

石垣秘伝書作図の説明と現代数学による近似

福田光治

正会員 KGIE (〒862-0951 熊本市中央区上水前寺 1-1-9)

E-mail: fuku564b@xug.biglobe.ne.jp

石垣秘伝書とされている石垣秘伝之書と後藤家文書から石垣の反り曲線を直接求めることはできない。石垣秘伝書は個別的に一間ごとの調整量が与えられ¹⁾、反りはそれらの増分量の集積結果として求めなければならない。

本論文は両秘伝書の技法を現代数学で統一的に解釈し、二つの伝統技術の意味を探ろうとするものである。反りは日本伝統の軒返しで一般化されている。伝統的な軒返しの表現方法の中で解釈して、はじめて石垣秘伝書の奥義に触れることができると考えた。本論文では作図法としての相似則的手法という視点で反りの表現方法の分類を試みた。

北垣は石垣秘伝之書は熊本型、後藤家文書は金沢型と分類し、その差異を文章での説明している²⁾。反りを日本伝統の軒返しとして一般化することによって、熊本型と金沢型の差異の特徴を明確にする。

Key Words: stone wall, traditional curvature, modern mathematics, similarity

1. はじめに

城郭石垣曲線の代表的な作図方法は石垣秘伝之書、後藤家文書に体系化されており、その作図法が説明されている¹⁾²⁾。両者の作図方法は異なる。しかし作図法を現代数学で解釈し、熊本城城郭石垣に適用してみると、作図法は異なるが、殆んど類似している近似曲線になる。

石垣秘伝書の石垣勾配は、石垣の安定論から誘導されたことを期待したいが、江戸時代の技術レベルを考えると、経験論以上の力学的思想を想起することはできない。

しかしこの曲線は偶然に得られたものではない。柳井は両者の石垣曲線に対して、極限関数を求めており、後藤家文書の石垣曲線は放物線に、石垣秘伝之書は対数関数に収束することが示されている³⁾⁴⁾。

北垣は後藤家文書は金沢型、石垣秘伝之書は熊本型と説明としている²⁾。また北垣は陰陽和合の作図法¹⁾²⁾として説明している。しかしイメージ化することが困難であるので、現代数学で解釈することによりこれらの意義を明確に把握できると期待した。本論文は個々に紹介されている石垣秘伝之書と後藤家文書による石垣作図法を、日本の伝統的な軒返しの中に位置付けることによって、日本の伝統規矩術の中で解釈する試みである。

2 石垣秘伝之書の説明

北垣は規矩術に関係させながら石垣秘伝之書の作図法を説明している¹⁾。図-1 ように整理すると、石垣秘伝

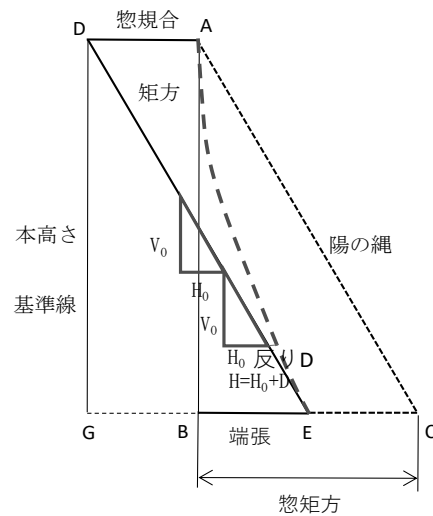


図-1 石垣の形態定義

之書は本高さと惣規合を等分割する方法として紹介される。分割数は10で、図-2のように惣規合を等分割し、その値を下から数えた間番号で割り振り、反り変化量を図-2のように逆比例関数で表示している。惣規合を R とすると式(1)~(3)で表現できる。

$$D = \frac{R}{9} \quad (1), H_i = H_{i-1} - d_{i-1} \quad (2), d_i = \frac{D}{10-i} \quad (3)$$

しかし式(3)を得たとしても日本伝統技術としての軒返し工法と比較することは困難である。このため式(3)

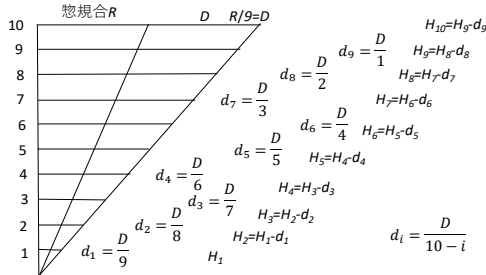


図-2 石垣秘伝之書の作図法

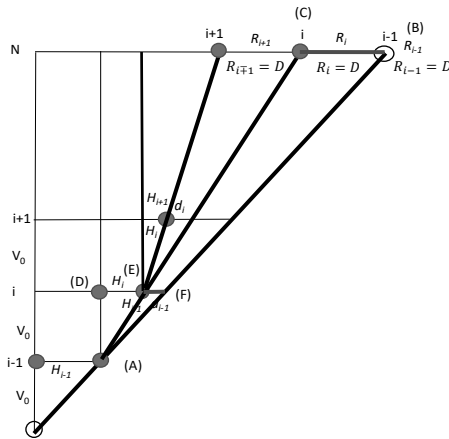


図-3 石垣秘伝之書の解釈

を現代数学で誘導しなければならない。

根元から分割番号を数え、(i-1)まで作図されているとして、(i)の位置を求める場合、図-3が活用できる。図-3では H_{i-1} と天端の(i-1)が既知で一つの線で結ぶ。次のステップは(i-1)と(i)を結ぶ直線で表現され、この図から d_i が得られる。天端の R_i は既知($R_i=D$)であるから、相似則から d_i を誘導できる。高さの分割幅 V_0 、天端惣規合分割幅を R_i として、分割数を N で一般的に表現すると図-2の関係が誘導される。

$$\frac{R_i}{\{N-(i-1)\}V_0} = \frac{d_{i-1}}{V_0} \quad (4), d_{i-1} = \frac{R_i}{N-(i-1)} \quad (5)$$

$$d_i = \frac{D}{N-i} \quad (6)$$

石垣秘伝之書は反りの増分で作図され、反り量は示されていない。しかし図-3から図-4への拡張は容易である。図-4のように原点移動放射状三角形相似則で解釈すると反り量が容易に得られる。

図-4より原点移動放射状三角形相似則では一般的には式(7)で表現される。

$$D_i = id_1 + (i-1)d_2 + \dots + 4d_{i-3} + 3d_{i-2} + 2d_{i-1} + d_i \quad (7)$$

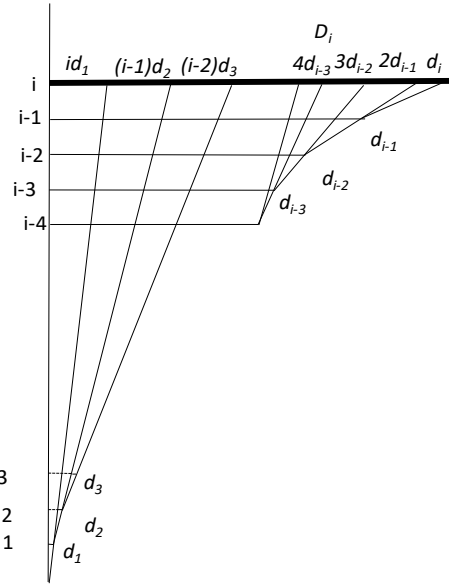


図-4 原点移動放射状三角形相似則における反り

石垣秘伝之書では式(6)で割り付けられるので、この式を式(7)に代入する。

$$D_i = \left\{ \frac{i}{N-1} + \frac{i-1}{N-2} + \dots + \frac{4}{N-(i-3)} + \frac{3}{N-(i-2)} + \frac{2}{N-(i-1)} + \frac{1}{N-i} \right\} D \quad (8)$$

極限值を考慮して積分で形態を表現する。

$$D_i = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \frac{x_b - x}{1-x} \right\} D dx \quad (9)$$

$$D_i = Dx_b - D(x_b - 1) \ln(1 - x_b) \quad (10)$$

石垣秘伝之書の反りは極限值として評価すると式(10)に示すように対数関数表示になり、あとで示す柳井と同じ結論になる。

3 柳井の展開方法

柳井は図-5によって茅負反りを表現している。

oからLまでの長さを等分割し、その位置に割り当てられる反りが定義される。茅負の伝統工法では、ある間の勾配が言葉で説明されているが、柳井を現代風数学で解釈して分割数7の反り量を示している。本論文では分割数を N として、ある間の位置(i)の反りを y_i で表す。

$$y_i = \frac{i}{N} \frac{i+1}{N+1} D \quad (11)$$

また北垣の説明を参考にしながら石垣秘伝之書、後藤家文書の作図法を、割り付け、勾配、微分、積分、数列、包絡線などに現代数学を駆使し、石垣秘伝之書の反り曲線は対数関数型、後藤家文書の石垣曲線は放物線型と結論している³⁾。

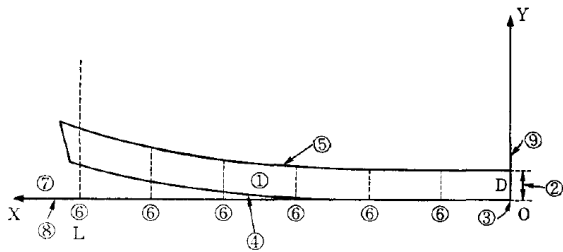


図-5 茅負反り図⁴⁾

4 和算「腕背(えんはい)問題」と相似則

石垣秘伝書の規合を場に割り当てる作図法では、腕背(えんはい)問題で示される相似則が重要と考えた。参考文献6)の内容は全く理解できないが、関孝和の腕背問題として示されている作図法は相似則の応用と考えると理解ができる。

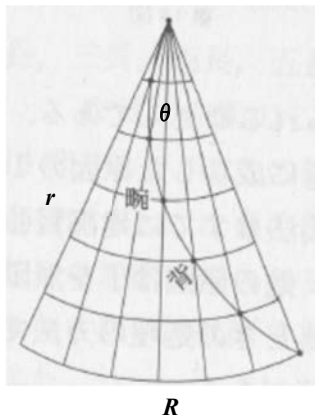


図-6 腕背問題⁶⁾

半径 r 、外周 R 、内角 θ の扇型円弧が与えられている。扇型の半径、外周、内角をそれぞれ N 分割し区画化する。原点から区画化された交点を順番に連ねていくと曲線になる。作図法を現代数学で解釈する。

$$H = \frac{r}{N} \quad (12), D = \frac{R}{N} \quad (13), d = \frac{\theta}{N} \quad (14)$$

原点から扇形に順番に付した区画の番号を i とし、その位置での動径を r_i 、円周を l_i すると、外形に対して相似則が適用できる。

$$r_i = iH \quad (15), l_i = r_i d \quad (16),$$

$$l_i = \frac{i^2}{N^2} r \theta \quad (17)$$

区画化された扇形の円周は区画番号 i の二乗に比例する。柳井流の展開では i を連続パラメータにすると曲線は放物線になる。腕背曲線を反り曲線と解釈すると、反りを放物線で近似することになる。従って反り曲線の型を知らなくても簡単な相似則を基礎とする作図で反りが表現できる。

5 後藤家文書作図法と相似則

北垣の解釈¹⁾を著者流に読み替えてみた。図-7がその基礎図である。北垣は間数を \ominus などとし、天端の割り付け順番を $\textcircled{1}$ などと表現して位置を明確にする。

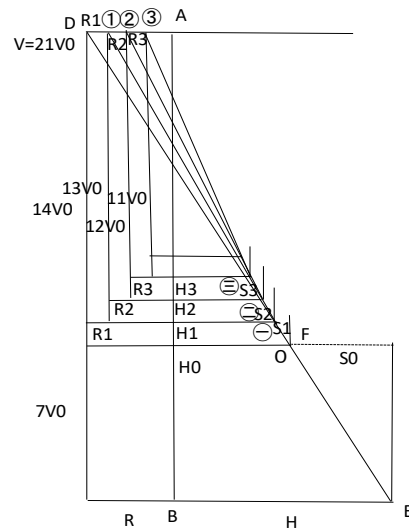


図-7 反り調整量と割り付け

後藤家文書の石垣は下3分の1の部分は直線、その上が14分割されて反りの調整量が割り付けられる。14分割の区画を間として数え、間数の加算値を NR とする。また惣規合量を R として、各間の割り付けの基礎量を D として、天端に置く。

$$NR = \sum_{i=1}^{14} i = 105 \quad (18), D = \frac{R}{NR} \quad (19)$$

ここまでは文献1)による北垣の説明になる。さらに北垣は各間数での規合の割り付け方を展開する。各間数の高さ位置と対応数天端の位置を結ぶ線の勾配を指金の呼び方と回転による作図で解釈されていくが、門外漢が理解することは困難である。このため原点移動放射状三角形による相似則で解釈してみた。分割数 N 、割り付け量を R_i として表現すると式(20)になる。 $N=14$ で説明する北垣の計算結果¹⁾に対応する。

$$R_i = (N + 1 - i)D \quad (20)$$

北垣の後藤家文書の説明は図-8で追跡できる。 H_i まで作図されていると考え、次のステップの H_i を求める。天端での対応する惣規合の割り付けを R_i として原点移動放射状三角形(E)(C)(D)で追跡する。底辺幅と高さの関係は比例している。

$$\frac{(N - i + 1)V_0}{H_{i-1} - R_i} = \frac{(N - i)V_0}{H_i} \quad (21)$$

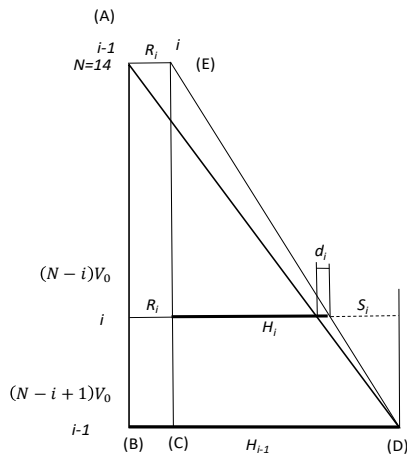


図-8 原点移動放射状三角形相似則による解釈

R_i は既知であるから H_i が得られる.

$$H_i = \frac{(N-i)}{(N-i+1)}(H_{i-1} - R_i) \quad (22)$$

次に三角形(A)(D)(E)により追跡すると、放射状三角形相似則から容易に関係式が得られる.

$$\frac{R_i}{(N-i+1)V_0} = \frac{d_i}{V_0} \quad (23), d_i = \frac{R_i}{N-i+1} \quad (24)$$

式(24)に式(20)を代入すると、反り変化量は D に統一される.

$$d_i = D \quad (25)$$

原点移動放射状三角形相似則から得られる式(7)に代入すると式(26), (27)になる.

$$D_i = (i + (i-1) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1)D \quad (26)$$

$$D_i = \frac{i(i+1)}{2}D \quad (27)$$

柳井は勾配に着目し、包絡線、偏導関数の知識を駆使して反りは放物型に近づくことを示している.本論文の展開でも式(27)のように後藤敬文書の反り表現として放物型が誘導された,

6 日本建築における軒反り

反り部分の曲線はいくつかの形態がある⁷⁾. 垂木は等分割で配置されるので、反り返し元での割り付けが重要である. 図-9に示すように、反りの始まりと終わりは反り元と口枠と命名される. 様々な反りの形態があるが、本論文では③-1型とされる図-10を展開してみた.

$$\theta = 90, \theta_0 = \frac{\theta}{N}, V_0 = \frac{V}{N}$$

として反りを y_i とすると式(28)になる.

$$y_i = R(1 - \cos(i\theta_0)) \quad (28)$$

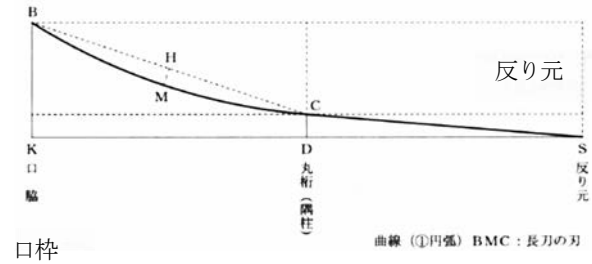


図-9 反り曲線形態⁷⁾

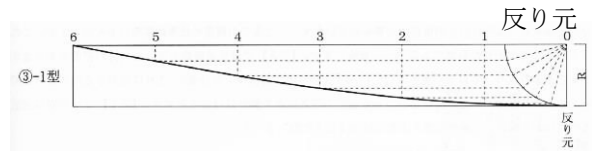


図-10 北尾③-1型⁷⁾

したがって i 間と $(i-1)$ 間の絶対反り量の差が反りの増分 d_i になる.

$$d_i = 2R \sin \frac{2i-1}{2} \theta_0 \sin \frac{1}{2} \theta_0 \quad (29)$$

7 日本伝統工法としての反りと石垣秘伝書

軒反り返しと石垣秘伝書工法を併記することによって石垣秘伝之書、後藤家文書の石垣作図方法を統一化でき

表-1 反りの作図法

作図法	伝統的作図法
直交座標作図法	軒反り曲線, 屋根破風曲線
原点固定放射状三角形相似則	腕背問題, 千鳥破風曲線
原点移動放射状三角形相似則	後藤家文書, 石垣秘伝之書

る. これまでの検結果を踏まえると表-1, 2のように整理できる.

反りの作図法として直交座標系と放射状三角形相似則に区分される. 後者はさらに細分化され、原点固定放射状三角形相似則と原点移動放射状三角形相似則に分けることができる. 石垣秘伝之書と後藤家文書は原点移動放射状三角形相似則に分類される.

また惣規合の分割とその割り付け法、また反り量により表-2が整理できる. 表-2に示すように、日本の伝統工法としての茅負、屋根破風は割り当てられた位置の反りを求める式になる. これらに対し、石垣秘伝之書、後藤家文書では惣規合の割り付けと順次展開していく変化量をあらかじめ決めなければならない. 石垣秘伝之書は反り元の増分量は等しく、後藤家文書では数列による総和数が用いられる.

右端には参考資料として石垣秘伝之書の反りは極限的

表-2 反り表現方法

秘伝	高さ分割条件	反り吸収高さ	分割	反り基準長さ	割り付け規合変化量	反り変化量	反り
			N	D	R_i	d_i	y_i
茅負	等分割	V	N				$R_i(i+1)/N/(N+1)$
屋根軒下破風③型	等分割	V	N				$R(1-\cos(90/N \times i))$
石垣秘伝之書	等分割	V	10	$R/(N-1)$	D	$D/(N-i)$	極限值として対数表示, $N > i$ の場合放物型表示
後藤家文書	下部1/3直線, 上部2/3等分割	2/3V	上部14	$2R/N/(N+1)$	$(N-i+1)D$	D	$i(i+1)/2D$
			下部	0	0	0	

惣規合 R

には対数関数表示, 後藤家文書では放物型で表現される。茅負は比例関数, 北尾屋根軒返しは三角関数表示である。

$$r_i = r_0 \exp(\theta_i \tan \varphi) \quad (30)$$

8 対数らせんによる城郭石垣曲線

図-11 に示す対数らせんも日本の城郭石垣曲線の近似に活用されている^{7) 8)}。対数らせんによる近似化では動径 r_0 , 初期値からの内角 θ_i が必要である。

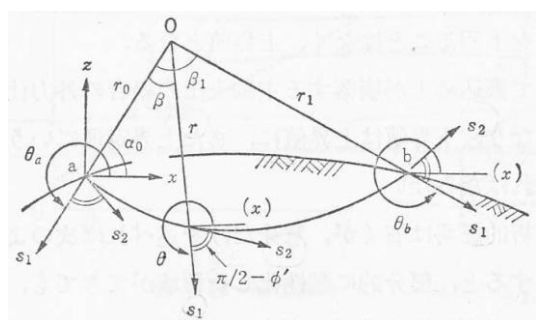


図-11 対数らせん法⁸⁾

7 熊本城城郭石垣曲線の近似精度

熊本城城郭石垣を対象に, 石垣秘伝之書, 後藤家文書, 茅負, 北尾軒返し, 対数らせん法などにより近似精度を比較した。図-12 は平櫓台石垣, 図-13 に四間櫓台石垣を近似化した。図中の茅負の近似では分割数を9と14とした。しかしいずれの式も視覚的には近似していると評価できる。後藤家文書の作図は石垣下3分の1は直線であるが, 熊本城城郭石垣反り曲線の近似には大きな影響は与えていない。石垣の下方は「陰陽和合」の陰の部分に相当し, 直線的な傾向を強調するという技術思想が共有されている。

細部を点検するために天端の近似度を示した。図-14, 15 である。図-14 では石垣秘伝之書がより反りを表現しているようにも見えるが, 図-15 のように大きな反りは特異である。従って一般的には, 本論文で取り上げた石

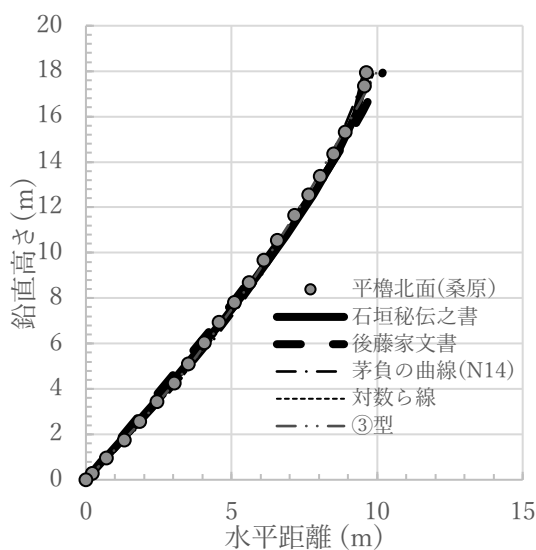


図-12 平櫓台石垣近似曲線の精度

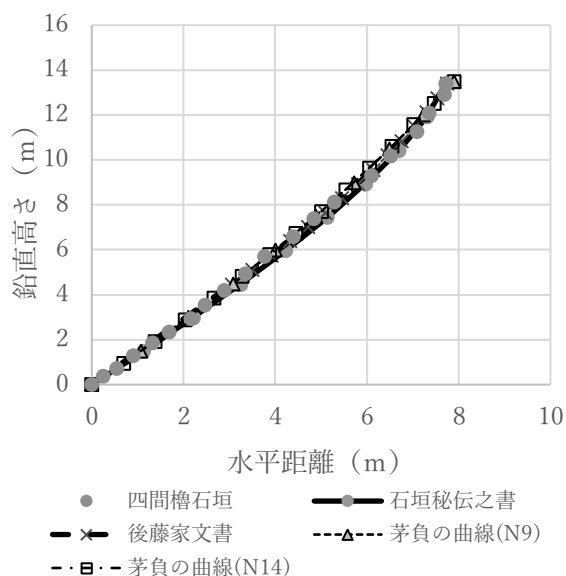


図-13 四間櫓台石垣近似精度の比較

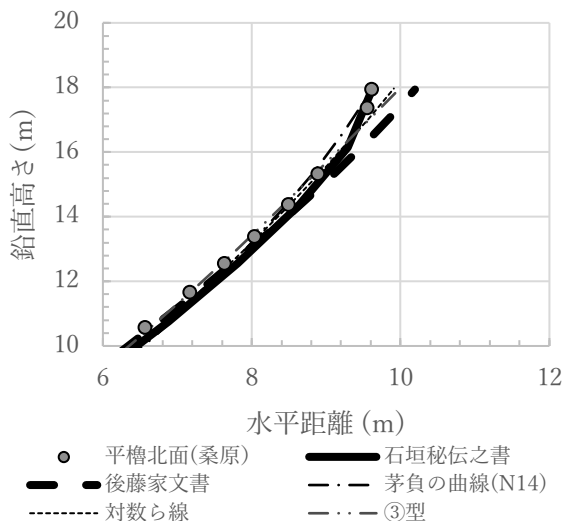


図-14 平檜台天端付近近似精度

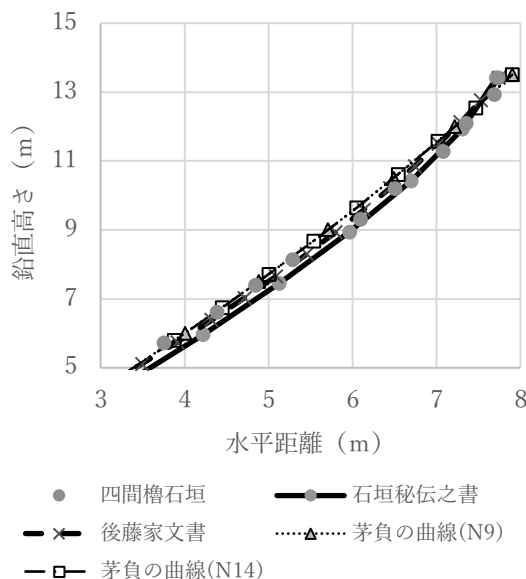


図-15 四間檜台石垣天端付近近似度

垣曲線の優劣を評価することは困難である。概略的にはここで点検した手法はいずれも良好な近似度を与える。

9 北垣「熊本型」「金沢型」の解釈

北垣は石垣秘伝之書を「熊本型」、後藤家文書を「金沢型」と区分している²⁾。その違いは文章で説明されるが、区分した理由を門外漢が理解することは困難である。例えば石垣秘伝之書の特徴として、一間ごとに一定の低減率で勾配を調整したとされるが、イメージが湧いてこない。区分するからには、石垣作図法の位置づけと石垣作図法の差を明確に把握しなければならない。

本論文では表-1 に示すように、両秘伝書は原点移動放射状三角形相似則に分類できる。表-2 では石垣秘伝之書の反り変化量は低減され、後藤家文書では一定であるという明確な差があることを示した。

10 おわりに

日本伝統の軒返し作図法を含めて統一的に整理すると石垣秘伝書の意義が明確になることを示した。

両石垣秘伝書は原点移動放射状三角形相似則に分類され、日本伝統の反り割り付けの一環として位置づけられることを示した。

また本論文では熊本城石垣を対象に、日本の城郭石垣曲線を近似度を比較した。この結果日本の伝統である軒返しで石垣秘伝書の石垣曲線が概略近似化できることも示した。

両石垣秘伝書の差異を熊本型、金沢型で分類されるが²⁾、その差異は反りの割り付けにあることを明確にした。

参考文献

- 1) 北垣聡一郎：もの与人間の文化史 58 石垣普請、法政大学出版局、2006。
- 2) 北垣聡一郎：石垣研究の歩みと現在、石川県金沢城調査研究所「金沢城史料叢書 16 城郭石垣の技術と組織」、pp.7-24, 2012。
- 3) 柳井浩：石垣の曲線—様式の数理—、日本オペレーションズ・リサーチ学会、オペレーションズ・リサーチ、論文・研究レポート、pp.281-286, 1988。
- 4) 柳井浩：日本建築における屋根の曲線—抄—、日本オペレーションズ・リサーチ学会、オペレーションズ・リサーチ、論文・研究レポート、pp.146-153, 1991。
- 5) 柳井浩：生涯学習教養講座—身近な学習数学①—身近な曲線、日本数学検定協会 学習数学研究所、エコー出版、2002。
- 6) 平山諦：和算の歴史 その本質と発展、ちくま学芸文庫、p.106, 2007。
- 7) 北尾嘉弘：日本建築における軒反り、真陽社、pp.1-15, 2015。
- 8) 山口柏樹木：土質力学（全改訂）、技報堂出版、p.217, 1986。
- 9) S. Utili and R.Nova:On the optimal profile of a slope, Soils and Foundations, Vol.47, No.4, pp.717-729, 2007。

(Received April 10, 2023)