首里城御庭（うなー）の幾何学試論

家田　仁

フェロー会員　政策研究大学院大学 特別教授（〒106-8677 港区六本木 7-22-1）
Email: ieda@grips.ac.jp

首里城の中心に位置する御庭（うなー）は，周りを正殿等の建物に囲まれた沖縄を代表する歴史的価値をもった美しいオープンスペースである．御庭の形状は変形四辺形をなし，また奉神門を発した浮道（うきみち）は正殿中央に斜角で繋がっている．本稿は，従来数学的な分析が看過されてきた，この特異な御庭の幾何形状の構成原理について複数の仮説を設定し，その解の導出と分析を通じて，御庭に洗練された幾何学的秩序が内包されている可能性を示すとともに，実際の形状との比較を通じて御庭の空間形成について考察したものである．

Key Words: *spacial design, geometric structure, urbanl place, Shurijo-castle*

1.　首里城御庭の形状的特長と本稿の視点

(1) 首里城と御庭の空間構造

首里城御庭（うなー）(1992 年復元・2019 年焼失)は極めて興味深いユニークな広場空間である．訪れた者は誰しも正殿の華麗さとともに御庭全体を彩る鮮やかさに眼が奪われるが、落ち着いて眺めると，奉神門から正殿中央に向かう浮道（うきみち）が正殿に正対せず斜角をなしていることや，御庭が奥に向かって逆遠近法を思わせる先広がりの奇妙に変形した四辺形をなしていること（注 1）に気がつく．本稿で数理的分析を試みた動機もまさにこの「奇妙さ」がもたらす幾何学的緊張感にある．

首里城における中心的な儀式空間の機能を担った御庭であるが，そのミクロな空間構造としては，**図-1** に示すように変形四辺形のまわりに正殿，その両側に北殿と南殿，そしてエントランスとしての奉神門が正殿の向かいに配置されている．最も重要な建築物である正殿とそれに隣接する北殿の建築線は，浮道に対し反時計まわりに約 9° 傾けられ，全体として歪んだ変形四辺形となっている（注 2）．また、４つの頂点のうち対向する２つの頂点が直角をなしていることから，タレスの定理により、４頂点が一つの円上に置かれていることがわかる．さらに，仮想的に四辺形に二本の対角線を引いてみると，その交点が浮道上に位置するらしきこともわかる．

マクロな視点に立つと，まず首里城の立地の基礎には，地形判定に立った琉球独特の風水思想が反映されていることが知られている[1]．首里城付近は，北側と南側に西流する二つの小さな川に挟まれた，

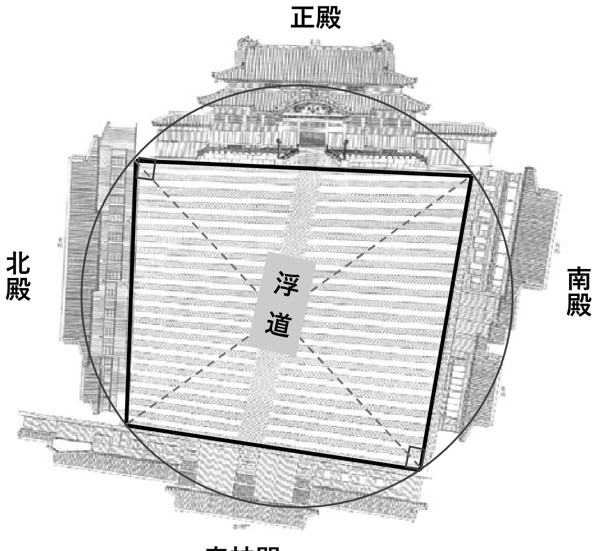

図-1　首里城御庭の形状の基本性状

出典：「琉球王府 首里城」の御庭周辺起絵[10]に筆者が加筆したもの

守りに固い標高 130m 前後の急峻な丘陵地で，聖地久高島の遥拝地であり琉球創世神話に登場するアマミキヨが祀られる弁ヶ岳（標高 165m）を東方の主山として，そこから風水にいう龍脈（気脈）が，方位角約 80° ↔ 約 260° 方向の軸線（第一の軸線）に沿って首里城付近に至り，この付近にて王家の墓地である西方の玉陵（たまうどぅん）に至る丘陵稜線（同時に那覇と首里を繋ぐ主動線）がなす方位角約 110° ↔ 約

290° 方向（第二の軸線）に沿って向きを変えて流れ下ってゆくという，扁平なＶ字型に約 30° 屈折する空間構造となっている（**図-2**）．さらに広域的には，はるか東南方に位置する斎場御嶽/久高島と首里城との空間関係も祭祀上極めて重要な意味をもったものと認識されている[2]．

また，地形特性を積極的に活かした風水思想や土着神話的な東西方向重視の思想（注 3）と合わせて，朝貢国琉球が中国から冊封使を迎えた際には，首里城御庭にあっても北方を向いた儀式が行われるなど，中国的な南北方向重視の思想とも折り合いをつける必要があったことが知られている[3]．

再びミクロな御庭の形状に戻る．少なくとも 15 世紀初頭にまで遡ることができる首里城であるが，その後何回も焼失・再建・重修され形状も変遷してきた．歴史学・考古学的な調査によると，その中でも正殿は一貫して第一の軸線に正対するように置かれてきたことが知られ，また，後に琉球王府の宰相となる蔡温らが 1713 年に首里城の風水検分をした折には，浮道は東西方向を向き，奉神門はその浮道に直交していたものとされている[4]．蔡温は，（浮道と正殿の）「二者立向同じからずは最も妙なり」と記し，上記の「歪み」の存在が既に当時から認識されていたことが確認されている[5]

(2) 御庭の幾何形状問題をどうとらえるか？

結果的に，約 30° で屈折する二つの軸線の交点付近に，概ね東西方向を向いた第三の軸線を挿入し，軸線を正殿正面付近（屈折角約 9°）と御庭の西方の下之御庭に置かれた首里森御嶽付近（屈折角約 20°）の二段階で屈折させ，第三の軸線の中央付近に首里城中心部をおく構造となっている．

首里城御庭は，上述のような特性をもったマクロな空間構造の上に，首里城の中心として縦横 40m～45m 前後のスケールで形成されたミクロな広場空間である．したがって，御庭の形状設計とその周辺の建築物の配置の問題は，独特なマクロな空間構造の中に，どのようなミクロな空間要請を無理なく取り込むかという問題と捉えることができよう．

さて，風水思想や易・五行思想から首里城の全体構造を考察する研究は，前城(2001 年)[1]などいくつかみられる．ところが御庭というミクロな空間の幾何構造を論じた研究は，秋元・浦山（1989 年）[6]に限られるようである．この研究は，御庭の平面図の上で具体的な幾何形状分析を行っていて興味深いが，風水思想のアプリオリな「井」型構造論に立った，いわば空間設計の「べき論」にとどまっている．そこでは，御庭の基本構造となっている浮道の東西軸の存在は無視され，また研究が示唆する（あるべき）建築物の方位や位置についても，特に奉神門や南殿については実際とあまりにも大きくかけ離れ，現実の首里城御庭の空間構造を論じる成果には残念ながら至っていない．

本稿は，首里城御庭の空間構造がどのような幾何特性を内包しているのか探ることを第一の目的とし，屈折するマクロな軸線の存在を与件とし，予め想定した仮説から幾何学的に演繹される御庭の形状について数学的な分析を試み，その結果について実際の形状との比較を含めて考察したものである．

ここで，御庭及びその周辺の建築物の配置については，それが何らかのエクスプリシットな理念・原理に基づいて実現されたものと考える，いわば「設計意思論」[7,8]と，「地形上の制約やまわりの建物の

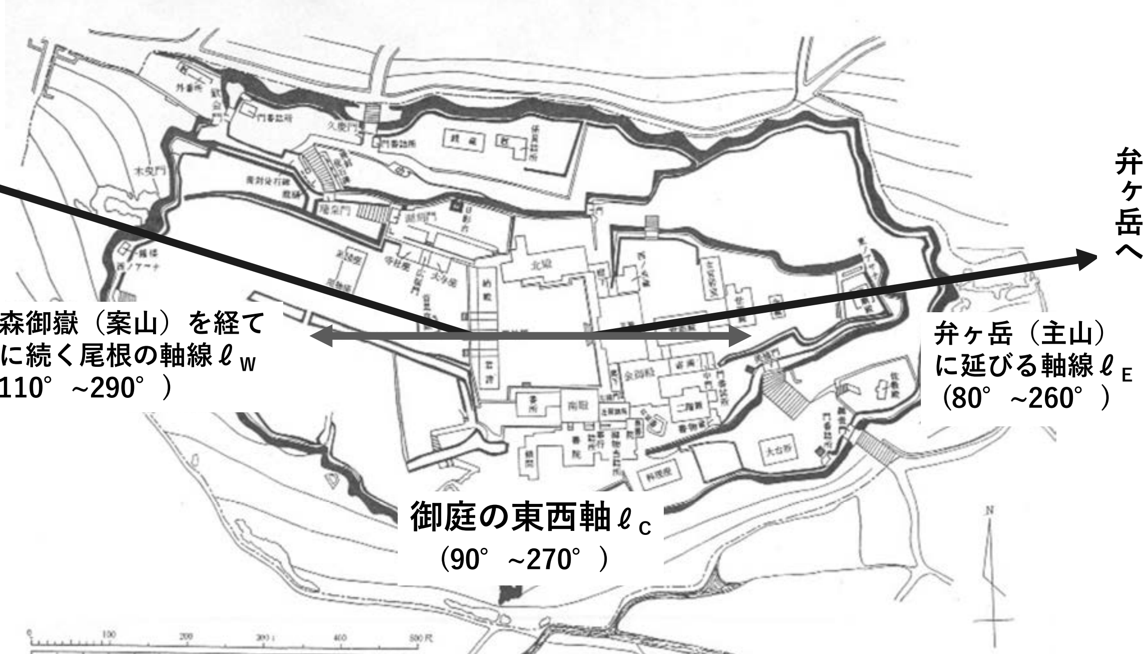

図-2 首里城のマクロな空間構造

出典：「首里城入門」[21]記載の図に筆者が加筆したもの

度重なる再建などに拠る結果であろう」[9]といった「歴史的結果論」の両論をたてることができよう．前者に立った典型的なアプローチが風水思想などの規範を設計原理として空間構造の説明を指向するアプローチであるが，秋元・浦山[6]にみられるように現実を十分に説明できていない．そうしたアプローチに対する懐疑的見方に立つのが「歴史的結果論」ということになろう。

本稿のスタンスは，両論のどちらかをアプリオリに前提とはせず，客観的議論が容易な数学的表現に立った仮説を原理として想定し，その仮説のもたらす結果と実際との整合性や，仮説が生み出す空間の「豊かさ」に関する考察を通じて，インプリシットなものであれ何らかの「設計意思」に類するものが妥当するのか，あるいは「歴史的結果」と言わざるをえないのか，アポストリオリに考察しようというものである．これが本稿の第二の目的である．

なお，首里城の空間構造は歴史的に決して不変ではなく，どの時代の御庭を分析すべきかという問題がある．ここでは平成復元（1992 年正殿など主要施設の一般公開）によって具現化された御庭[10]と，「沖縄県首里旧城図」（那覇市歴史博物館所蔵）[11]に示された，戦災前の琉球王府末期の御庭の姿を，幾何学的仮説から演繹される解との比較対象として用いることにする．

2. 首里城御庭の幾何学的特性の分析フレーム

特異な変形四辺形の形状をもった御庭の幾何形状については，前述の伊従らによる既存の考古学的あるいは歴史的研究を参照すると，以下のような基本的前提条件が概ね妥当するとされている．

図-3 において，軸線ℓ_Eとそれを時計回りに約9°傾けた軸線ℓ_Cを所与とした時，

・**条件１**： 東辺 AB（正殿建築線）は，軸線ℓ_Eと直交する．

・**条件２**： 西辺 DE（奉神門建築線）は，軸線ℓ_Cと直交する．

・**条件３**： 東辺 AB と北辺 AD（北殿建築線），西辺 DE と南辺 BE（南殿建築線）は，それぞれ直交する（∠A =∠E =∠R）．

・**条件４**： 東辺 AB の中点 H（正殿中心）から第二の軸線ℓ_Cに平行する直線を引き，西辺 DE との交点を J（奉神門中心）とする．こうして定まる線分 HJ を浮道とする。

ここで，条件３は，対角線 BD を直径とする円を描いたとき，四辺形の４つの頂点がいずれもこの円周上に位置することを意味する．この外接円の中心 0 点と半径 r は，御庭の位置と規模の基本を規定することになる．0 点で軸線ℓ_Eと軸線ℓ_Cを交差させ，屈折角をθ（約 9°）とする．

これらを所与とした時，□ABED のいずれかの頂点を外接円上に定めれば，上記の４条件によって他の点は自動的に決まるから，この問題は１自由度の問題となっている．言い換えると，□ABED の形状は，さらにもう一つの条件を設けないと決まらないことになる．

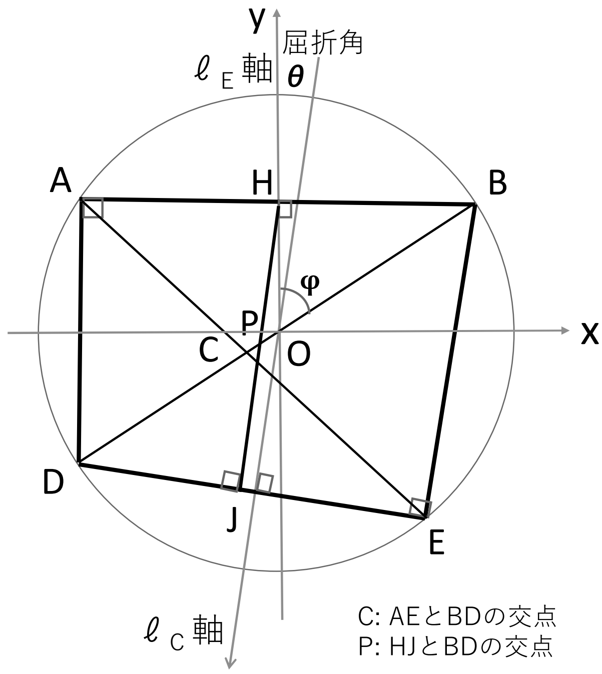

図-3 幾何学的分析フレーム

そこで，ここでは，御庭の幾何形状を決定する第５の条件として，それぞれ独立した以下の４つの仮説を新たに設定する．

・**仮説１**：浮道 HJ が二つの対角線 AE と BD の交点 C を通るようにする．

・**仮説２**：二つの対角線 AE と BD を直交させる．

・**仮説３**：対角線交点 C と外接円の中心 0 の距離を最小化する．

・**仮説４**：□ABED の面積を最大化する．

問題は，前述の４条件と仮説のうちの一つをセットにして，幾何学的解を求めることに帰着する．

ここで，仮説１は，本稿の仮想的アイデアである．賑やかなストライプ模様をもつ御庭において，対角線は自己主張していないが，四辺形の中心点ともいえる対角線交点を主要動線である浮道上に置こうという仮説は，視覚的効果や空間のシンボリックな意味づけの視点からも不自然ではなかろう．

仮説３は広場空間の視覚的バランスの視点に立ち，□ABED の中心と外接円の中心をできるだけ接近させ，御庭の形状的バランスを大きく崩さないようにするものである．仮説４は，御庭が役人などが多数参列する儀式空間であったことに鑑み，空間の収容容量を確保するという工学的実用性の視点に立ったものである．仮説２は専ら幾何学的美しさに対する筆者の興味に基づく．

以降では，前述の４条件を満たす前提で，それぞれの仮説がどのような解を導出するか，言いかえればどのような形状の御庭が導出されるのか，また４

つの仮説がどのような相互関係にあるのか分析する．
具体的には，頂点Bの決定問題，つまり**図-3** の∠HOB（未知変数 φ）の決定問題として定式化する．さらに，仮説から得られる解を平成復元された御庭の実際の形状，及び戦災以前の形状を示すとされる「首里城旧城図」と比較し，御庭の空間特性について考察する．

3. 分析結果

(1) ４つの仮説から導出される御庭形状の解

結果的にいうと，４つの仮説はいずれも同一の解をもたらし，相互に数学的に同値，すなわち等価であることが明らかとなった（数学的な導出プロセスは，**補遺１**参照）．つまり，どれか一つの仮説を満たせば，他の３つの仮説も自動的に満足されることとなる（**図-4**）．得られた解は，共通して，

$\phi = (\angle R + \theta)/2$　（ここで，∠R は直角）

となる．上式を媒介として４つの仮説が相互に結びついているわけである．
よって，$\theta = 9°$ と与えられたとき，$\phi = 49.5°$ となる．以降，仮説から導出された解を以下ではモデル解と呼ぶことにする．**図-5** にモデル解の形状を図示した．モデル解において，最小化された CO 間の距離は $r \sin\theta$，最大化された四辺形面積は $2r^2 \cos\theta$ となる．$\theta = 0$ のとき，C は O に一致し，四辺形は正方形となってその面積は $2r^2$ となる．
面白いことに，東辺と西辺をつなぐ浮道 HJ は，C 点で対向する２つの相似な直角三角形（△ABC と△DEC）において，一方の直角三角形の斜辺（東辺）への中線となり，同時にもう一方の斜辺（西辺）への垂線となっている（**補遺２**参照）．
また，御庭には合同もしくは相似の三角形が多々内包されている．以上のように，このモデル解は，歪みをもたらす屈折角 θ を飲み込み，緊張とともに調和をもつユニークな幾何学的秩序を生み出すものとなっていることがわかる．
軸線 ℓ_C を距離 CO だけ D 方向に平行移動させれば，軸線 ℓ_C は浮道 HJ に重なる．よってこれを新たに軸線 ℓ_C と読み替えれば，３つの軸線 ℓ_E，ℓ_C，ℓ_W が二つの屈折点を経て繋がることになる．その第一の屈折点には正殿正面中央に位置し，第二の屈折点は首里森御嶽となっている．

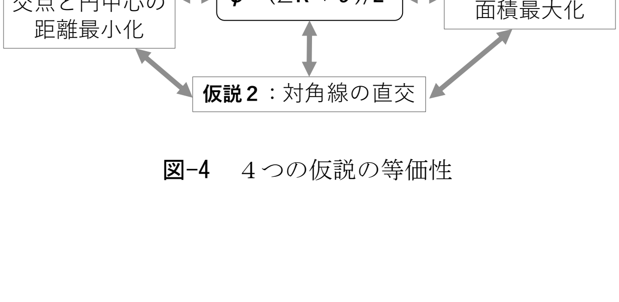

図-4　４つの仮説の等価性

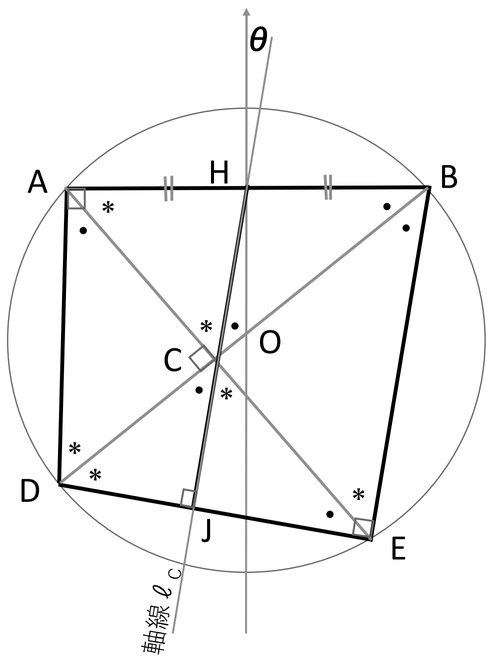

図-5　御庭モデル解の幾何性状

(2) 御庭の実形状とモデル解の整合性

以上より得られたモデル解を，まず平成復元の御庭と比較する．まず，首里城公園管理センターより四辺形の各辺の長さを提供いただいた．これより，外接円の半径 r を算出すると，直角三角形△ABD からは 28.8m，同じく△EBD からは 28.9m となって両者はほぼ一致し，４点が同一の円周上に乗ることが確認された．そこで，両者の平均をとって，半径を 28.85m とし，辺長の実現値を半径で除して無次元化し，主要点の角度とともに，モデル解の結果とあわせて示したのが**表-1** である．また，**図-6** には，外接円の大きさと位置を所与としてモデル解を算出し，「琉球王府 首里城」（1993）に掲載さた「御庭周辺起絵」の上に図示した．

表-1　実現形状（平成復元）とモデル解の緒元の比較

	AB	BE	AD	DE	∠B	∠D	∠HJD
実現形状	1.57	1.44	1.24	1.44	83	97	93
モデル解	1.52	1.52	1.30	1.30	81	99	90

（注）辺長は，外接円の半径により無次元化した値．角度の単位は degree.

図-6 をみると，モデル解は実際の形状に概ね整合した結果となっていることがわかる．ただし，西辺 DE の位置と方位に乖離が見られる．この乖離は，実現形状では，浮道と西辺の直交性（∠HJD）及び西辺の方位について，前述の条件２と４が守られていないことに連動している．
そこで，戦災で首里城が壊滅的に破壊される以前，明治期に作成されたとされる「沖縄県首里旧城

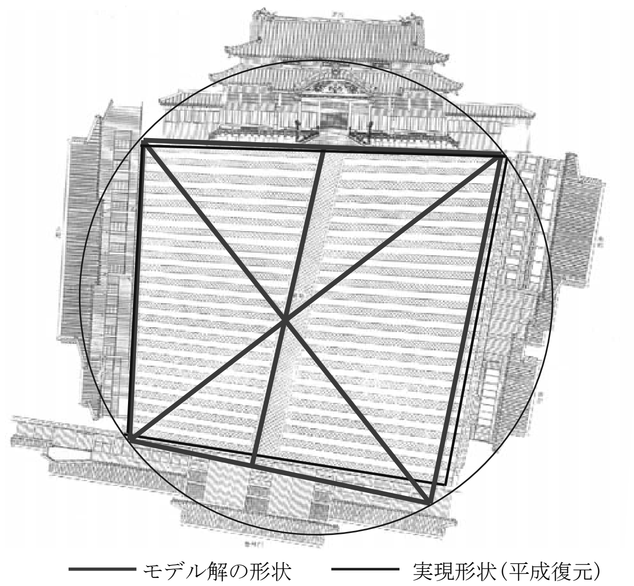

図-6　モデル解と平成復元形状
出典：「琉球王府首里城」に掲載されている御庭周辺起絵 [10]
にモデル解と外接円を図示したもの

図」とモデル解とを比較した．この図は，琉球王府末期の首里城の姿を示すもので，1992 年の平成復元までの時点では明らかになっていなかった奉神門や西辺 DE の位置も記入されおり，首里城復元の後，1995 年に那覇市歴史博物館に寄贈されたものである．

図-7(左)は，旧城図の主要部をトレースした図上に，図中の御庭形状から割り出した外接円を所与として，モデル解を算出して図示したものである．**図-6** と比較すると，西辺のずれが顕著に小さくなり，全体としてモデル解との整合性が改善されているのがわかる．なお，浮道 HJ と西辺はモデル解では直交しているが，旧城図に描かれた浮道では ℓ_c 軸から約 1° のずれが生じている．

また，モデル解の対角線交点は旧城図に描かれた浮道の幅の中に納まっているが，その中心線からは少々北にずれたところに位置している．これは，外接円の位置を固定してモデル解を図示したことに起因していると考えられる．そこで，外接円の大きさは固定したまま，モデル解の対角線交点が同図の浮道中央に位置するよう，外接円中心をわずかに南方に平行移動させて解を図示したのが**図-7(右)**である．モデル解は，旧城図に描かれた御庭の姿と概ねよく整合した結果となり，モデル解が示唆する幾何学的特性の大要を御庭が内包している可能性がうかがえよう．

4. 総合考察

(1) 御庭の空間設計をどうみるか?

前述のように，御庭の設計については「地形の制約やまわりの建物のたび重なる再建の結果」として消極的に捉える考え方と，琉球独自の風水思想や易・五行思想から軸線屈折の意義を積極的に捉える考え方があるが，本稿はそれをアプリオリに決めてかかるアプローチをとっていない．首里城御庭とその周辺建物は，時代をおって逐次建設され，あるいは焼失しあるいは改変されてきた，長い歴史的時間の中での蓄積の結果であることは確かであり，そこに何か明瞭な規範的整備計画のようなものは発見されていない．

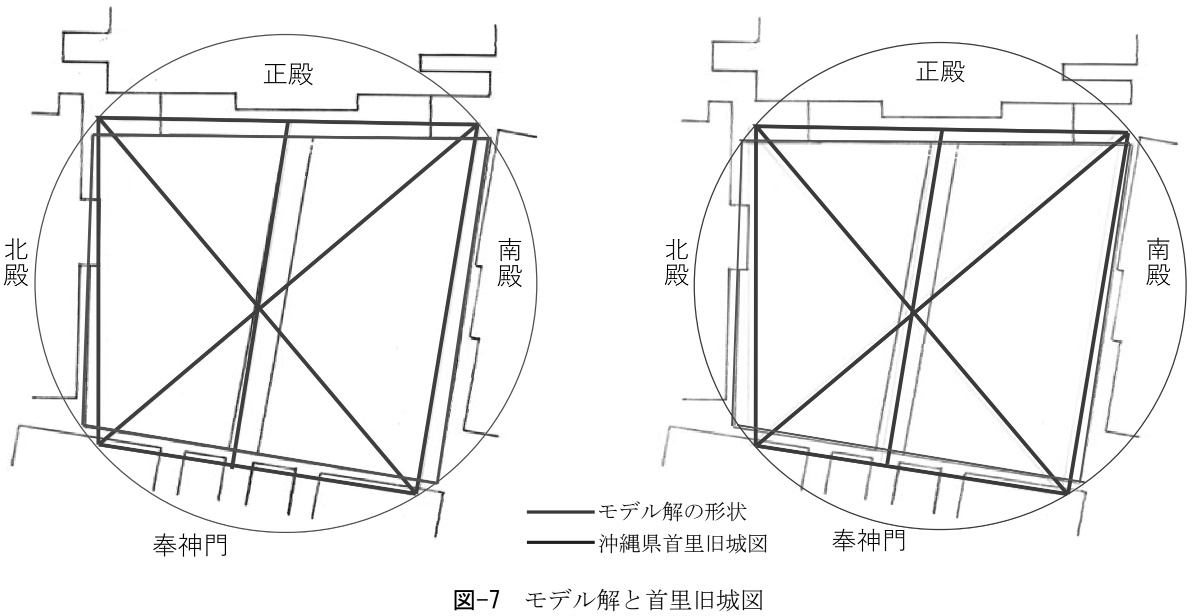

図-7　モデル解と首里旧城図

沖縄県首里旧城図 [11]（出典：那覇市歴史博物館提供）の御庭部分をトレースした図上にモデル解を加筆図示したもの．左図のモデル解は，旧城図から得られる外接円を所与として算出したもの．右図は，左図のモデル解を対角線交点が旧城図の浮道の中央付近に位置するよう南方に平行移動させて表示したもの．

しかし，仮説群の下に理論的に導出される御庭の空間には，顕著に豊かな幾何学的秩序が内包され，しかも実際の御庭の幾何形状に相応に整合している．首里城御庭が全く偶然にこのような豊かな幾何学的内容をもつに至ったとはなかなか考えにくいように思う．

かつて首里城御庭とその周辺の建物の整備に携わった技術者たちが，モデル解の示す幾何学的秩序を有する御庭の設計理念のようなものを（たとえそれがインプリシットなものでなおかつ曖昧なものであったにせよ）醸成・継承しつつ，既成事実や現実の諸要請とすり合わせながら，現実の御庭を逐次具現化していったのではないか，と筆者は想像する．設計理念と現実の関係は，いわば熱力学における理想気体と実在気体（ファンデルワールス気体）のようなものと考えることができるのではなかろうか．

(2) 空間設計における「ずれ」と「ずらし」

首里城御庭では，9°の軸線屈折を内部に取り込んだ設計となっているため，正殿と浮道は正対していない．伊従[4)]は，正殿正面の石階段の耳石を末広がりに「ハ」の字に変え，同時に正殿の唐破風向拝を拡大したことをもって，（屈折を）「目立たなくするため」の工夫とみているが，これは屈折あるいは「ずれ」をネガティブな要素として受動的に捉える考え方といえよう．

一方，神社の参道などでは，屈折やクランクなどを入れて，空間を分節化することや別空間へのいざないの積極的な演出がまま見られる．

受動的に捉えれば「ずれ」への人為による対応ということになり，逆に積極的に捉えれば，何らかの意図をもった人為的な「ずらし」ということになる．

沖縄の街で多々見られる T 字路における「石敢當」や民家入り口に設けられる「ヒンプン」などといった，邪気を避ける人為的な造作の風習は，積極的な「ずらし」の発想とどこか共通する点があるように思える．いずれにせよ首里城御庭の軸線屈折と変形四辺形には，こうした空間文化に関する，本土とは大きく異なる，琉球の民俗的特性が潜んでいるように感じられる．

(3) 広場として見た御庭の性質

以上のように軸線の屈折を内部に取り込み，幾何学的秩序を内包した変形四辺形の首里城御庭だが，本来的には王宮内部の祭祀・儀式空間であるから，市民的な利用を前提とする「広場」（パブリック・スペース）と直ちに同類視するわけにはいかない．

カミロ・ジッテの「広場の造形」[12)]を基に，広場設計のポイントをまとめた小野寺[13)]は，広場設計の要点として，1)広場の中央を自由にしておくこと，2)（建築物で囲まれるなど）閉ざされた空間とすること，3)（主景に対して適切な）広場の大きさと形をもつこと，4)不規則な形態とすること，5)広場が群で構成されること，の５点を挙げている．

御庭は，明らかに 1)～4)の特性を満たすが，西側の下之御庭や南西側の京の内をも含めれば，さらに 5)も該当することになる．竹内[14)]によると西洋にも不規則な形状の広場はいくつかあるが（例えば，シエナのカンポ広場），それらは「結果として」不規則な形状になったものであり，軸線屈折をとりこんで意図して不規則な形状を実現したともみられる首里城御庭のケースは非常にユニークな存在ではないかと考えられる．冒頭で挙げた逆遠近法も含めて，首里城御庭の広場としての優れた特質を再発見し，わが国を代表する広場的空間の一つとして再認識する余地が大いにあるのではないだろうか．

(4) 中国における数学的知見をどうみるか？

以上のように，御庭には，興味深い幾何学的秩序が内包されている可能性が高い．といってもそれは，直ちに当時から厳密な数学知識を駆使して御庭が演繹的に設計されたということを意味するものではない．むしろ常識的には，技術者たちの幾何形状に関する深い関心と知的洞察によって，試行錯誤を経てインプリシットな設計理念が経験的に創り出され，継承されてきたと考えられるのではなかろうか．

一方，琉球は長く中国の朝貢国であり，中国から冊封使も来訪し，琉球王府の要人もまた中国に渡って文化や技術を導入した．例えば，冒頭に挙げた琉球王府宰相の蔡温も 18 世紀清国盛期・康煕帝の時代に福州に留学している．中国の科学技術については，ジョゼフ・ニーダムが大著「中国の科学と文明」をまとめている[15)]．その中の数学の巻によると，早くも 3 世紀には趙君卿が三平方の定理を証明し，11 世紀には沈括が代数学と平面幾何学を発展させ，13 世紀には郭守敬が既に球面三角法を使用しているという．特に沈括は，土木工事や測量を司る高官でもあり，実用上の観点から直角三角形に関する幾何学を充実させたとされている．

こうした数学的知識がどの程度琉球に持ち込まれ，さらに首里城の空間計画に影響を与えたのかどうかは不明だが，その可能性がないわけでもなかろうと思われる．

5. むすび

本稿は，外接円の幾何学的フレームと対角線の交点に着目し，御庭の幾何形状を数学的に分析することを通じて，首里城御庭が屈折角を内部に取り込みつつ幾何学的秩序を巧妙に具現化させた構造となっている可能性を論じたものである．そのユニークな形状は，空間設計原理に関する独立した４つの異なる数学的仮説から同一かつ唯一の解として理論的に導出されることが明らかになった．また，得られたモデル解が平成復元の首里城御庭，さらに戦災前の姿を表す「沖縄県首里旧城図」の形状を比較的よく再現することを示した．

いずれにしても，首里城御庭は，わが国はもとよ

り世界の優れた広場設計事例の中にあっても，極めてユニークで興味深い知的奥行きをもつ存在であるように思われる．その理由は，本稿で述べたユニークな幾何学的特性の他にも，1)多様なスケールの空間認識が重層的に具現化されていること，2)オーガニックな要素が強いように思われる沖縄の空間設計にあって高度に人工性の高い広場空間であること，3)自然地形（風水思想）が規定する二つの軸線の屈折点付近に，新たに人工的な軸線を挿入しそこに象徴的広場を創出していること，などが挙げられる．

このように極めて興味深い特性をもつ御庭ではあるが，魅力に溢れた首里城の中にあっては，華麗な建築物や装飾群の蔭に隠れ，御庭自体の知的価値が必ずしも十分にはアピールされてこなかったように思われる．筆者は，御庭のプレゼンス向上を望んでやまない．

謝辞

本稿の分析と執筆にあたっては，伊従勉氏（建築史）と前城直子氏（沖縄文化）には，数々の有益な助言をいただいた．特に伊従氏のご教示がなければ「沖縄県首里旧城図」上での比較は行いえなかった．また，涌井史郎氏（造園），内藤廣氏（建築家），藤井恵介氏（建築史），伊藤香織氏（都市計画），福井恒明氏（景観デザイン），小野寺康氏（空間デザイン）には，本稿について刺激的な意見交換を行う機会をいただいた．また，大里知子氏（沖縄学）と法政大学沖縄文化研究所，那覇市歴史博物館，沖縄県立博物館情報センター及び首里城公園管理センターには，資料提供ほかのご援助いただいた．末筆ながらここに記し，深く感謝する次第である．

補遺１ 四つの仮説からの解の導出

屈折角θを与件として，仮説１～仮説４それぞれの御庭形状の解（具体的には∠BOH の角度ϕ）をθの関数として導出する．そして，４つの仮説が同一の解をもたらすこと，すなわち４つの仮説が相互に等価であることを示す．

仮説１：「浮道 HJ が対角線交点 C を通るようにする」から導かれる解の導出

図-3 において，二本の対角線の交点を C，浮道 HJ と BD の交点を P とする．円（半径１）の中心を原点に直交するｘｙ座標（y 軸：軸線ℓ_E）を置く．C と P の両点のｘｙ座標が一致する条件を求めることによって解が得られる．

一方，**図-8** において，対頂角の性質により，$\angle DOL=\phi$，よって，$\angle EOM=\angle DOM=\phi-\theta$．
したがって，$\angle EOL=\phi-2\theta$．

よって，A の座標は，$(-\sin\phi,\ \cos\phi)$，E の座標は，$(\sin(\phi-2\theta),\ -\cos(\phi-2\theta))$ となる．

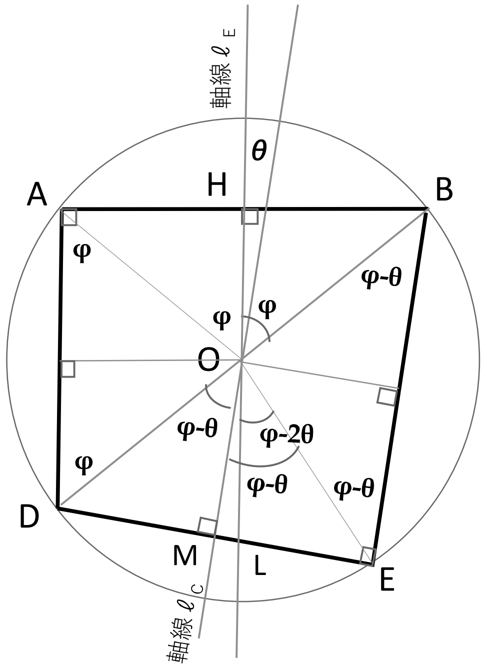

図-8 仮説１・仮説４の補足図

これより，**図-3** 上の直線 AE の方程式が得られる．直線 BD の方程式は，勾配が $\cos\phi/\sin\phi$ で原点を通ることから得られる．両者を連立させることにより，C の座標は，

$$(-\sin\theta\sin\phi/\sin(2\phi-\theta),\ -\sin\theta\cos\phi/\sin(2\phi-\theta))$$

となる．同様に直線 HJ の方程式は，勾配が $\cos\theta/\sin\theta$ で，H 点 $(0,\ \cos\phi)$ を通ることから得られる．BD の方程式と連立させると，P の座標は，

$$(-\sin\phi\cos\phi\sin\theta/\sin(\phi-\theta),\ -\cos^2\phi\sin\theta/\sin(\phi-\theta))$$

となる．仮説１より，両点の座標が一致する条件から以下が得られる．

$$\sin(\phi-\theta)=\cos\phi\sin(2\phi-\theta).$$

なお，P，C の両点ともに同一の BD 上にあるため x 座標と y 座標のどちらかが一致すれば，他は自動的に一致する．

上記の条件式に加法定理と二倍角公式を適用して整理すると，

$$\cos(2\phi-\theta)=0$$

が得られる．これより，$2\phi-\theta=\angle R$（直角），すなわち，$\phi=(\angle R+\theta)/2$ となる．

仮説２：「対角線を直交させる」から導かれる解の導出

上記の A，E の座標から直線 AE の勾配を求めると，

$$-\cos(\phi-\theta)/\sin(\phi-\theta)$$ となる．

一方，直線 BD の勾配は，$\cos\phi/\sin\phi$ となる．

AE と BD が直交するならば，両者の勾配の積は-1 とならなくてはならない．したがって，

$$(-\cos(\phi-\theta)/\sin(\phi-\theta))\cdot(\cos\phi/\sin\phi)=-1.$$

これより，

$\cos(\phi-\theta)\cos\phi - \sin(\phi-\theta)\sin\phi = 0.$
加法定理を用いて，
$\cos(2\phi-\theta) = 0$
が得られる．これより，$\phi = (\angle R + \theta)/2$ となる．

仮説３：「対角線交点と円の中心との距離を最小化する」から導かれる解の導出

上記で求めた C の座標は，外接円の半径を r とした時には，

$(-r\cdot\sin\theta\sin\phi/\sin(2\phi-\theta),$
$-r\cdot\sin\theta\cos\phi/\sin(2\phi-\theta))$

となる．
これより，仮説の目的関数である C 点と O 点の距離を L とすると，

$$L^2 = (-r\cdot\sin\theta\sin\phi/\sin(2\phi-\theta))^2 + (-r\cdot\sin\theta\cos\phi/\sin(2\phi-\theta))^2$$
$$= r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)/\sin^2(2\phi-\theta)$$
$$= r^2\sin^2\theta/\sin^2(2\phi-\theta) \quad \text{となる．}$$

よって，$L = r\cdot\sin\theta/\sin(2\phi-\theta)$．
この値は，$\sin(2\phi-\theta)$の値に応じて変動するので，L を最小化するには，$\sin(2\phi-\theta)= 1$ となればよい．
∴ $2\phi-\theta = \angle R$ の時，すなわち $\phi = (\angle R + \theta)/2$ の時，C は O 点に最接近することになる．ここで CO 間の最小距離は，$r\cdot\sin\theta$ となる．

仮説 4：「御庭の面積を最大化する」から導かれる解の導出

図-8 において，外接円の半径を r として，

△AOB の面積：$2r\cdot\sin\phi\cdot r\cdot\cos\phi/2$
$= r^2\sin\phi\cos\phi$．　同様に，
△AOD の面積： $r^2\sin\phi\cos\phi$，
△DOE の面積： $r^2\sin(\phi-\theta)\cos(\phi-\theta)$，
△EOB の面積： $r^2\sin(\phi-\theta)\cos(\phi-\theta)$．

∴ 目的関数である□ABED の面積を S とすると，
$$S = 2r^2(\sin\phi\cos\phi + \sin(\phi-\theta)\cos(\phi-\theta)).$$
二倍角公式より，
$$= r^2(\sin 2\phi + \sin 2(\phi-\theta)).$$
さらに和積公式より，
$$= 2r^2\sin((2\phi + 2(\phi-\theta))/2)\cdot\cos((2\phi-2(\phi-\theta))/2)$$
$$= 2r^2\cos\theta\cdot\sin(2\phi-\theta).$$
S の値は，$\sin(2\phi-\theta)$の値に応じて変動し，$\sin(2\phi-\theta) = 1$ の時に最大となる．
∴$2\phi-\theta = \angle R$，つまり $\phi = (\angle R + \theta)/2$ の時，□ABED の面積は最大となる．
この時，面積は，$2r^2\cos\theta$ となる．

以上より，４つの仮説から同一の解が導かれ，また逆に $\phi=(\angle R+\theta)/2$ であれば各仮説が満たされるので，４つの仮説が相互に数学的に同値、すなわち等価であることが明かとなった．

補遺２ 浮道と東辺・西辺の幾何学的関係性

仮説から導かれる解は，対角線が直交し，その交点を浮道が通過するというものとなった．**図-4** からわかるように，対角線交点 C を直角頂点として対向する二つの直角三角形は相似であり，しかも，浮道 HJ は，片方（正殿側）の直角三角形の斜辺（東辺）に対する中線となり，同時にもう片方（奉神門）の直角三角形の斜辺（西辺）への垂線となっている．そこで，一方からもう一方を導出し，両者が相補対称的関係にあることを示す．ここで、**図-9** において，∠HBC =ζとおく．

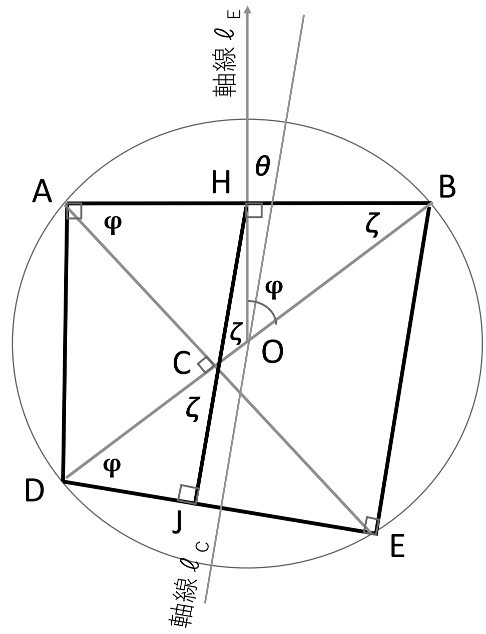

図-9　モデル解における浮道の幾何特性

まず，対角線が直交しているモデル解の下で，AB の中点 H から対角線交点 C を通って，DE に交差する点を J とする．このとき，

命題１： AH = BH ⇒ HJ⊥DE （中線⇒垂線）

を証明する．
（証）　直角三角形の性質(注 4)と対頂角より，
∠DCJ =∠HCB =∠HBC =ζ，
一方，∠CDJ =∠BAE = ∠R-ζ．
よって，∠CJD= 2∠R -（ζ+∠R-ζ）=∠R（直角）．
これより，HJ⊥DE. （QED）

次に，同じくモデル解の下で，交点 C より DE に垂線を下ろし，その足を J とし，JC を延長し AB との交点を H とする．このとき，

命題２： HJ⊥DE ⇒ AH = BH （垂線⇒中線）

を証明する．
（証）　∠HCB =∠DCJ = ∠R-∠CDJ = ∠R-∠BAC
= ∠R-(∠R-ζ) =ζ.
よって，CH = BH，同様に，CH = AH.

これより，AH = BH. (QED)

以上二つの命題により，AH ＝ BH ⇔ HJ⊥DE. すなわち，両者は数学的には同値であり，幾何学的にいえば相補対称的な関係にあることになる.

NOTES

注１） ローマのカンピドリオ広場（ミケランジェロ作）は，広場の入り口から正面の市庁舎に向け，広場の横幅が奥に向かって広がっていく逆遠近の形状がとられている．首里城御庭もまた，意図的かどうかは別にして，奉神門から正殿に向かって逆遠近形状となっている．これは広場の奥を広く，大きく見せる効果をもつものと考えられる.

注２） 御庭の形状については、平成復元の建設記録など公式文書から観光パンフレットまで，「台形状」という表現が多用されている．ところが実際は，御庭の四辺形の二組の対辺はいずれも平行せず，幾何学上の「台形」とはなっていない．「変形四辺形」と呼ぶのが適切であろう.

注３） 東方、海のかなたのニライカナイから創世神アマミキヨが久高島に来って琉球を開闢したという伝説から、琉球では東西軸重視（古代日本も同様）の思想が強いという [1].

注４） ここでいう「直角三角形の性質」とは，初等幾何学で知られるところの「直角三角形△ABC の斜辺の中点 M と直角頂点 A を直線で結べば，BM = CM = AM となり，△ABC が二つの二等辺三角形に分けられる」ことを指す.

REFERENCES

1) 前城直子：首里城の思想性 易・五行思想からの照射，国士館短期大学紀要 第 26 巻，2001 年
2) 古川博也：那覇の空間構造，沖縄タイムズ社，1989 年
3) 伊従勉：中華礼制蕃国礼執行装置としての首里城，（高倉倉吉監修：首里城を解く，勉誠出版に所収），2021 年
4) 伊従勉：琉球祭祀空間の研究，中央公論美術出版，2008 年
5) 伊従勉：沖縄県史各論編３，遺構からみる古琉球の首里城，沖縄県教育委員会，2010 年
6) 秋元秀一・浦山隆一：首里城の明堂概念について 御庭ゾーンの配置構成原理に関する研究，日本建築学会大会学術講演梗概集（九州），1989 年
7) 浦山隆一・秋元秀一：首里城の象徴空間構成 風水思想の築城計画に及ぼした影響，日本建築学会大会学術講演梗概集（九州），1989 年
8) 宮城栄治：琉球王府 首里城，第３章 立地と基本プラン，㈶海洋博覧会記念公園管理財団，1993 年
9) 平良啓：琉球王府 首里城，第６章 御庭と周辺施設，㈶海洋博覧会記念公園管理財団，1993 年
10) ㈶海洋博覧会記念公園管理財団：琉球王府 首里城，御庭周辺起絵，1993 年
11) 那覇市歴史博物館所蔵：沖縄県首里旧城図，横内家文書より，明治期
12) カミロ・ジッテ：広場の造形，大石敏雄訳，美術出版社，1968 年（原書は 1901 年）
13) 小野寺康：広場のデザイン「にぎわい」の都市設計５原則，彰国社，2014 年
14) 竹内裕二：イタリアの路地と広場（上），彰国社，2001 年
15) ジョセフ・ニーダム：中国の科学と文明 第４巻 数学，東畑ほか監訳，思索社，1991 年（原書は 1975 年）
16) 伊東忠太：琉球 建築文化，東峰書房，1942 年
17) 沖縄開発庁沖縄総合事務局国営沖縄記念公園事務所：国営沖縄記念公園首里城地区 建設の記録［平成の復元］，1994 年
18) 同 計画・設計の記録［平成の復元］，1995 年
19) 沖縄県埋蔵文化センター調査報告書：首里城跡 正殿地区発掘調査報告書，2016 年
20) ㈶海洋博覧会記念公園管理財団：首里城の復元～正殿復元の考え方・根拠を中心に，2003 年
21) 首里城研究グループ：首里城入門 その建築と歴史，おきなわ文庫，1997 年

（Received April 10, 2023）

ANALYZING THE GEOMETRIC STRUCTURE OF SHURIJO-CASTLE'S UNAH-PLACE IN OKINAWA

Hitoshi IEDA

Unah-place of Shurijo-castle in Okinawa, Japan, is a historical quadrilateral place with no parallel sides, surrounded by four wood buildings of national treasures, which was constructed step by step, often lost by fire, and repeatedly reconstructed till now. The geometric shape of the place is a kind of "mystery"; opposing two vertices have right angles which implies that the four corners of the place locate on a circle, however, the straight causeway, Ukimichi, coming from the gate confronts the center of the main buildings noticeably askew by 9 degrees. This paper discusses the geometry of the place based on a hypotheses-comparison approach, and suggests that Unah-place might have been constructed containing an amazing significance of geometric harmony.