら Newton-Raphson 法を用いて解けば、問題 (7) の解が得られる。

3. 覆工厚分布最適化に用いる式、関数

前章では一般的な形で極限解析と最適化問題を解く手法を示した。本章では、覆工厚分布を最適化するために本論文で用いた式および関数を示す。なお、解析は覆工の横断面のみを考え、覆工ははり要素によって離散化を行う。

(1) 設計変数およびコスト関数

設計変数である強度として、覆工の厚さ \$h\$ を考える。コストは覆工の厚さ \$h_i\$ に比例すると仮定すると、コスト関数は

$$C(h) = \sum_i l_i h_i \quad (14)$$

となる。\$l_i\$ ははり要素の長さである。

(2) 力の釣合式

図-1 に示すようにはりの端部に曲げモーメント \$T\$、水平荷重 \$F\$、鉛直荷重 \$G\$ の外力が与えられたとき、はりの中央部に曲げモーメント \$M\$、せん断力 \$Q\$、軸力 \$N\$ の部材力が働く。そのとき、力の釣合式は外力を表すベクトル \$f^e\$、部材力を表すベクトル \$\sigma^e\$ とマトリクス \$B^e\$ を用いて次のようになる。

$$f^e = B^{et} \sigma^e \quad (15)$$

$$B^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l/2 & -\sin \theta & -\cos \theta & l/2 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

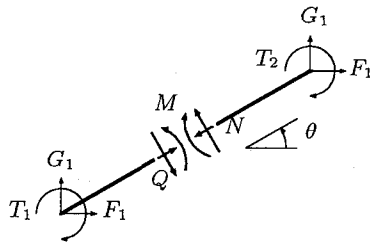


図-1 部材力と外力の釣り合い

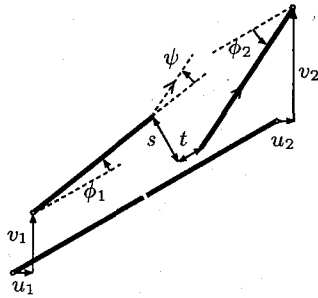


図-2 変位速度と相対変位速度の適合条件

$$\sigma^e = \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}, \quad f^e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ F_1 \\ G_1 \\ T_2 \\ F_2 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここで、添字の e はある1つの要素について記述していることを表している。マトリクス B^e 内の l ははり要素の長さ、 θ ははりの傾きである。

要素ごとの式(15)を全体でまとめると釣合式

$$f = B^t \sigma \quad (18)$$

が得られる。

(3) 適合条件および関連流れ則

問題(1)および式(7)からKKT条件として得られる式(4)、(10)は、Lagrange乗数 u, λ をそれぞれ変位速度と塑性乗数とみなすと関連流れ則としてとらえることができる。図-2の示すようにはり端部における回転角速度 ϕ 、水平方向の変位速度 u 、鉛直方向の変位速度 v とはり中央部における相対角速度 ψ 、せん断方向の相対変位速度 s 、軸方向の相対変位速度 t の関係は、変位速度ベクトル u^e と相対変位速度ベクトル ϵ^e を用いて次のように書ける。

$$B^e u^e = \epsilon^e \quad (19)$$

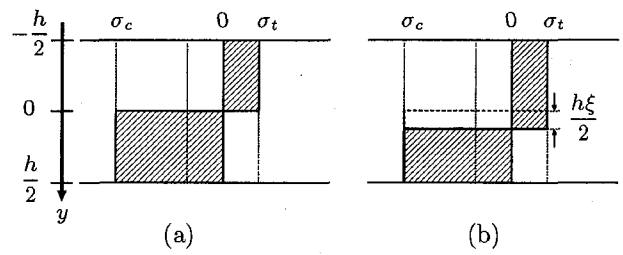


図-3 応力

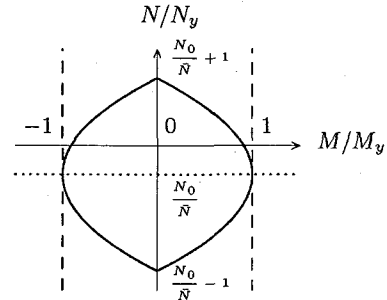


図-4 降伏関数 ($\sigma_t + \sigma_c < 0$)

$$u^e = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ \phi_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad \epsilon^e = \begin{Bmatrix} \psi \\ s \\ t \end{Bmatrix} \quad (20)$$

B は式(16)で表されるマトリクスである。釣合式(15)と同様のマトリクス B が使われていることから分かるように、式(19)は釣合式(15)に対応する適合条件式である。

相対変位速度ベクトル ϵ^e は関連流れ則より

$$\epsilon^e = \lambda^e \frac{\partial g_{\sigma^e}}{\partial \sigma^e} \quad (21)$$

であるため、結局、式(19)と式(21)より

$$B^e u^e = \lambda^e \frac{\partial g_{\sigma^e}}{\partial \sigma^e} \quad (22)$$

が言える。

(4) 降伏関数

たわみが微小で平面保持の仮定が常に成立すると仮定して、降伏曲面を求める。図-3(a)のように $y < 0$ で引張の降伏応力 $\sigma_t(> 0)$ 、 $y > 0$ で圧縮の降伏応力 $\sigma_c(< 0)$ に対して全断面が降伏するとき、軸力 N_0 、曲げモーメント $\bar{M}$ はそれぞれ

$$N_0 = \frac{\sigma_t + \sigma_c}{2} h \quad (23)$$

$$\bar{M} = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{8} h^2 \quad (24)$$

となる。一方、図-3(b)のように $y < h\xi/2$ で引張の降伏、 $y > h\xi/2$ で圧縮の降伏によって、全断面が塑性化

した場合、軸力 N 、曲げモーメント M はそれぞれ次式で表される。

$$N = N_0 + \frac{\sigma_t - \sigma_c}{2} h \xi = N_0 + \bar{N} \xi \quad (25)$$

$$M = \bar{M} + \frac{\sigma_t - \sigma_c}{8} h^2 \xi^2 = (1 - \xi^2) \bar{M} \quad (26)$$

ここで、

$$\bar{N} = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{2} h \quad (27)$$

とした。式 (25)、(26) から ξ を消去すると次の降伏曲面が得られる。

$$g_{\sigma^e}(\sigma^e) = \frac{|M|}{\bar{M}} + \left(\frac{N - N_0}{\bar{N}} \right)^2 - 1 \quad (28)$$

式 (28) に式 (25)、(26)、(27) を代入し、両辺に h^2 を乗じると、はりの厚さ h を含んだ降伏関数として

$$g_{\sigma^e}(\sigma^e, h) = \frac{|M|}{\frac{\sigma_t - \sigma_c}{8}} + \left(\frac{N - \frac{\sigma_t + \sigma_c}{2} h}{\frac{\sigma_t - \sigma_c}{2}} \right)^2 - h^2 \quad (29)$$

が得られる。

(5) はりの厚さに関する制約条件

はりの厚さ h に上限値 h_u と下限値 h_l を設ける。

$$0 < h_l \leq h \leq h_u \quad (30)$$

上限値を設けない場合は h_u の値を十分大きくすれば良い。はりの厚さは 0 を下回ることは無いので、下限値は 0 より大きな値となる。式 (30) を満足するとき非正になるような関数として例えば次の式が考えられる。

$$g_h(h) = (h - h_l)(h - h_u) \quad (31)$$

明らかに $g_h(h) \leq 0$ のとき、式 (30) を満足する。

4. 解析結果

数値解析例として円形トンネル、馬蹄形トンネル、箱型トンネルにおける覆工厚分布を最適化する問題を解いた。その解析結果を示す。

(1) 解析で用いた仮定

a) 荷重の大きさ

ここで示す最適化問題では、覆工厚が $h = 1$ で一定のときに極限解析による荷重係数が $\alpha = 1$ となるよう荷重を与える。つまり、ある荷重パターンに対して厚さが一定 ($h = 1$) の覆工が耐え得る最大の荷重の大きさを考える。この荷重は、極限解析によって次のように求めることができる。厚さが一定の覆工に対して適当な荷重 $f = \bar{f}$ が与えられたとき、極限解析によって荷重係数 $\alpha = \bar{\alpha}$ が得られるとする。このとき、荷重をあらためて $f = \bar{\alpha} \bar{f}$ と置き換えることで最適化問題で与える荷重が得られる。

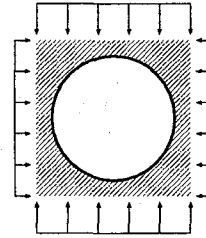


図-5 円形トンネルに作用する外力

本研究では、覆工厚の上限値は $h_u \leq 1$ とする。もし、いたるところで覆工厚が $h < 1$ であれば、極限解析によって得られる荷重係数は $\alpha < 1$ となり、荷重に耐え切れず崩壊する。これより、覆工のどこかで $h = 1$ となっている領域が存在しなければならない。このため、この最適化問題における覆工厚の上限値は $h_u = 1$ である。結局この問題は、覆工厚を $h_u = 1$ からどれだけ減らすことができるかということを考える問題と見ることができる。解析結果は、覆工厚が減少した量 h_- を用いて図示する。減少量 h_- は覆工厚の上限値 $h_u (= 1)$ と最適な覆工厚 h の差 $h_- = -(1 - h)$ であり、負の値をとる。

b) 覆工厚の上限値、下限値

覆工厚の上限値は前述したように $h_u = 1$ とする。下限値はここでは、単に $h_l = 0$ としておく。

c) 降伏関数

降伏関数は式 (29) を用いる。引張に対する降伏応力 σ_t と圧縮に対する降伏応力 σ_c の絶対値の比は $\sigma_t : |\sigma_c| = 1 : 10$ と仮定する。

d) 荷重パターン

荷重は水平方向と鉛直方向の比が 1 : 2 となるよう荷重を与えた。なお、地盤との相互作用は考えない。

(2) 円形トンネルの解析

シールドマシンによって掘進する場合、トンネルの形状は円形となる場合が一般的である。この円形トンネルを対象に覆工厚 h の分布を最適化する問題を解いた。図-6 は、境界条件を示している。対称性を利用して右半分のみを考えている。

図-7 に数値解析によって得られた覆工厚の減少量 $h_- (= -(1 - h))$ を示す。図中の括弧は最適な覆工の厚さ h を表している。図-8、図-9 はそれぞれ最適な覆工厚に作用する曲げモーメント分布、軸力分布である。曲げモーメントが大きく作用する上部、下部、側部で覆工厚は $h = h_u$ となり、上限値を取っている。一方で、曲げモーメントがほとんど作用しないところでは覆工は薄くなっている。覆工の最も薄いところで $h = 0.718$ である。コスト関数は、覆工厚が $h = 1$ で一定の場合が $C_{ini} = 3.14$ であるのに対して、最適な覆工厚では

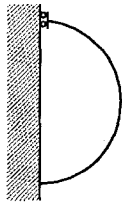


図-6 円形トンネルの境界条件

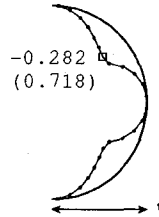


図-7 減少した厚さ h_r の分布 (円形トンネル)

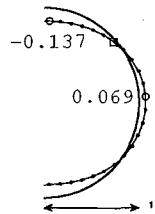


図-8 曲げモーメント M の分布 (円形トンネル)

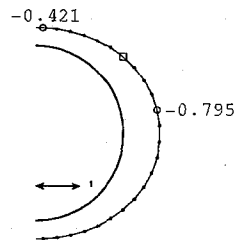


図-9 軸力 N の分布 (円形トンネル)

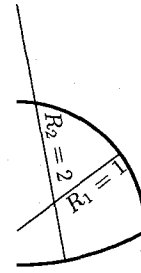


図-10 断面図 (馬蹄形トンネル)

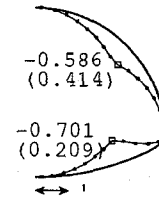


図-11 減少した厚さ h_r の分布 (馬蹄形トンネル)

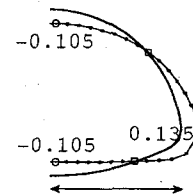


図-12 曲げモーメント M の分布 (馬蹄形トンネル)

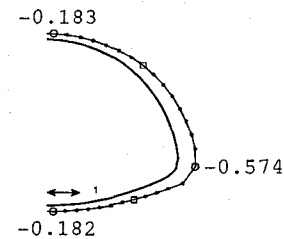


図-13 軸力 N の分布 (馬蹄形トンネル)

$C_{opt} = 2.74$ である。その比は $C_{opt}/C_{ini} = 0.874$ であり、十分なコスト削減効果が得られている。

(3) 馬蹄形トンネルの解析

山岳トンネルでは、トンネル形状は一般的に馬蹄形となる。この馬蹄形トンネルに対しても円形トンネルと同様の境界条件を用いて最適化を行った。図-10に示すように、アーチ部、インバート部の曲率半径はそれぞれ $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ である。

図-11に最適な覆工厚分布を、図-12、図-13にそれぞれそのときの曲げモーメント分布、軸力分布を示す。曲げモーメントが大きく作用している上部と下部および、側壁部とインバートが接続しているところで覆工厚は最大値 h_u を取っている。コスト関数は、覆工厚が $h = 1$ で一定のとき $C_{ini} = 2.60$ であり、最適化した場合では $C_{opt} = 1.92$ となる。その比は $C_{opt}/C_{ini} = 0.740$

である。円形トンネルと同様、大きな効果が得られているのが分かる。

(4) 箱型トンネルの解析

開削トンネルや沈埋トンネルではトンネルの形状は一般的に箱型となる。箱型のトンネルでは内部の空間を隔てる壁が存在することが多々ある。この隔壁が覆工と剛に接続すると、トンネルはより不静定な構造となり、直観的に最適な覆工厚分布を考えることが困難になってくる。ここでは図-14のような箱型トンネルを対象に、覆工厚を最適化する問題を解いた。

ただし、トンネル中央にある壁面は塑性崩壊しないと仮定する。そこで、図-15に示すように、上床板、下床板の中央部分に変位が生じないように固定し、解析を行う。

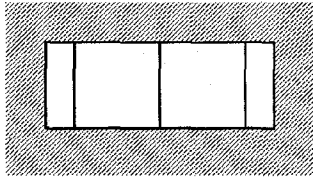


図-14 箱型トンネルのモデル図

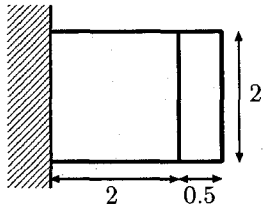


図-15 箱型トンネルの境界条件

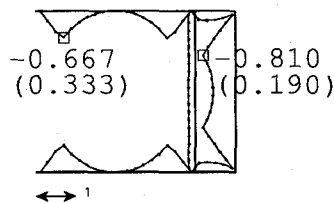


図-16 減少した覆工厚 $h_-(=1-h)$ の分布 (箱型)

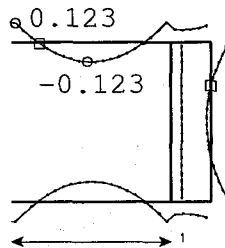


図-17 曲げモーメント M の分布 (箱型)

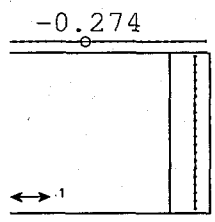


図-18 軸力 N の分布 (箱型)

図-16 に最適な覆工厚の分布、図-17、図-18 にそれぞれそのときの曲げモーメント分布、軸力分布を示す。上床板、下床板と壁面との結合部、および結合部と結合部の間で覆工厚 h が大きくなっている。コスト関数は、覆工厚が $h=1$ で一定のとき $C_{ini}=9.00$ となるのに対して最適化したときでは $C_{opt}=6.47$ となる。その比は $C_{opt}/C_{ini}=0.718$ である。箱型トンネルでも同様に大きなコスト削減効果があることが分かる。

5. おわりに

本論文では、強度分布最適化問題をトンネルの覆工厚に対して適用できることを示した。また、実際のトンネルでは覆工の厚さは一定であることが多いが、覆工の厚さを最適化することでコストを抑えられることを示した (今回の解析では、1 割から 3 割程度)。

4. 章では、円形トンネル、馬蹄形トンネル、箱型トンネルを単純化したモデルに対して最適化を行ったが、より複雑な形状のトンネルに対しても適用可能である。今後の課題は次の通りである。

- 今回の解析では、地盤とトンネルの相互作用は無視して解析を行ったが、トンネルの挙動を考える上で地盤との相互作用は非常に重要な問題である。実問題を考えるためには、地盤の影響を加えたモデル化が必要である。
- 本論文で示した最適化問題は、荷重パターンを 1 つしか考慮していない。しかし、実現象においては、トンネル構造物には時間的に変化する荷重や繰り返し荷重などが作用する。このような複数の荷重パターンを持つ荷重に対しても、最適化を行うことができる手法を開発したいと考えている。

付録 I ベクトル、マトリクスの表記、意味

本論文で用いた表記について説明する。

- $a \geq 0$ はすべての i に対して $a_i \geq 0$ が成り立つことを示している。
- $\frac{\partial a}{\partial b}$ の ij 成分は $\frac{\partial a_i}{\partial b_j}$ である。
- 添字 t は転置を表す。

また、覆工厚最適化問題においてそれぞれのベクトルが持つ物理的意味は以下の通りである。

α	荷重係数
f	外力
σ	部材力
g_σ	降伏関数
g_h	覆工厚に関する制約条件
u	変位速度
ϵ	相対変位速度
λ	塑性乗数
h	覆工の厚さ

参考文献

- 1) 山田善一、構造システムの最適化、土木学会、1988。
- 2) 福島雅夫：非線形最適化の基礎、朝倉書店、2001。
- 3) 小島政和、土谷隆、水野真治、矢部博：内点法、朝倉書店、2001。
- 4) 小林昭一：構造力学 (下) 培風館、1990。