

橋は何故落ちたか(その2)－五重塔に学べ

福島啓一

正会員 技術士 博士(工学) (〒270-1163 我孫子市久寺家1-23-8)

E-mail: kei1fukuq@outlook.jp

近年耐震設計技術は発達したと言われるが、それでも地震の度に構造物が壊れる例は絶えない。ところで日本に古くからある五重塔は地震で壊れたことが無いといわれる。その理由を探り、橋や建築物などの今後も建設されていく構造物に応用できないかを考える。

Keywords : earthquake resistance, 5 stories pagoda, spirally reinforced concrete, buckling, base-isolated technology(or system), vibration

1. はじめに

最近の耐震工学は非常に発達したと言われるが、地震の度に構造物が壊れる例は絶えない。その大きな原因は地震の本質を考えないで、死荷重などの静的な力を対象にした考え(構造力学、震度法と剛構造)を殆どそのまま動的現象である地震力に対しても適用したためだと考えられる。例外として真島健三郎は五重塔などに学び柔構造、鋼構造を推奨し、ヒンジ付き梁を持つ建物等を提案した。しかし理論は不十分で、実用化するには問題点もあり普及しなかった。そこで五重塔の耐震性や、座屈に関する研究、免震建築の考えを取り入れた新しい対策を探索したので紹介する。

2. 耐震設計の考え方

1880年の横浜地震後当時日本在住のミルンは菊池らと共に日本地震学会を設立し、ユーイングは地震計を作った。この頃から近代的な地震の研究が始まったと考えられる。1916年佐野利器は家屋耐震構造論を著して震度法による耐震設計を唱道した。真島健三郎は1923年の関東大震災の大きな被害に衝撃を受け振動論に基づく研究を進め可撓性の大きい建物を推奨し、また五重塔などに学ぶべきとした。「幾度か

大震した大伽藍やひよろひよろした五重塔が我国では適切な教材と思います。是れが耐震性を極はむるのが耐震構造に達する捷徑であろうかと考へられるのであります。頭の巨い高い重い荷を負って居る大寺院でも殆んど四方開け放しで耐震壁も無ければ筋違も無いのです……夫れで百千年厳然と立って居るのであります……耐震構造は複雑でありませふが畢竟其要点は歴戦の勇士たる我古寺の柔順性を測るにありと思われます」²⁴⁾と論じた。真島は共振を避ける鉄骨構造、一部にはヒンジを入れることを推奨し、佐野は震度法による設計、壁や筋交いを入れた剛度の高い鉄筋コンクリート建物、重い瓦を避け軽い屋根の木造建築を推奨した。佐野と真島の間に柔剛論争と呼ばれる論争が生じ、7年余り続いたが、その後建築基準法などはすべて静的震度法になった。HousnerやNewmarkは1960年頃から塑性変形によるエネルギーの吸収により地震力を低減することを提案した。耐震構造の考えは今もこれらの流れに分断されている。

3. 五重塔の耐震性

「1921年(大正10年)に東京帝国大学地震学教室の大森房吉教授は六つの五重塔について振動測定実験をした結果「五重塔を倒すほどの地震は存在しない」と発表しているし、これをうけて東京帝国大学建築

学教室の伊東忠太教授も「関東大震災でも五重塔はまったく損害がなく、歴史上、五重塔が倒れた例を知らない」としている……宮大工の西岡常一は……地震の時に、法隆寺の五重塔の下に立って上を見上げると「初重がこう右に傾けば二重が左に傾く。三重は右に傾く。たがいちがい、たがいちがいに波をうつようになつた」という。これはまったくスネーク・ダンスである……軒の出を深くして建物をヤジロベのような形にしているから、地震の時の水平力が加わってもガタガタしない。ただゆっくりゆれるだけである。……^{ひわだぶ}檜皮葺きや、^{こけらぶ}柿葺きなどの軒を軽くする屋根があるにもかかわらず、わざわざ、土や瓦をのせて軒の重量を大きくしている構造が一般的なのだ……木造でガタが減衰にどう影響するか」²⁵⁾などといわれている。谷口は心柱と骨組みという振動周期や振動形状(心柱は曲げ振動、骨組みはロッキング変形)の違うものが離れて構造物を構成しているので振動が相殺されるとした²⁶⁾。

五重塔に偶然耐震性が備わったわけではなく、当時なりの考えで工夫を凝らしたはずと考えられる。日本書紀は日本で初めての本格的な寺院である飛鳥寺を建てるに当たり「元年……百済国は恩率首信……らを遣わして、調を^{たてまつ}進るとともに、仏舎利、僧の^{りようし}照律師……^{りようつし}ら、寺工の^{てら}太良末太……、^だ鑪盤博士の……、^え瓦博士の……、^{かき}画工の^{びやくか}白加を^{たてまつ}献った……始めて法興寺(飛鳥寺・元興寺とも云う)を作った」などと専門家が百済から来日して技術を伝えたことを記している。「(元興寺縁起には)……六世紀末の飛鳥寺建立に当たって、僧、工人とともに「金堂ノ本様奏上」とあるように、金堂の模型がもたらされたことが知られている……今でいう建築模型と考えて良い……いずれも1/10の縮尺である。建築の模型として見れば、この大きさの縮尺は、意匠上、構造上はいうに及ばず、細部の収まりの問題にいたるまで、実際の検討が可能であり、設計技術の具体化したものとして、後世の建築図面に比肩する規範力を持っていたものと考えられる」²⁷⁾とも云われている。五重塔の模型も輸入されたがどうかなどはわからない。

しかし当時建築模型は多くの場合に作られたように現在まで残っていて国宝に指定されているものも

ある。「ひとつは、建築前につくられた「建築模型」であるとの説。元興寺の塔(混乱をさけるため以下「大塔」と記す)は高16丈(約48メートル)で、奈良時代の五重塔としては最大級だったが、工事にとりかかる前にその10分の1スケールモデルをつくり、細部のおさまりや構造の破綻がないかを確かめたというのである。いかにもありそうだけど、残念ながらこの小塔とじっさいに建てられた大塔とはかなりちがっていた。大塔は安政6年(1859)に焼失するまで1000年以上も健在で、焼失直前につくられた実測図も現存する。鎌倉時代の修理工事で大塔の細部はかなり変更されたとみられるので、ちがいはあっても当然なのだが、致命的なのは大塔と小塔の側^{がわ}柱の位置が一致しないこと。大塔の礎石はいまも跡地に保存されていて、側柱の位置が正確に決定でき、それは安政の実測図ともよく一致する。ひるがえって小塔はどのように拡大しても、この礎石上にぴったりおさまるようには建てられない。さらにいえば、小塔の相輪と露盤が巨大で、このまま10倍して建造すると、他の現存塔とはかなりかけはなれた姿になってしまうことも模型説には不利な点と……²⁸⁾。かつて五重塔を造営する時にはよく模型を先に造り上げて、これを見本に五重塔を組み上げていったし、現代においてもいろいろ製作されているという。大洲城の再建(2004年)の時は骨組み模型があり参考にした。

諸説あり目的は不明である。しかし一部完成した塔と違うと云うことは計画設計の段階で造られその結果を見て最終設計を決めた、構造の検討にも利用したと考えられる。海龍王寺小塔は内部構造は簡略化されているので外観の検討が主な目的と考えられる。東寺の「五重小塔」は高さは僅か161cm、3/100の縮小モデルで、構造の検討をするためには小さすぎる。そのほか最近も模型塔は作られ、博物館などで展示されている。

五重塔を建てた時代の構造力学がどんなものか明らかではないが、模型に力を加えその時の挙動を見て工夫した、塔の耐震性や心柱の効果をこの様な模型などで確認しながら工夫した(残念ながら瓦は木製なので重量の影響は再現できない)と想像される。

近代の木造建築に対する方針は筋交いや通し柱を

入れる、継手はボルトで緊結する、柱と梁、床の交点には隅補強をする、屋根はなるべく軽くする。建物は基礎ボルトで基礎コンクリートと緊結するなどであるが五重塔は筋交いは無い、柱は上下で位置が違い通し柱は無い、屋根は重い瓦葺きである。石造りの基礎の上に乗っているだけとまるで違う。とりわけ五重塔の近代構造物にない特色は屋根を支える骨組みと心柱とが50cm～数mの隙間を空けて独立に立っており、地震で大きく震動するときにだけ接触・衝突すると言う点である。これについて今までちゃんとした議論・検証は殆どなされていない。しかしスネークダンスをするということは振動周期があまりにも長く座屈変形の形が1次でなく4次、5次なのでそのように見えるのではないか。瓦屋根を重くして固有周期を長くし、免震構造を作ったのではないかと考えられる。神社、寺院、城などの大建築にも古い民家にも似たような工法、工夫がされている。これらについて従来納得できる説明はされていない。

4. 免震建築

建物の下にコロや雲母板などの滑りやすいものを入れておけば地震の影響を軽減できるのではないかという考えはかなり古くからあったようである。関東大震災のあとで「今村博士は今回の震災報告書中鉄板の上に家を建てたらよかろうと云うて居るが…之を下層の柱梁構造に求めんとする……下層を以て緩衝機の用をなさしめんとする」²⁹⁾と真島は免震構造の先駆けの提案をしている。岡隆一は最下層の柱の下に関節継手を有する高さ1mほどのRC柱を入れる免震構造を提案した²⁰⁾。他にも幾つか特許が出されている。鎌倉大仏は関東大震災の時仏像全体が滑ったため昔の鋳物技術の欠陥にも拘わらず被害を免れた。これを見て1960～61年に鎌倉大仏を修理した際には、コンクリートの土台の上にステンレスの板を敷いて滑りやすくし、地震の影響で構造的に弱い首の部分が折れるのを予防した。1970年半ばにフランスで橋梁に使われていたゴム支承を用いた免震建築が登場し、1980年代にはアメリカや日本にも導入された。免震建築では径80cm～120cm、厚さ5～10mmのゴム板とほぼ同じ径で厚さ3～5mmのステンレ

ス板を交互に数十層接着した免震支承（面圧≒150kg/cm²）を建物の下部に入れて水平方向の抵抗力を小さくし4秒程度を目標に振動周期を長くしている。金属製の揺柱式や滑り抵抗を小さくしたボールベアリングを使う免震装置もある。実施するにはこの他にエネルギーを減衰させるダンパー、過大な変位を防ぐ移動制限装置、配管配線などを建物が移動しても壊れない様にする伸縮装置などが必要である。免震建築の問題点は装置を入れる高さ約3mが余分に要る、柱位置と免震装置の平面位置が一致しないときは台枠と滑り支承を入れる必要がある、建物の移動を許すための余分の空間（幅30～50cm）、配管配線その他の伸縮装置が要る、免震装置の許容荷重は1ヶ100t程度であるから上に乗るものの重さには限度がある、振動周期は4秒位までしか長くないが10秒を越える長周期振動も地盤によっては想定されるなどの問題点がある。中高層のRC建築、木造住宅、橋梁に実施例がある。

5. 振動・曲げと圧縮を受ける構造物の力学

先ず議論を進めるために必要な力学について略述する³⁰⁾³¹⁾。一定断面の梁（断面二次係数I）に曲げモーメントMが働くときの弾性曲線は（E:ヤング率、 ρ :桁の曲率半径）には次の関係がある。

$$1/\rho = d^2y/dx^2 = -M_x/EI \quad (1)$$

長さ ℓ の片持梁がその自由端に集中荷重 $P=mg$ を受ける場合、支点から x の点の曲げモーメントは

$$M = -P(\ell - x) \text{ である。従って}$$

$$d^2y/dx^2 = (P/EI)(\ell - x) \quad (2)$$

積分し境界条件を入れると撓み y は

$$y = (P\ell^3/EI) [(x/\ell)^2/2 - (x/\ell)^3/6] \quad (3)$$

になる。自由端の撓み $\delta = y_B$ は $x = \ell$ とおいて

$$\delta = P\ell^3/(3EI) = mg\ell^3/(3EI) \quad (4)$$

になる。先端に重量 m を載せた一端固定梁の振動を考えるとときは $ks = \ell^3/3EI$ としてよい。

次にばねに吊された質点 m の振動を考える。すなわち慣性力（加速度×質量）、減衰力（速度に比例、係数 c ）、バネ力（バネ係数 ks ×変位 y ）の釣合から

$$m \, d^2y/dt^2 + c \, dy/dt + k_y y = 0 \quad (5)$$

これを $\omega = \sqrt{k/m}$ 、 c : 粘性減衰係数 (N/sec・m)、 c_{cr}

$=2m\omega$, 臨界減衰係数, 減衰定数, $h=c/(2m\omega)$, $h=c/c_{cr}$, 周期 $T=2\pi/\omega$ と置いて解くと

$$y=Ae^{-h\omega_0 t}\sin(\omega_0 t) \quad v=dy/dx=Ae^{-h\omega_0 t}\omega_0\sin(\omega_0 t+90^\circ)$$

$$\alpha=d^2y/dx^2=-Ae^{-h\omega_0 t}\omega_0^2\sin(\omega_0 t+180^\circ) \quad (6)$$

これは始め振幅Aで揺れている重量mがだんだん振幅が小さくなり最後には停止する振動を表す.減衰hが小さいと何時までも揺れが続く.振動が早いと(ω_0 が大きくTが短いと)振幅yのわりに速度や加速度が大きく,振動が遅いと(ω_0 が小さく周期Tが長いと)振幅の割に速度や加速度は小さいことが分かる.次にこれに機械や地震による地盤の振動が加わる場合を考える.地盤の変位をZとすれば

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+k_yy=-m\frac{d^2Z}{dt^2} \quad (7)$$

$$d^2y/dt^2+2h\omega_0 dy/dt+\omega_0^2 y=d^2Z/dt^2 \quad (8)$$

この式を解くと

$$y=\frac{F_0\cos(\omega_0 t+\Delta+\theta)}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)} \quad (9)$$

となる.ここに, F_0 : 強制変位力, ω : 強制変位円振動数, ω_0 : 固有円振動数(rad/sec),

片持ち梁の先端に重量mが乗っている場合は $k=P/\delta=3EI/l^3$ であるから この梁が振動する場合を考えると,固有円振動数 $\omega_0=\sqrt{k/m}=\sqrt{3EI/ml^3}$ 固有周期 $T=2\pi/\omega_0=\sqrt{4\pi^2 ml^3/3EI}$ (sec) になる.

梁の断面が円なら $I=\pi r^4/4$ だから $k=3E\pi r^4/(4l^3)$, $\omega_0=\sqrt{3E\pi r^4/4ml^3}$ $T=\sqrt{16m\pi l^3/3Er^4}$ になる.

外力の振動周期と構造物の振動周期が一致すると($\omega=\omega_0$),振動エネルギーは無駄なく構造物に伝えられ,構造物の振動は非常に大きくなる.周期がずれていると,外力が構造物の振動と逆向きに働く瞬間もあり,振動は効率よく伝わらない.つまり, $\omega=\omega_0$ の時は構造物には非常に大きな振動が生じ(減衰hがゼロなら無限大になる),この差が大きいと構造物はそれほど大きな振動をしない.この差の大きくするのが免震構造の考え方といえる.振動の伝達率は

$$\text{伝達率}=1/\sqrt{[(\omega/\omega_0)^2-1]^2+4h^2(\omega/\omega_0)^2} \quad (10)$$

になる.計算結果を表-1に示す.振動周期の差が大きくなれば共振倍率は急激に小さくなる,差が小さいときは減衰の効果はかなりあるが振動数の差が大きければ減衰の効果は殆どないことが分かる.共振を

避けるためには地震の周期の10倍以上の固有周期にすればよい,その時減衰は殆ど関係ないことがわかる.地震の振動周期は0.5秒~数秒程度であるが,稀に10秒以上の長周期振動もある.構造物の振動周期 $2\pi/\omega_0$ を数10秒以上にすれば安心である.

表1 入力振動と構造物振動の比率

ω/ω_0	$h=0$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5
0	1	1	1	1	1	1	1
0.5	1.3333	1.3332	1.3303	1.3216	1.2883	1.2379	1.1094
1	∞	50.00	10.00	5.00	2.50	1.6666	1.000
2	0.3333	0.3333	0.3325	0.3304	0.3220	0.3094	0.2773
3	0.1250	0.1249	0.1249	0.1246	0.1236	0.1219	0.1170
4	0.0666	0.0666	0.0666	0.0665	0.0662	0.0658	0.0644
5	0.0416	0.0416	0.0416	0.0415	0.0413	0.0410	0.0407
10	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0100	0.0100	0.0100
15	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044
20	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025

梁でなく柱が下端固定,上端自由で鉛直に立っていて重量mが乗っている場合を考えると柱には曲げモーメントの他に鉛直力 $P=mg$ が働く.従来の耐震工学の本を見るとこの場合も水平片持梁の場合と同じように,固有円振動数 $\omega_0=\sqrt{k/m}$ 固有振動周期 $T_0=2\pi/\omega_0$ で振動すると書いてある.しかし座屈についての構造力学,吊橋主塔の設計法を参照してこの問題を考えるとこれがまったく間違いだとわかる.

吊橋の主塔は大きな圧縮力と水平方向の強い強制変位を受ける構造物である.初期の吊橋主塔は石造りで装飾としても立派なものが作られた.塔頂には強い水平力を避けるために水平移動ができる滑り杓を設けワイヤーを支持した.ごく小さい吊橋では塔を下端ピンにして塔が自由に揺れても良い様(揺柱式)にした.しかし吊橋のスパンが大きくなり,鉛直力も変位量も大きくなり,また石造りの主塔から鋼製の主塔に変わると塔を撓ませて滑り杓を無くす設計が行われる様になった.鉛直力Pを塔の挫屈荷重に等しくすると塔頂に働く水平力Fはゼロになることが分かりその様な設計が一般的になった.つまり塔のたわみ性ksは $ks=3EI/l^3$ でなく鉛直力が挫屈荷重に近くまで大きくなればほぼゼロになることを利用した.上端ヒンジ(水平移動無し)の片持ち柱とすれ

ば挫屈荷重が働いても安全率 ≈ 8 になる。この考えを橋脚や建物の柱に用いれば今村が唱えた、あるいは免震建築が目指す地震力を遮断する構造物を実現することが出来る。

今両端回転支持の支柱に荷重 $P=mg$ が働く場合、 $M=Py$ であるから、撓み曲線について次の微分方程式が成立する。(y:柱の水平撓み)

$$d^2y/dx^2 = -M/EI = -Py/EI \quad (11)$$

今 $k^2 = P/EI$ とおき境界条件を入れてとけば、この式の一般解は $y = A \sin kx$ (12)

で与えられる。Aに関係なく中央($x/l=1/2$)で $\sin kx$ が無限大になる($\sin \pi/2=\infty$)場合、つまり $kx=\sqrt{P/EI} \cdot x = \pi x/l$ を解くと $P_c = \pi^2 EI/l^2$ (13)

$$\sigma_c = P_c/A = \pi^2 EI/A l^2 = \pi^2 E/(\ell/r_{xy})^2 \quad (14)$$

となる。この場合強度 σ に関係なく挫屈強度が決まる。 σ_c が許容圧縮応力より小さいときは圧縮強度で決まる。 r_{xy} は断面2次半径で $r_{xy}=\sqrt{I/A}$ 、円柱の場合は $r_{xy}=r/2=d/4$ で、 $\lambda=\ell/r_{xy}$ を細長比(slenderness ratio)と言い、長柱の挫屈問題において重要な量である。

次にこの柱の支点からcの点に水平力Qが働くか加工か施工の誤差かなんかで撓み δ が生じている場合を考える。 $0 < x < c$, $c < x < l$ での曲げモーメントは軸圧縮の場合にQによる曲げモーメントを加えて

$$M=Qx(\ell-c)/l+Py \quad \text{or} \quad M=Qc(1-x)/l+Py \quad (15)$$

となる。Qの無い場合に準じて解くと撓みyは

$$y = B \sin kx - \delta x/c \quad (16)$$

$$y = C \cos kx + D \sin kx - \delta (1-x)/(1-c) \quad (17)$$

となる。 $x=l$ では $y=0$ だから $C=-D \tan kl$ 故に

$$y = D(\sin kx - \tan kl \cdot \cos kx) - \delta (1-x)/(1-c) \quad (18)$$

撓み勾配は

$$0 < x < c \quad \text{では} \quad dy/dx = Bk \cdot \cos kx - \delta/c \quad (19)$$

$$c < x < l \quad \text{では} \quad = Dk(\cos kx + \tan kl \cdot \sin kx) + \delta/(1-c) \quad (20)$$

になる。 $x=c$ ではyも dy/dx も等しいはずである。(初期変位ではc点で折れ曲がっているのだからc点ではyは等しいが dy/dx は不連続であるがPが働けば連続になるというのだから少し誤差があるが)。

$$B \sin kc - \delta = D(\sin kc - \tan kl \cdot \cos kc) - \delta \quad (21)$$

$$Bk \cos kc - \delta/c =$$

$$Dk(\cos kc + \tan kl \cdot \sin kc) + \delta/(1-c) \quad (22)$$

この連立方程式を(21) $\times k$ -(22) $\times \tan kc$ として解くと

$$\delta(-\tan kc/c - k) = Dk \tan kl(-\cos kc - \sin^2 kc/\cos kc)$$

$$\text{故に} \quad D = \delta [1/c(1-c)] \sin kc/k \cdot \tan kl \quad (23)$$

(21)に代入して

$$B = \delta [1/c(1-c)] \sin k(1-c)/k \cdot \sin kl \quad (24)$$

従って撓み曲線は $0 < x < c$ では

$$y = \delta [1/kc(1-c)] \sin kx \cdot \sin k(1-c)/\sin kl - \delta x/(1-c) \quad (25)$$

$c < x < l$ では

$$y = \delta [1/kc(1-c)] \sin kc \cdot \sin k(1-x)/\sin kl - \delta (1-x)/(1-c) \quad (26)$$

(25)に相当する式は多くの本で下記のようにになっている。 $\delta = Pc(1-c)/Pl$ と表記していることになる。

$$y = Q \sin kc \cdot \sin kx / Pk \sin kl - Qcx/Pl \quad (27)$$

これよりスパン中央での初期撓み δ の場合の中央での撓み($c=l/2, x=l/2$)は

$$y_c = \delta 4 \sin(kl/2) \cdot \sin(kl/2) / [2kl \cdot \sin(kl)] - \delta \quad (28)$$

$$kl/2=u \quad \text{とおけば} \quad y_c = \delta [3(\tan u - u)/u^3] \quad (29)$$

この式を殆どの構造力学書が柱の1/2高さに横荷重が働いて撓み $\delta = Ql^3/48EI$ が生じた時の式として紹介しているが横荷重Qによる撓みは x^2, x^3 の関数であるから(16)(17)式は計算を簡単にするため簡略化したものであろう。(16)(17)式の δ の前の符号は+とすべきであろう。ただしこの誤差は小さいと考えられる。この式から(27)(29)が導かれるとしているが説明は無い。何らかの省略がされたようである。(29)式の-の後は $3u/u^3 \delta$ になるが δ になるべきと考えられるが、誤りかどうか確認出来ない。

初期変位がゼロで、柱中心に鉛直荷重のみが働く時は $\delta=0$ で、荷重を増やしてゆくと挫屈荷重に達した時突如挫屈するが、柱に初期ひずみ δ があると横撓みが生じ、 $P_c = \pi^2 EI/l^2$ $k^2 = P/EI$ だから $k^2 l^2 / \pi^2 = P/P_c$, P が挫屈荷重になる時 $kl = \pi$ になり、 $\tan kl/2 =$ 無限大になり、変位は無限大になる。極限荷重は両端ヒンジ柱のオイラー式と同じになる。(※両端ヒンジ柱は上半分をみると下端固定、上端ヒンジの吊橋主塔に同じで、高さ $h=l/2$ の主塔の頂点と固定端に水平荷重 $F=Q/2$ と、鉛直荷重Pが働く場合と同じである)

(29)式の右辺の δ は横荷重Qのみが作用したときの撓み(4式)であり、 $3(\tan u - u)/u^3$ は変位量 δ に対

する鉛直荷重Pの影響を表している.Pが小さいときには($\ast k^2=P/EI$, $kh=u$ であるから $u=h\sqrt{P/EI}$) も小さく, $3(\tan u-u)/u^3 \approx 1$ である.. これは $\tan u$ を級数に展開して $\tan u = u+u^3/3 + 2u^5/3 \cdot 5+17u^7/315+\dots$ であるから $3(\tan u-u)/u^3 = 1+2u^2/5 +17u^4/105+62u^6/945+\dots$ となることから直ちにわかる.Pが増大してuが $\pi/2$ に, $\tan u \rightarrow \infty$ に,すなわち P が $P_c=\pi^2 EI/4h^2$ に近づくと δ が急激に増大する.変位が大きくなるということはkが小さくなり地震に振動が加わった時の振動周期Tが大きくなることになる.この様子を表-2に示す.

表-2 軸力Pの増加と変位,振動数,振動周期,曲げモーメントの関係

P/P _c	撓み比率 $3(\tan u-u)/u^3$	バネ係数比率 $u^3/3(\tan u-u)$	振動数比率 ω/ω_0	周期比率 T/T_0
0	1	1	1	1
0.3	1.4228139	0.7028325	0.8383511	1.1928176
0.5	1.9862878	0.5034517	0.709543	1.4093572
0.7	3.3006595	0.3029697	0.5504268	1.8167717
0.8	4.9433854	0.2022905	0.4497671	2.2233725
.9	9.8712296	0.1013045	0.3182836	3.1418513
.95	19.726660	0.0506928	0.2251506	4.4414705
.96	24.654349	0.0405607	0.2013971	4.9653146
.97	32.867153	0.0304255	0.1744291	5.7329881
.98	49.292742	0.0202869	0.1424323	7.0208790
.99	98.569475	0.0101451	0.1007230	9.9282161
1.0	∞	0.0	0.0	∞

初期撓みは $(P^2/48EI)(3x/l-4x^3/l^3)$ と簡略化せず, (16) (17) の符号は+にして解けば(29)式の正解がえられる筈であるが後日にしたい.

次に中点(吊橋主塔の根元)に於ける曲げモーメントは $M_c=Ql/4+P\delta=Fh\cdot\tan u/u$ (30) になる.右辺のFh は横荷重Fのみ働いた場合の値であり, $(\tan u)/u$ が荷重Pによる影響を表している.この δ はPが働いた後の変位.(30)式は小さい力(変位制限装置)で変位 δ を制限すれば $P \rightarrow P_c$ になっても曲げモーメントはそれほど大きくならず壊れることもないことを予想させる. $\delta=0$ なら安全率は ≈ 8 になる.この目的で心柱を用いて変位を制限するのが五重塔の精神であり,免震建築の移動制限装置の考えと同

じであり優れた耐震性を実現している原理である.(30)式はそれを表している重要な式である.今まで五重塔の耐震性について述べた説はいずれもこの点を見逃している.最大振幅の近くでは心柱と骨組みの衝突の衝撃(速度)は余り大きくない.撓み制限の無い設計では(30)式に示す様に柱が撓んで曲げモーメントが増え,壊れる危険がある.

弦は強く引っ張ると音が高く(振動が早く)なり,引張力が小さいと音が低くなることはよく知られている.弦の振動数fnは $fn=(n/2l)\sqrt{S/\rho}$ (31) l :弦の長さ(m) $n=1,2,3,\dots$ S:弦を引っ張る力(N) ρ :弦の線密度(kg/m) の関係がある.柱の固有振動数も圧縮力に関係し,圧縮力が大きくなれば振動数が小さくなり,振動周期が長くなることも当然予想できることであるが,今までの耐震関係の研究ではまったく無視されていた.振動周期を長くすれば共振しにくく,地震の影響を受けにくいことは当然でこれを考えないことは大きな見逃しである.

以上の議論から地震の影響を少なくするには振動周期を長くすることと,そのためには挫屈荷重に近くなる様柱寸法を選び,また変位制限をつけるべきことが分かる.固有周期と地震の振動周期が近いときは減衰率を大きくすると効果があるが差が大きければ減衰の効果はほとんどない.減衰の効果を計算もせず過大に評価するのは間違っている.

次に柱の自重が大きく上に乗る重量を無視出来る柱の振動を考える.梁の撓みと荷重強度との間には $EI\partial^4 y/\partial x^4=w$ なる関係がある.梁材料の密度を ρ , 断面積をF,梁の単位長さの質量は ρF とする.これが加速度 $\partial^2 y/\partial t^2$ をもって運動するとダランベールの原理により梁には $-\rho F\partial^2 y/\partial t^2$ なる分布荷重が働く.よって上式のwを慣性抵抗で置き換えて

$$EI\partial^4 y/\partial x^4=-\rho F\partial^2 y/\partial t^2 \quad (32)$$

この関係は梁の自動振動に関する基本式で支持条件に無関係に成立する.……いま定常振動をするものとして $y=Y(x)\sin\omega t$ とおき上式に代入すれば

$$EI\partial^4 Y/\partial x^4-\rho F\omega^2 Y=0 \quad (33)$$

よって $\beta^4=\rho F\omega^2/EI$ と置けば上式の解は $Y=A\cos\beta x+B\sin\beta x+C\cosh\beta x+D\sinh\beta x$ (34) となる.ここにA,B,C,Dは積分常数である.境界条件

式(振動判別式)を満足する βl の値に対してのみ振動が存在しうる(l :梁の長さ).上式を満足する βl の値は 一次 $\beta l=1.87510$ 二次 $\beta l=4.69410$ 三次 $\beta l=7.85476$ 四次 $\beta l=10.995542$ 五次 $\beta l=14.1371685$ 等の如く無数にある. βl が決まれば振動数及び振動周期は次式から求められる.

$$\text{振動数 } \nu = \{(\beta l)^2/2\pi l^2\} \sqrt{(EI/\rho F)} \quad (35)$$

$$\text{振動周期 } T = \{2\pi l^2/(\beta l)^2\} \sqrt{(\rho F/EI)} \quad (36)$$

片持梁の1次振動の周期は上式より $T_1=1.7870l^2\sqrt{(\rho F/EI)}$ によって表される.2次,3次,4次振動は $T_2=0.58515l^2\sqrt{(\rho F/EI)}$ $T_3=0.101839l^2\sqrt{(\rho F/EI)}$ $T_4=0.051969l^2\sqrt{(\rho F/EI)}$ ……となる.心柱の径は1m位だから, $F=\pi r^2=0.7854$, $I=(1/4)\pi r^4=0.04908$, 高さ40m,比重 $\rho=1,000\text{kg/m}^3$, ヤング率 $E=90,000\text{kg/cm}^2=9000\text{MPa}$,とすると T は

$T_1=1.787 \times 40^2 \times \sqrt{1000 \times 0.7854 / (9000,000,000 \times 0.04908)} = 3.81\text{sec}$. 五重塔骨組みの柱は心柱より細く,途中に継手もあり瓦の重量も働くので振動周期はさらに1桁以上長い.数10秒以上と考えられる.スネークダンスと言われる振動は地震の振動が骨組みの1次振動周期より長すぎて共振は起こらず,周期数10秒の3次,4次の振動が起きているからと考えられる.

6. 応用例

改善例1 振動周期の長い橋脚(細い柱)+変位制限

阪神淡路地震で倒壊した阪神高速道路高架橋3号神戸線の改善案について試算する.

幅員 20.25m

橋長 635m=スパン35m×18径間+5m ゲルバー桁
高さ 9.90m~12.40m(橋脚)+2.80m(桁高)

当初設計 橋脚 1本柱 $\phi 3.10\text{m}$, $\phi 3.30\text{m}$

鉛直力(基部) $1472 \times (1 \pm 0.1) \sim 1584 \times (1 \pm 0.1)\text{t}$

簡単のため橋脚は $\phi 3.1\text{m}$, 高さは重心までをとり $h=11.4\text{m}$ $m=1,500,000\text{kg}$ $E=20,000\text{MPa}$ とする. m は圧屈荷重に比べ小さいので実施案の周期は

$T=0.5679\text{sec}$. 被災報告書では固有周期は0.78sec,0.71secとなっている(柱径,高さはいろいろ).

地震動の周期は0.4secと0.7sec付近にピークがある.設計震度は0.2であるが,振動数がほぼ同じなので共振係数は大きく震度1.0以上になりコンクリート

の圧壊で橋脚が倒壊したものと考えられる.

復旧工事では $\phi 3.1\text{m}$ の橋脚は2.71m~3.3m×6.00mの細長い形に変えられた.

(改善案) $P=P_{cr}$ に近い大きさの柱を選ぶと振動周期が長くなり,振動の影響を受けにくい免震構造とすることができる.当初計画は1本柱であるが変位制限を組み込むため筋交い付きの2本柱とする.

2本柱とすると $P=750\text{t}$, $h=11.3\text{m}$, $E=20,000\text{MPa}$ で(13)式に円柱の断面係数 $I=\pi r^4/4$ を入れると $P_{cr}=\pi^3 r^4 E/16h^2$. $750,000 \times 9.8 = \pi^3 r^4 \times 20,000,000,000 / (16 \times 11.3^2)$ $r=0.394476\text{m}$,よって $\phi 80\text{cm} \times 2$ 本とすれば良い, 応力は $P/A=750,000\text{g}/\pi r^2=14.62\text{MPa}$ になる. これに曲げモーメントによる応力も加わらるがせん断鉄筋で補強すれば十分許容値内にある. せん断鉄筋柱はConsidèreの実験では735kg/cm²までの強度,Richartらは1350kg/cm²近い強度を得ている. 表-3 柱径を変えた場合の振動周期,地震力など

柱径 d (m)	座屈荷重比 P/P _{cr}	振動周期 T(sec)	共振倍率 0.4秒に対し	天端撓み δ (m)
$\phi 3.5 \times 1$	0.0052	0.4467	14.4814	7.1359
$\phi 2 \times 2$	0.0246	0.9767	0.0083	0.0193
$\phi 1.5 \times 2$	0.0778	1.7853	0.0006	0.0048
$\phi 1 \times 2$	0.3943	4.9456	1.07E-05	0.0003
$\phi 0.9 \times 2$	0.6010	7.5115	2.016E-06	0.0001
$\phi 0.8 \times 2$	0.9627	31.0116	6.920E-09	6.247E-07
$\phi 0.7925 \times 2$	0.9996	8359	4.780E-13	4.480E-11
$\phi 0.79243 \times 2$	1.0	∞	0	0

橋脚上端のヒンジ部はコア径 $\phi 20\text{cm} \times 5\text{cm}$ のらせん筋柱とする.この方法はRCアーチ橋で実績がある.

橋軸直角方向の変位制限には2~3m離れた二本の橋脚の間に筋交い $\phi 30\text{cm}$ らせん筋柱を入れワーレントラスとすることで可能である.筋交い(斜材)と柱の接点は下端は剛接,上端は上下にスライドできる隙間 数10cmと,それ以上スライドできない様にストッパーを設けることで変形を制限できる.復旧工事の設計を見れば二本の橋脚の外側寸法は6mまで可能である.上部工は連続橋とし橋長方向にはすべて可撓橋脚とし,両終端の橋台に移動制限装置を設ける.隙間以上の振動が起これば部材同士が衝突するがその時の速度はかなり小さい.心配であれば防

弦材のような部材を入れ衝撃を弱める。

振動周期は $m=750,000\text{kg}$ $h=11.3\text{m}$ $r=0.4\text{m}$
 $k=3EI/h^3$ $T=\sqrt{16m\pi h^3/3Er^4} = \sqrt{16 \cdot 750,000 \cdot \pi \cdot 11.3^3 / (3 \cdot 20,000,000,000 \cdot 0.4^4)} = 5.951\text{sec.}$ これは軸荷重を考慮してない振動周期であるから挫屈荷重に近いときは係数を掛ける。動荷重が乗るときと乗ってないときの差,上下動の影響,寸法誤差などで挫屈荷重で設計したとしても P/P_u が 0.9 になるとしても振動周期に掛ける係数は 3.14 倍であるから,固有周期は $5.95 \times 3.14 = 18.6$ 秒になる。地震動の周期は 0.5 ~ 1.0 秒ぐらいだから橋梁の固有周期との比は 10 以上になり,地震力,振幅は地動の約 1/100 になる。震度 6 の地震が起きても橋梁はほとんど揺れないことになる。元設計が強い地震動で壊れたのと比較されたい。震度 6 の時の撓みは (4) 式の値に係数を掛けて求める。 $\delta = 8.79 \times 0.01 \times 4.94 \sim 9.87 = 0.43 \sim 0.86\text{m}$ になるので数 10cm の隙間を空ける必要があろう。免震橋脚を用いることで橋梁上部工は伸縮継手間隔を伸ばし連続橋とすることが出来るので,ゲルバー桁に比べ工事費を数 10% 節約できる。橋脚のコンクリート量は 1/10 になり工費は大幅に節約できる。

改善案2 心柱付き住宅建築 1階柱をらせん鉄筋柱(下部固定,上部ヒンジ)のピロティ式とし店舗,駐車場などに使う。2階以上は壁式構造,1階非常階段を変形制限の心柱とする。または隙間付きトラスを設置する。配管・配線は柱に沿わせるので特別な可動継手は要らない。非常階段と本体の間は簡単なステップだけで良い。

改善案3 (原案)免震ゴム支承付き住宅 14階 $\times$ 300m^2 免震装置・積層ゴム 13個 ($\phi 600 \sim 900\text{mm}$) 他(改善案) 柱はすべてらせん筋柱(下部固定,上部ヒンジ),柱荷重をすべて等しくなるよう梁は柱より張り出しとするのが望ましい。壁は非構造部材とする。変位制限には非常階段部を利用する。または隙間付き筋交いを用いる。配管・配線は柱沿いとするので大掛かりな可撓継手などは要らない。

従来の建物の固有周期は $T=\text{階数} \times (0.07 \sim 0.09)$ 秒といわれている。改善案によればこれを 10 ~ 数 10 倍に長くすることが出来て,地震の影響を著しく減らすことが出来る。真島の説(鋼構造)は 2 階床桁をピン

支持単純梁でつなぐ等としているが,すべての柱を下端剛結,上端ピン,梁は連続梁とするこの案の方が施工性が良く振動周期も長くなると思う。

6. まとめ

五重塔の耐震性が優れていることは多くの人が認めているが,その理由について従来納得できる説明がなかった。そのわけは構造力学の幾つかの仮定が地震時の挙動にはあてはまらないことにある。

柱のたわみ性は軸荷重により変わることはわかっていし,吊橋の主塔にたわみ性を与えるためにこの性質は広く利用されている。しかし耐震の計算にこれが応用されることは無かった。免震構造にこれを利用し,五重塔の心柱の考えも取り入れることがこの論文の主眼である。可撓性の骨組みと移動制限の組み合わせは政治に於ける三権独立,司法に於ける検察,弁護,裁判の役割分担などと類似した考え方である。鉄道車両とレール,道路とガードレールの役割分担と類似した考えである。このような考えが(免震構造を除き)今まで採用されなかった。幾つかの構造物を組みあわせるという考えはある意味で現場発想であるが,専門性の壁に阻まれて学問間の相互交流が少ない学者には生まれ無かったようである。半素人の大胆さで浅い知識を総動員して大胆な提案を試みた。専門家の精密な議論を期待したい。

参考文献

- 24) 真島健三郎:耐震家屋構造の撰擇に就て,土木学会誌,1924.4
- 25) 上田篤:五重塔はなぜ倒れないか,新潮選書
- 26) 佐野利器,谷口忠:耐震構造汎論,岩波全書,1934
- 27) 日本技術の社会史,第7巻 建築,日本評論社,1983
- 28) 藤森照信,前橋重二:五重塔入門,新潮社とんぼの本
- 29) 真島健三郎:重層架構建築耐震構造論,土木学会誌,1926.4
- 30) 小西一郎他:構造力学第1巻,丸善,1951
- 31) 倉西正嗣:応用弾性学,共立全書

(2019. 4. 8 受付)