地震動位相の微分可能性に関する補足と群遅延時間の平均・標準偏差の計算方法の改良

野津　厚[1]

[1]正会員　港湾空港技術研究所 地震防災研究領域（〒239-0826 横須賀市長瀬3-1-1）
E-mail: nozu@p.mpat.go.jp

地震動位相の微分可能性に関して著者が既往の研究で行った理論的考察に対する補足を行うとともに，より直感的な説明も加えた．これにより，地震動位相はフーリエ振幅がゼロなる場合を除き円振動数で微分可能であり，群遅延時間は定義可能であることがより明確になったと考えられる．また，群遅延時間の計算における数値的不安定への対処方法として，著者が既往の研究で提案していた方法を改良した．既往の提案法は，個々の周波数に対する群遅延時間の計算を経ることなく，群遅延時間の平均値を安定的に計算できるものであったが，群遅延時間の標準偏差の計算には言及できていなかった．そこで，既往の提案法を改良し，群遅延時間の平均と標準偏差をいずれも安定的に計算できる方法を示した．

***Key Words:** ground motion, phase, differentiability, group delay time, average, standard deviation*

1.　はじめに

地震動のフーリエ位相スペクトルを円振動数で微分したものは群遅延時間と呼ばれ，地震動の経時特性と関係を有している[1)-3)]．波形合成の際には，この関係を利用し，適切な経時特性を有する波形を合成する目的で群遅延時間が利用されている[4)-7)]．しかしながら，地震動のフーリエ位相スペクトル（以下，地震動位相とよぶ）および群遅延時間については未解明な点が残されており，継続的な研究が行われている[例えば8)-10)]．

著者は，既往の研究[10)]において，地震動位相の微分可能性に関する理論的考察を行うとともに，群遅延時間の数値計算法に関する検討を行った．地震動位相の微分可能性に関する理論的考察では，地震動位相の定義に立ち返り，まずは地震動のフーリエ変換の微分可能性について確認を行い，その結果に基づき，地震動位相の微分可能性を検討し，地震動位相はいたるところ微分不可能ではないが，特定の条件下で微分不可能となることを明らかにした．群遅延時間の数値計算法に関する検討では，特定の周波数で地震動のフーリエ変換が複素平面上の原点に接近する際に群遅延時間の数値計算結果が不安定となることに着目し，個々の周波数に対する群遅延時間の計算を経ることなく，群遅延時間の平均値を安定的に計算できる方法を提案した．

しかしながら，地震動位相の微分可能性に関する理論的考察では，計算の過程に関する記述が簡略すぎたため，読者から厳密でないとの指摘をいただいた．また，群遅延時間の数値計算法に関する検討では，群遅延時間の平均値のみを対象としており，群遅延時間の標準偏差の計算には言及できていなかった．

そこで，本稿では，地震動位相の微分可能性に関して著者が既往の研究[10)]で行った理論的考察に対する補足を行うとともに，より直感的な説明も加える．また，群遅延時間の計算における数値的不安定への対処方法として，著者による既往の提案法[10)]を改良し，群遅延時間の平均と標準偏差をいずれも安定的に計算できる方法を提案する．全体として本稿は著者の既往の研究[10)]に対する補遺として位置づけられるものである．

2.　地震動位相の微分可能性に関する補足

(1)　定式化に関する補足

著者は，既往の研究[10)]において，地震動位相の微分可能性に関する理論的考察を行うにあたり，地震動位相の定義に立ち返り，まずは地震動のフーリエ変換の微分可能性について確認を行ったが，計算の過程に関する記述が厳密でないとの指摘をいただいたため，ここではより厳密な記載を行う．

既往の研究[10)]と同様，地震動の時刻歴波形$f(t)$として，

限定された時間区間$[0,T]$のみで値を持ち，その外側ではゼロであるもの，言い換えればコンパクトサポート$[0,T]$を有するものを考える．また地震動のフーリエ変換と逆変換は次式で定義する．

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

既往の研究[10)]では式(1)の両辺を円振動数ωで形式的に微分して

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=-i\int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{3}$$

を導き，右辺が存在するから左辺の微分も存在すると述べていたが，この点が厳密でないとの指摘をいただいた．そこで，以下においては途中の過程を省略せず厳密に記述する．

式(1)においてωでの値と$\omega+\Delta\omega$での値の差をとり$\Delta\omega$で割ると

$$\begin{aligned}&\frac{F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega)}{\Delta\omega}\\ &\quad=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega}dt\\ &\quad=\int_{0}^{T} f(t)\frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega}dt\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる．第2式から第3式への変形は$f(t)$がコンパクトサポート$[0,T]$を有することによる．式(4)の両辺において$\Delta\omega\to 0$の極限をとると

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega)}{\Delta\omega}\\ &\quad=\int_{0}^{T} f(t)\left(\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega}\right)dt\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．ここで右辺の括弧内の極限は指数関数の微分であるから必ず存在し，右辺は

$$-i\int_{0}^{T} t\, f(t)e^{-i\omega t}\,dt=-i\int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

となる．よって左辺の極限も存在する．左辺の極限が存在する場合，それは$F(\omega)$のωに関する微分と呼ばれ，$dF(\omega)/d\omega$と書かれる．よって式(3)が成立する．

以上により，コンパクトサポート$[0,T]$を有する時間関数$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$は円振動数ωで微分可能であること，その実部Rと虚部Iも円振動数ωで微分可能であることが示された．このことから，位相$\theta(\omega)$については，既往の研究[10)]で述べた通り，$F(\omega)=0$となる場合を除き円振動数ωで微分可能である．従って，地震動位相の円振動数に関する微分である群遅延時間は確実に定義できることになる．

(2) より直感的な説明

以上が地震動位相の微分可能性に関する厳密な考察であるが，これとは別に以下のような直感的な説明も可能である．

まず，微分不可能な時間関数を考える．その一例として三角形で表される時間関数がある．この時間関数はフーリエ変換可能である（すなわち$\sin\omega t$，$\cos\omega t$の和で表すことができる）が，その際，$\omega\to\infty$までの寄与が必要である．有限のωまでの和では尖った部分を表現することができないからである．すなわち一般に時間領域で微分不可能な関数は周波数領域では$\omega\to\infty$まで値をもつ．ここで，時間領域と周波数領域を入れ替えれば，「周波数領域で微分不可能な関数は時間領域では$t\to\infty$まで値をもつ」と言える．この対偶をとれば，時間領域でコンパクトサポートを有する関数は周波数領域では微分可能であると言える．

3. 群遅延時間の平均・標準偏差の計算方法の改良

(1) 群遅延時間の差分近似の不安定性

これまで見てきた通り，理論上は位相が微分不可能となるのは$F(\omega)$が複素平面上の原点を通過する場合だけであるが，数値計算上は，$F(\omega)$がちょうど原点を通過しなくても，原点付近を通過するとき，ωの変化に対して位相が急激に変化し，群遅延時間の差分近似である$\Delta\theta/\Delta\omega$が数値的に不安定となり得る．このことについては既往の研究[10)]で実際の強震記録を対象に確認した．これは，従来から知られていたアンラップ操作の問題（すなわち位相に2πの不確定性があることに由来する問題）とはまた別の問題である．

アンラップ操作の問題に関しては，位相差分の計算に佐藤[8),9)]による次式を用いることなどにより対処可能である．

$$\Delta\theta(\omega)=-\frac{R\Delta I-I\Delta R}{R^2+I^2} \tag{6}$$

ここにΔRはフーリエ変換の増分ΔFの実部，ΔIはΔFの虚部である（右辺の負号は位相を時計回りに定義したことによる）．しかし，$F(\omega)$が複素平面上の原点付近を通過する際に群遅延時間の差分近似が不安定となる問題に対しては別の対処が必要である．この点について，既往の研究[10)]で提案した対処法の改良を以下に提案する．

なお，式(6)の両辺を$\Delta\omega$で除し$\Delta\omega\to 0$の極限をとれば次式が得られる．

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{R(dI/d\omega) - I(dR/d\omega)}{R^2 + I^2} \tag{7}$$

右辺の$(dR/d\omega)$と$(dI/d\omega)$については微分可能であることを既に確認しているので，右辺の分母（$|F(\omega)|$の自乗である）がゼロとなる場合を除けば式(7)は成立する．なお式(7)はKatukura et al.[11]による群遅延時間の算定式とも等価である[10].

(2) 群遅延時間の平均・標準偏差の安定的な計算方法

群遅延時間を計算するとき，実際には個々の周波数に対する群遅延時間ではなく，ある周波数帯における群遅延時間の平均値や標準偏差だけが必要である場合が多い. むしろ，個々の周波数に対する群遅延時間には物理的意味が乏しく，実用上必要となるのは群遅延時間の平均値や標準偏差である．そこで，これらの計算を目標とする.

ある周波数帯における群遅延時間の平均値は

$$\mu_{tgr} = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2}|F(\omega)|^2 d\omega} \tag{8}$$

で与えられるが，被積分関数の$t_{gr}(\omega)$に式(7)右辺を代入すると$|F(\omega)|^2$は打ち消し合って

$$\mu_{tgr} = -\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[R\left(\frac{dI}{d\omega}\right) - I\left(\frac{dR}{d\omega}\right)\right]d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2}|F(\omega)|^2 d\omega} \tag{9}$$

となる．式(7)で$|F(\omega)|^2$が分母に来ることが数値的不安定の原因であったが，ここでは$|F(\omega)|^2$が分母から消えているので数値的不安定が生じない.

同様に，ある周波数帯における群遅延時間の標準偏差を計算する際には

$$\sigma_{tgr}{}^2 = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} t_{gr}{}^2(\omega)|F(\omega)|^2\, d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2\, d\omega} \tag{10}$$

のような積分を行う必要があるが，被積分関数の$t_{gr}(\omega)$に式(7)右辺を代入すると$|F(\omega)|^2$は打ち消し合って

$$\sigma_{tgr}{}^2 = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2}[(dI/d\omega)\cos\theta + (dR/d\omega)\sin\theta]^2\, d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2\, d\omega} \tag{11}$$

となる．式(7)で$|F(\omega)|^2$が分母に来ることが数値的不安定の原因であったが，ここでは$|F(\omega)|^2$が分母から消えているので数値的不安定が生じない.

以上により，群遅延時間の計算における数値的不安定が回避でき，群遅延時間の平均と標準偏差をいずれも安定的に計算することができる.

4. おわりに

本稿は著者の既往の研究[10]に対する補遺として位置づけられるものである.

既往の研究[10]では，地震動位相の微分可能性に関する理論的考察として，地震動位相の定義に立ち返り，地震動のフーリエ変換の微分可能性について確認を行い，その結果に基づいて地震動位相の微分可能性を検討したが，計算の過程に関する記述が簡略すぎたため，読者から厳密でないとの指摘をいただいた． そこで，本稿では，既往の研究[10]で行った理論的考察に対する補足を行って厳密化するとともに，より直感的な説明も加えた．これにより，地震動位相はフーリエ振幅がゼロなる場合を除き円振動数で微分可能であり，群遅延時間は定義可能であることがより明確になったと考えられる.

群遅延時間の数値計算法に関しては，既往の研究[10]では群遅延時間の平均値のみを対象としており，群遅延時間の標準偏差の計算には言及できていなかった．そこで本稿では，著者による既往の提案法を改良し，群遅延時間の平均と標準偏差をいずれも安定的に計算できる方法を提案した.

本研究により群遅延時間の定義および数値計算法に関して不明確な点が大きく解消されたと考えている.

参考文献

1) 和泉正哲，勝倉裕：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会構造系論文集，第 327 号，pp. 20-26, 1983.
2) 理論地震動研究会編：地震動－その合成と波形処理，鹿島出版会，1994.
3) コーエン, L.（吉川昭・佐藤俊輔訳）：時間－周波数解析，pp. 1-26, 朝倉書店，1998.
4) 佐藤智美，植竹富一，菅原良次：群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 493 号，pp. 31-39, 1997.
5) 佐藤忠信，室野剛隆，西村昭彦：観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集，No. 640/I-50, pp. 119-130, 2000.
6) 鉄道総合技術研究所編：鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計，丸善出版，2012.
7) 大川出，斉藤大樹，佐藤智美，佐藤俊明，北村春幸，鳥井信吾，辻泰一，北村佳久，藤田聡，関谷裕二，関松太郎：長周期地震動に対する超高層建築物等の安全対策に関する検討，建築研究所資料，No. 127, 2010.
8) 佐藤忠信：地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈，土木学会論文集 A1, Vol. 70, No. 2, pp. 295-305, 2014.

9) 佐藤忠信，吉田郁政，大島義信：地震動位相のモデル化について，土木学会論文集 A1, Vol. 70, No. 4, pp.I_273-I_284, 2014.
10) 野津厚：地震動位相の微分可能性に関する考察と群遅延時間の数値計算法の改良，土木学会論文集 A1（構造・地震工学），Vol.73，No.1，pp.187-194，2017.
11) Katukura, H., Ohno, S. and Izumi, M.: Symmetrical FFT technique and its applications to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 717-725, 1989.

DIFFERENTIABILITY OF PHASE SPECTRUM OF EARTHQUAKE GROUND MOTION AND IMPROVEMENT OF NUMERICAL CALCULATION OF GROUP DELAY TIME: A SUPPLEMENTARY WORK

Atsushi NOZU

A supplementary formulation was added to the author’s previous study regarding the differentiability of ground motion phase. An intuitive explanation was also added. As a result, it was clarified that ground motion phase is differentiable with respect to angular frequency and group delay time can be defined as long as the Fourier amplitude is nonzero. Also, to cope with numerical difficulty in calculating group delay time, the author devised a new, numerically stable method which can calculate both the mean and standard deviation of the group delay time.