# 加速度時刻歴のフーリエ変換実数部における
# 非定常特性のモデル化

杉山　佑樹[1]・佐藤　忠信[2]・室野　剛隆[3]・坂井　公俊[4]

[1]正会員　鉄道総合技術研究所　鉄道地震工学研究センター（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail: sugiyama.yuki.73@rtri.or.jp
[2]正会員　京都大学　名誉教授（〒606-8501 京都市吉田本町）
E-mail:satotdnb@yahoo.co.jp
[3]正会員　鉄道総合技術研究所　研究開発推進部（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail: murono.yoshitaka.51@rtri.or.jp
[4]正会員　鉄道総合技術研究所　鉄道地震工学研究センター（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail: sakai.kimitoshi.36@rtri.or.jp

本検討では，観測地震記録の加速度時刻歴について，そのフーリエ変換の実数部を模擬するため，実数部に見られる非定常特性の表現方法や，弱定常特性の確率特性を規定するパラメータについて検討した．非定常特性に関して，対数正規分布に基づいた回帰式によって，非定常特性の形状を概ね表現できることがわかった．弱定常特性について，実数部から非定常特性の影響を除いた標準化実数部の差分に注目すると，その分散値はベキ乗則を有しており，ベキ乗則から相関特性が表現できることがわかった．また，標準化実数部平均勾配を評価すると，その確率特性は正規分布で規定されており，その特性からベキ乗則が誘導されることがわかった．これらの手法を用いて，実数部の非定常特性と弱定常特性を表現することで，実数部を模擬できる可能性がある．

***Key Words :*** *ground motion, real part, non-stationary characteristics, stochastic process, power-law*

## 1.　まえがき

地震動の模擬に関しては様々な方法が提案されている．フーリエ振幅スペクトルと位相スペクトルを与えて、フーリエ逆変換によって時刻歴を模擬するため，最初はフーリエ振幅のモデル化に主眼がおかれた．この過程でフーリエ振幅の非定常性[1)]をモデル化して、時間周波数解析を行う方法論も一般化された．さらに、位相をモデル化する方法論も議論されるようになり、位相差分の相関性[2)]や非ガウス確率特性[3)]などが議論されるようになってきている．こうした方法では地震動の本質をとらえることが難しいとして，物理的な観点から，震源の破壊過程や伝播経路の特性をモデル化したうえで，地震動の物理過程を考慮して地震動を模擬する方法[例えば4),5),6)]が確立されている．しかしながら，これらの方法によって模擬される地震動は，一種のシナリオ地震動であり，断層の破壊過程や伝播経路の不確定性を十分に考慮できているわけではない．

また，構造物の建設地点において，対象とする地震規模の観測記録が得られることは少なく，現状では構造物の応答の不確定性について議論できるほど十分な観測記録が存在するとは言えない状況である．しかし、観測記録の加速度時刻歴を一サンプル確率過程と見なし、その不確定性を支配する、確率過程のパラメータが同定できるなら、観測記録と同値なサンプル確率過程を多数模擬できることになり、構造物の応答特性に及ぼす地震動の不確定性が評価できることになる．

本検討では，因果性を満たすサンプル確率過程としての地震動を模擬するため，加速度時刻歴のフーリエ変換の実数部に着目した．複数の観測加速度時刻歴を用いて，実数部に見られる非定常性のモデル化の方法論を提案するとともに，実数部を規定する確率特性のパラメータについて検討した．

このようにして，実数部が模擬できれば、地震動の因果性から、フーリエ変換の虚数部はヒルバート変換[7)]によって求めることができるので、確率過程としての加速度時刻歴を一つの観測加速度時刻歴から多数模擬できることになる．

## 2. 加速度時刻歴のフーリエ変換の実数部の処理

時間を$t$で表し，加速度時刻歴を$f(t)$とし，そのフーリエ変換を$F(\omega)$とおけば，次式で表される．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t} dt \\ = \mathcal{R}(\omega) - i\,\mathfrak{I}(\omega) \tag{1}$$

ここに，$\omega$は角周波数である．$\mathcal{R}(\omega)$と$\mathfrak{I}(\omega)$はフーリエ変換の実数部と虚数部で，それぞれ次式で与えられる．

$$\mathcal{R}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\ \mathfrak{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \tag{2}$$

式(2)から，関数$f(t)$が時間$t$に関する可積分関数であれば，$\mathcal{R}(\omega)$と$\mathfrak{I}(\omega)$は$\omega$の連続関数であり，かつ，$\omega$に関して微分可能な関数である．本検討では観測地震記録の加速度時刻歴$f(t)$を可積分な連続関数として扱う．

本章の解析に用いるのは，1993年北海道南西沖地震の際に寿都町新栄で観測されたEW成分の加速度記録(離散時間間隔$\Delta t$は0.02秒)であり，加速度時刻歴の離散点個数は16384である．その後半にゼロ点を足し込み，離散点総数$m$を$2^{25}$個としたものを，因果性を満たす加速度時刻歴として取り扱う．有効角周波数$\omega_e = 2\pi/\Delta t$は$100\pi$であり，ナイキスト角周波数$\omega_n$は，$\omega_n = \omega_e/2 = 50\pi$である．したがって，$\Delta t \to 0$の極限で，$\omega_n \to \infty$となる．なお，離散点総数が$2^{25}$個となっているので，この場合の離散角周波数間隔を$d_0\omega$とすれば，次式で与えられる．

$$d_0\omega = 2\pi/\Delta t/m = 100\pi/2^{25} \tag{3}$$

**図-1**の上段は，離散角周波数を$\omega_l = l \cdot d_0\omega$として，寿都で記録された加速度時刻歴をフーリエ変換して求まる離散実数部をサンプル過程とした$r_l = \mathcal{R}(\omega_l)$を$\omega_l$に対して描画したものである．$d_0\omega$間隔のサンプル実数部差分を次式で定義する．

$$d_0 r_l = r(\omega_l + d_0\omega) - r(\omega_l) \tag{4}$$

**図-1**の下段はサンプル実数部の微分係数の近似値である$d_0 r_l/d_0\omega$が描画されている．加速度時刻歴を連続関数として扱うことから，実数部を各周波数に関して微分することに問題はない．

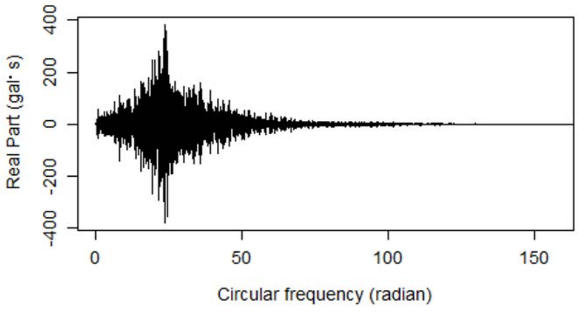
角周波数$\omega$は$d_0\omega$間隔で離散化されているので，間隔の大きい離散角周波数間隔$\Delta\omega$を次式で定義する．

$$\Delta\omega = 2^n d_0\omega \tag{5}$$

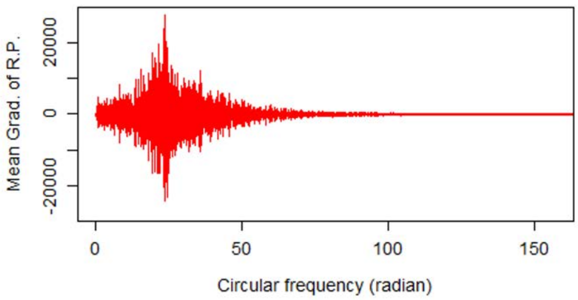
また，$\Delta\omega$間隔でのサンプル実数部の差分$\Delta r_l$を次式で定義する

$$\Delta r_l = r(\omega_l + \Delta\omega) - r(\omega_l) \tag{6}$$

この差分$\Delta r_l$を用いて，その確率特性や角周波数$\omega_l$に対する相関特性を抽出するが，**図-1**の上段に示すように，サンプル実数部$r_l$は$\omega_l$に対して，非定常性を示している．サンプル過程に非定常性が見られると，その確率特性の推定には非定常性の影響が残る．非定常性が見られるデータ列に対して確率密度関数を推定した場合，データ列の後半部分は振幅が小さくなるため，確率変数のゼロ近傍の密度が高くなり，確率密度関数の推定精度が落ちることなどが考えられる．そこで，サンプル実数部列$\{r_l\}$が$\omega_l$に対して定常になるように修正する．$r_l$の非定常性

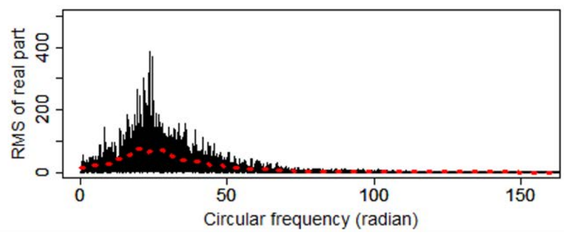



(a) フーリエ変換実数部

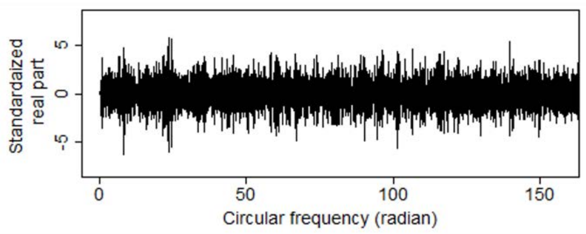



(b) 実数部平均勾配

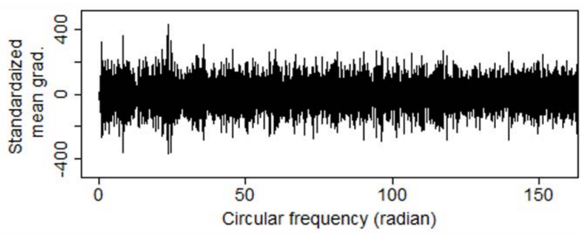
**図-1** 寿都記録のフーリエ変換の実数部と平均勾配




(a) 実数部の二乗平方根




(b) 標準化実数部




(c) 標準化実数部平均勾配

**図-2** 実数部の二乗平方根と標準化実数部および平均勾配

を抽出するために，$x_l = \sqrt{r_l^2}$を図示したのが**図-2**の上段の黒実線である．これにバンド幅$b = 0.6Hz$のParzen窓[8]を乗じて，$x_l$の変動特性を抽出したのが，上段の赤点線である．これを$x_l$の平均変動過程として$\tilde{x}_l$と表現する．その上で，$y_l = r_l/\tilde{x}_l$をサンプル離散標準化実数部と定義して，それを**図-2**の中段に描画した．**図-1**の$r_l$とは異なり，$y_l$は定常化されたように見える．そこで，以下の解析ではエルゴード仮説が成立するものとし，**図-2**の中段に描画したサンプル離散過程$\{y_l\}$が弱定常性に従うものと仮定する．したがって，$\{y_l\}$を用いれば，離散確率過程$y_l$の媒介変数に対する相関特性や確率特性が誘導できることになる．

以上のことから，実数部$r_l$は非定常性を有するその平均変動過程$\tilde{x}_l$と弱定常性を有する標準化実数部$y_l$を合わせて表現できると考えられる．$\tilde{x}_l$については3章で提案する方法論を用いてモデル化することによって，$y_l$については，その相関特性や確率特性を規定するパラメータを同定し，確率過程として模擬することによって，実数部$r_l$を模擬することが可能となる．

## 3. 実数部の表現方法の提案

### (1) 実数部の非定常性について

離散実数部$r_l$の非定常特性である平均変動過程$\tilde{x}_l$を模擬するため，その表現方法について検討する．**図-2**の上段の赤点線に示す$\tilde{x}_l$を見ると，対数正規分布の確率密度関数と似通った形状を示している．そこで，本検討では，平均変動過程の離散値過程を$\{\tilde{x}_l\} = \{\tilde{x}(\omega_l)\}$として，$\{\tilde{x}_l\}$を対数正規分布の確率密度関数に基づいて表現することとした．対数正規分布による表現方法を以下に示す．まず，観測地震記録の加速度時刻歴から$\{\tilde{x}_l\}$を算定し，$\{\tilde{x}_l\}$の最大値と，$\{\tilde{x}_l\}$を最大値で除した標準化平均変動過程$\{\tilde{x}_l'\}$を評価する．次に，標準化した$\{\tilde{x}_l'\}$を，標準化した対数正規分布の確率密度関数を用いてフィッティングを行う．ここで，対数正規分布$f(\omega)$は式(7)のように定義される．

$$f(\omega_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\omega} \cdot exp\left\{\frac{-(log\ \omega_l - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (7)$$

式(7)の確率密度関数が最大値を取る時の$\omega_l$（最頻値）を$\omega_{max}$とすると，$\omega_{max}$と$f(\omega_{max})$は式(8)，(9)のようになる．

$$\omega_{max} = \exp(\mu - \sigma^2) \qquad (8)$$

$$f(\omega_{max}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot exp\left\{\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right\} \qquad (9)$$

すると，標準化した対数正規分布は，式(8)，式(9)より，式(10)のように表される．

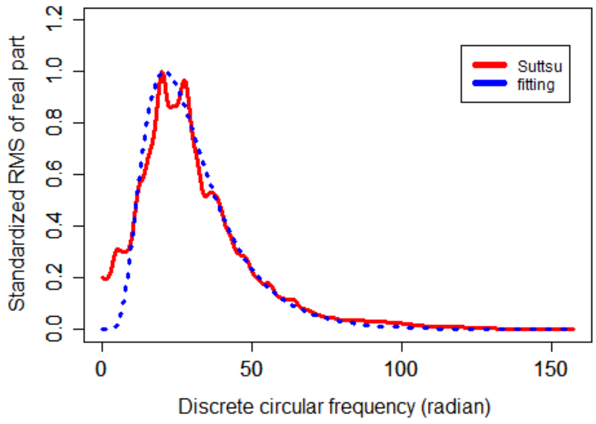



**図-3** 寿都記録の平均変動過程$\{\tilde{x}_l\}$

$$\frac{f(\omega)}{f(\omega_{max})} = \frac{\exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\omega} \cdot exp\left\{\frac{-(log\ \omega - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} (10)$$

この式(10)を用いて，標準化した$\{\tilde{x}_l'\}$の形状のフィッティングを行い，$\{\tilde{x}_l\}$の形状を模擬する．こうして得られる，対数正規分布の$\mu$と$\sigma$，および$\{\tilde{x}_l\}$の最大値について，地震のマグニチュード・震源距離・震源深さ・観測点の地盤分類等を変数とした回帰式を作成することで，$\{\tilde{x}_l\}$の模擬が可能となる．

寿都記録から求まる$\{\tilde{x}_l'\}$について，対数正規分布によるフィッティングを行った結果を**図-3**に示す．寿都記録から評価した$\{\tilde{x}_l'\}$（赤線）とフィッティング結果（青線）がよく一致している．また，寿都記録の$\{\tilde{x}_l'\}$とフィッティング結果との二乗平均平方根誤差（RMSE）は約0.066であり，対数正規分布を用いることで，平均変動過程を精度よく模擬できる可能性がある．

### (2) 実数部の相関特性について

ここでは，弱定常性を有する標準化実数部を模擬するため，相関特性を規定するパラメータを同定し，相関特性を表現する方法論を提案する．

まず，**図-2**の中段に描画した離散標準化実数部$\{y_l\}$の差分列$\{\Delta y_l\} = \{y(\omega_l + \Delta\omega) - y(\omega_l)\}$の角周波数に関する分散特性について検証する．**図-4**に$\{\Delta y_l\}$の差分間隔$\Delta\omega = k \cdot d_0\omega = 2^n d_0\omega$を変化させて評価した分散値$E[(\Delta y_l)^2]$と$\Delta\omega$の関係を，底10の両対数で示す．差分間隔$\Delta\omega$の値が小さい範囲における分散値は，対数軸上で$\Delta\omega$に比例しているように見える．$\Delta\omega = 0$近傍の$\Delta\omega$（$n = 0,1,\cdots,4$）の分散値を直線近似すると，赤実線のように傾き2の直線で表される．また，赤点線で示すように，差分間隔$\Delta\omega$が大きい範囲では，分散値は概ね一定となっている．このことから，差分間隔$\Delta\omega$に対して，$\{\Delta y_l\}$の分散値$\sigma_{\Delta y}^2$を式(11)のように表すことができ，寿都記録では，$\sigma_0 = 78.22$，$\sigma = 1.78$が得られている．

$$\sigma_{\Delta y}^2 = E[(\Delta y_l)^2] = \begin{cases} \sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H} & \Delta\omega < \Delta\omega_L \\ \sigma^2 & \Delta\omega \geq \Delta\omega_L \end{cases} \quad (11)$$

また，$\Delta\omega_L$は**図-4**の赤実線と赤点線の交点から求まる$\Delta\omega$の値であり，$\Delta\omega_L = 0.02248$となる．

一方，$\Delta\omega_L = L\cdot d_0\omega$であり，$\Delta\omega = k\cdot d_0\omega$であるので，$\Delta\omega$と$\Delta\omega_L$との大小関係は，$k$と$L$の大小関係に変換される．$d_0\omega = 100\pi/2^{25}$の場合には，$L = 2401$となる．**図-4**から，$k$値が一定値$L$より小さいとき，すなわち，$n = 0,1,\cdots,11$ の範囲では$H \cong 1$ であり，$E[(\Delta y_l)^2] = \sigma_0^2(\Delta\omega)^2$となる．$n = 12,\cdots,24$の範囲では，$H \cong 0$が得られ，$E[(\Delta y_l)^2] = \sigma^2$である．

ここで，平均値がゼロになるように調整されている2つの確率変数$X$と$Z$を考え，両者の差分の二乗平均値を考えると次式が成立する．

$$E[(X-Z)^2] = E[X^2] + E[Z^2] - 2E[XZ] \quad (12)$$

今，Xと$Z$の共分散値を$\gamma_{XZ}$とすれば，次式で表現される．

$$\gamma_{XZ} = E[XZ] \quad (13)$$

データ列$\{y_l\}$にエルゴード仮説が成立するものとして，$t-s=k=2^n$，$X$のサンプル過程を$y_t$，$Z$のサンプル過程を$y_s$と置き，データ列$\{y_l\}$に弱定常性が仮定できれば，**図-4**に描画されている赤実線の範囲，すなわち，$n = 0,1,\cdots,11$ では，$E[(X-Z)^2] = E[(y_t - y_s)^2] = \sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H}$が得られる．$y_t$と$y_s$の共分散$\gamma_{ts}$は，$\gamma_{ts}$ $=E[y_t y_s]$なので次式を得る．

$$E[y_t y_s] = \frac{1}{2}\{\sigma_0^2(|t-s|\Delta\omega)^{2H} - E[(y_t)^{2H}] - E[(y_s)^{2H}]\} \quad (14)$$

いま，$\Delta y_t$と$\Delta y_{t+k}$の自己共分散を$\gamma_{\Delta y_t \Delta y_{t+k}}$とすれば，それは次式で表現される．

$$\gamma_{\Delta Y_t \Delta Y_{t+k}} = \frac{\sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H}}{2}\{|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}\} \quad (15)$$

この式に式(14)の関係を代入し，整理すれば次式を得る．

$$\begin{aligned}\gamma_{\Delta y_t \Delta y_{t+k}} &= E[(y_{t+1}-y_t)(y_{t+k+1}-y_{t+k})] \\ &= E[y_{t+1}y_{t+k+1}] - E[y_{t+1}y_{t+k}] \\ &\quad -E[y_t y_{t+k+1}] + E[y_t y_{t+k}]\end{aligned} \quad (16)$$

この関係式が成立するのは，$k \leq L$を満たす範囲である．しかしながら，**図-4**に描画されている赤点線の範囲で，$E[(X-Z)^2] = \sigma^2$が成立しているので，この範囲での自己共分散の表現として次式が得られる．

$$E[y_t y_s] = \frac{1}{2}\{\sigma^2 - E[(y_t)^2] - E[(y_s)^2]\} \quad (17)$$

式(17)を式(15)に代入して，整理すれば次式が得られる．

$$\gamma_{\Delta y_t \Delta y_{t+k}} = 0 \quad (18)$$

この関係は，$k > L$を満たす$n = 12,\cdots,24$に対して成立していることに注意しなければならない．式(16)と(18)の関係は**図-4**に描画されているベキ乗則から導かれる確率過程$\{\Delta y_l\}$の自己共分散関数の特性を表現している．

この特性はエルゴード仮説が成立するものとし，サンプル過程に対して，媒介変数に関する弱定常性を仮定して求められたものであるので，サンプル過程の自己相関係数$\rho_k$は，媒介変数の離散点番号$(t+k)$と$t$の差$k$のみの関数となり，次式で定義される．

$$\rho_k = \gamma_{\Delta y_t \Delta y_{t+k}} / \gamma_{\Delta y_t \Delta y_t} \quad (19)$$

ここに，$\gamma_{\Delta y_t \Delta y_t}$は標準化実数部の差分の分散値であり，次式で定義される．

$$\sigma_{\Delta y}^2 = \gamma_{\Delta y_t \Delta y_t} = \sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H} \quad (20)$$

当然であるが，$\rho_0 \equiv 1$なので，自己相関係数列$\{\rho_k\}$を，次式のような数列で表現する．

$$\{\rho_k\} = \{1, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_L, 0, \cdots\} \quad (21)$$

ここに，$d_0\omega = 100\pi/2^{25}$とした場合の$L$値は整数値で，**図-4**の赤実線と赤点線の交点の離散角周波数間隔を決定する数値となる．**図-5**は，$H$を変化させたときの自己相関係数の変動を原点対称の図として描画したものである．$H = 1$の場合には，自己相関係数が矩形窓となっていることがわかる．

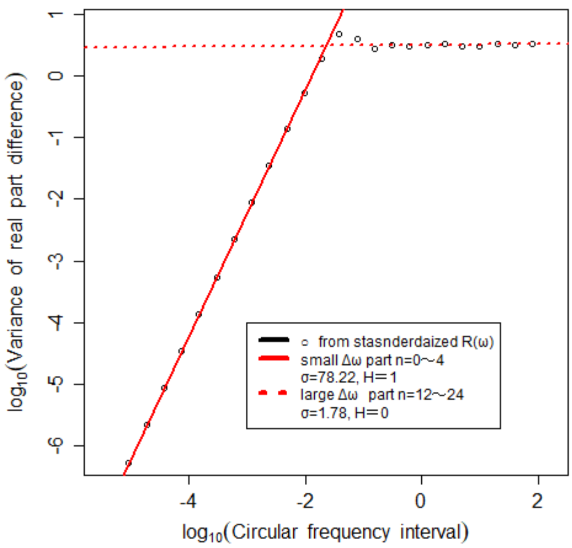


**図-4**　標準化実数部差分の分散値と離散角周波数間隔の関係

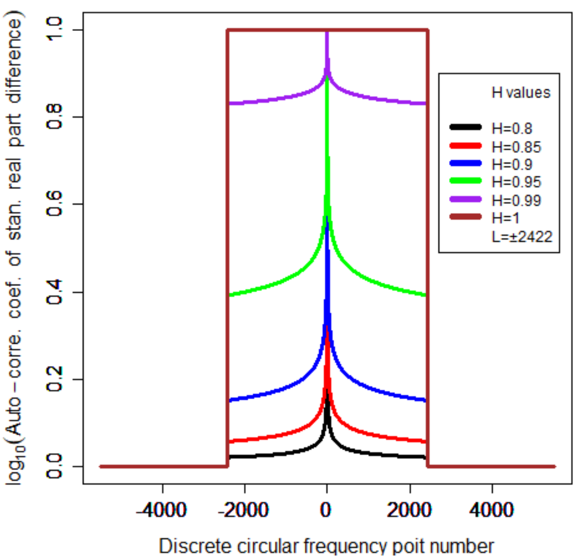


**図-5**　標準化実数部差分の分散値から誘導される自己相関特性

以上のように，観測記録の加速度時刻歴から評価した標準化実数部差分の分散値を評価すると，式(11)のような$\Delta\omega = 0$近傍の$\Delta\omega$に対して$(\Delta\omega)^2$に比例するベキ乗則を有しており，そこから得られるパラメータを用いて，標準化実数部差分の自己相関特性を表現することが可能となる．

## 4. 各種記録への適用性の検証

ここまでは，寿都記録の加速度時刻歴を用いて，非定常特性である平均変動過程の形状や，弱定常特性である標準化実数部の分散特性から自己相関特性を表現する方法について議論してきた．本章では，寿都記録以外の加速度時刻歴に対する提案手法の適用性を検証する．

本章の解析で用いる観測記録は，**表-1**に示す10記録を対象として各種分析を行うこととした．**図-6**に10記録の加速度時刻歴波形を示す．このように地震の規模，継続時間等が異なる加速度時刻歴を分析に用いる．以下では，寿都記録以外の各記録を釧路・根室・神戸・大崎・亀岡・十日町・日立・熊本・高槻記録と呼ぶ．これらの記録を用いる際，余震等の影響が含まれないように，対象とする地震イベント以降の後続波形の加速度が0となるように処理を行った．また，**表-1**に示す各記録の観測地点における表層30mの平均S波速度は，日本全国250mメッシュマップを用いた評価結果[9]を参考に決定している．

**表-1** 検討に使用する観測地震記録の諸元

| 発震日 | 地震名 | 観測点 | Mw | 震源距離 (km) | 深さ (km) | 表層30m 平均Vs (m/s) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993/01/15 | 釧路沖地震 | 釧路(気象庁) | 7.5 | 101.2 | 101 | 277.6 |
| 1993/07/12 | 北海道南西沖地震 | 寿都(気象庁) | 7.8 | 92.6 | 35 | 458.1 |
| 1994/10/04 | 北海道東方沖地震 | 根室(気象庁) | 8.3 | 171.6 | 28 | 272.7 |
| 1995/01/17 | 兵庫県南部地震 | 神戸(気象庁) | 6.9 | 23.0 | 16.5 | 459.7 |
| 1997/03/26 | 鹿児島県北西部地震 | K-NET大崎 | 6.1 | 87.2 | 8 | 206.7 |
| 2004/09/05 | 紀伊半島沖地震 | K-NET亀岡 | 7.4 | 257.2 | 44 | 437.9 |
| 2004/10/23 | 新潟県中越地震 | K-NET十日町 | 6.6 | 24.8 | 13 | 417.4 |
| 2011/3/11 | 東北地方太平洋沖地震 | K-NET日立 | 9.0 | 259.3 | 24 | 305.1 |
| 2016/4/16 | 熊本地震（本震） | K-NET熊本 | 7.0 | 12.9 | 12 | 255.8 |
| 2018/6/18 | 大阪北部地震 | K-NET高槻 | 5.5 | 13.3 | 13 | 445.1 |

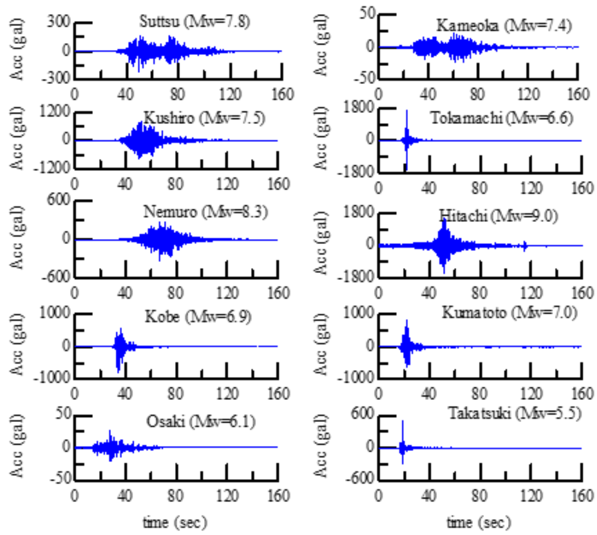



**図-6** 観測地震記録の加速度時刻歴波形

### (1) 実数部平均変動過程についての適用性

複数の加速度時刻歴から得られる実数部の平均変動過程$\{\tilde{x}_l\}$を対数正規分布によって表現するためには，対数正規分布を規定する$\mu$と$\sigma$をモデル化する必要がある．そこで，上述の10記録より得られる$\mu$と$\sigma$についての回帰式を作成し，平均変動過程が対数正規分布形状に基づいて模擬できるかどうかを検証した．

これら10記録に対して，平均変動過程の$\mu$と$\sigma$を評価し，Sgobbaら[10]の方法を参考に式(22)，(23)にしたがって回帰した．

$$\mu = a_1 + a_2 Mw + (a_3 + a_4 Mw)\ln\sqrt{X^2 + a_5{}^2} + a_6 \ln V_{s,30} + a_7 D \quad (22)$$

$$\ln\sigma = b_1 + b_2 Mw + b_3 X + b_4 \ln V_{s,30} + b_5 D \quad (23)$$

ここで，$Mw$はマグニチュード，$X$は震源距離(km)，$D$は震源深さ(km)，$V_{s,30}$は表層30m平均S波速度(m/s)である．対数正規分布の形状は基本的には，$\mu$が大きいほど対数正規分布のピーク位置は高周波数側に推移し，$\sigma$が大きいほど対数正規分布の裾野は広くなると考えられる．

このことを利用して，$\mu$と$\sigma$の回帰式が一般的な地震動の傾向を表現できていることを確認するため，回帰式の各パラメータ（マグニチュード，震源距離，震源深さ，表層30mの平均S波速度）をそれぞれ変化させたときの$\mu$と$\sigma$の傾向を**図-7**に整理した．**図-7**では，回帰式の各パラメータを横軸，$\mu$と$\sigma$を縦軸に取っている．また，一つのパラメータに注目するとき，その他のパラメータは一定値を与えている．まず，**図-7(a)**を見ると，マグニチュードが大きいほど$\mu$が小さな値を示しているが，これは地震規模の増大に伴い長周期成分が卓越するという，一般的な地震動の特性と傾向が一致している．次に，**図-7(b)**を見ると，震源距離が長いほど$\mu$と$\sigma$が大きな値を示す傾向が確認できる．地震のマグニチュード・震源深さ，観測地点の地盤条件が同じであるとき，震源から離れた地点ほど，震源由来の表面波の影響などを受けて，地震動の長周期成分が卓越すること考えられる．また，震源距離が長いほど地震動は距離減衰し，相対的にノイズ等の影響が大きくなるため，標準化した平均変動過程の裾野が広がると考えられる．以上の理由から，**図-7(b)**のような傾向が表れていると推察する．そして，**図-7(c)**においても，震源距離と同様の理由から，震源深さが深いほど$\sigma$がわずかに大きくなる傾向を示していると思わ

れる．図-7(d)において，最後に表層30mの平均S波速度が大きいほど，平均値が大きな値を示している．例えば，表層30mの平均S波速度が800m/s程度の地点は基盤が露頭しているような地点である．そのような良好な地盤では固有周期が小さく，高周波数の成分が比較的増幅されやすい傾向が表れていると考える．

図-8に寿都記録・亀岡記録から評価した標準化平均変動過程$\{\tilde{x}_l'\}$と，回帰式から再度評価した対数正規分布を示す．同図には参考として，$\{\tilde{x}_l'\}$を対数正規分布でフィッティングした結果も示している．図-8の上段より，寿都記録から評価した標準化した$\{\tilde{x}_l'\}$（赤線）と，回帰式から再度評価した対数正規分布（緑線）は一致しており，回帰式のRMSEとフィッティング結果（青線）のRMSEは同程度となっている．また，図-8の下段を見ると，亀岡記録から評価した標準化した$\{\tilde{x}_l'\}$（赤線）と，回帰式から再度評価した対数正規分布（緑線）は，多少の差異はあるものの概ね一致していることがわかる．RMSEで見ると，寿都記録から評価したRMSEよりも，亀岡記録のRMSEが大きな値を示しているが，これは亀岡記録の平均変動過程に急峻なピークが複数見られることが原因と考えられる．以上から式(22)，(23)に示される形の回帰式で，$\mu$と$\sigma$を概ね表現可能であると考えられるが，平均変動過程に急峻なピークが複数見られる場合には，精度が低くなる傾向が確認された．

### (2) 標準化実数部差分の相関特性についての適用性

表-1に示す加速度時刻歴のうち，寿都・釧路・根室・神戸記録を用いて，標準化実数部差分の分散値$\sigma_{\Delta y}^2 = E[(\Delta y_l)^2]$の変動を$\Delta\omega$に対して評価した結果を図-9に示す．これを見ると，使用した4記録において$\Delta\omega$の小さい範囲で$\sigma_{\Delta y}^2$のベキ乗則が成り立っている．これとともに，観測記録によって式(11)における$\sigma_0^2$の値が異なっている．

各観測記録の$\sigma_0^2$と$L$値を表-2に示すとともに，この$\sigma_0^2$と$L$値を用いて，理論的に$\{\Delta y_l\}$の自己相関係数を誘導した結果を図-10に示す．図-10を見ると，複数の観測記録からそれぞれ評価される$L$値に応じて，自己相関特性が変化しており，観測記録ごとに固有の標準化実数部の相関特性をモデル化できる可能性がある．

### (3) 標準化実数部差分の確率特性

複数の観測加速度記録から求まるフーリエ変換の標準化実数部差分がある程度の大きさまでは、その分散値が$E[(\Delta y_l)^2] = \sigma_0^2(\Delta\omega)^2$であったことから、次式のように$\Delta y_l$を$\Delta\omega$で除した、標準化実数部平均勾配$g_l$の確率特性について考えてみる．

$$g_l = \Delta y_l / \Delta\omega \qquad (24)$$

複数の加速度時刻歴について，差分間隔$\Delta\omega = 2^n d_0 \omega$を$\Delta\omega$の小さい範囲（$n = 0,1,\cdots,11$）で変化させて標準化

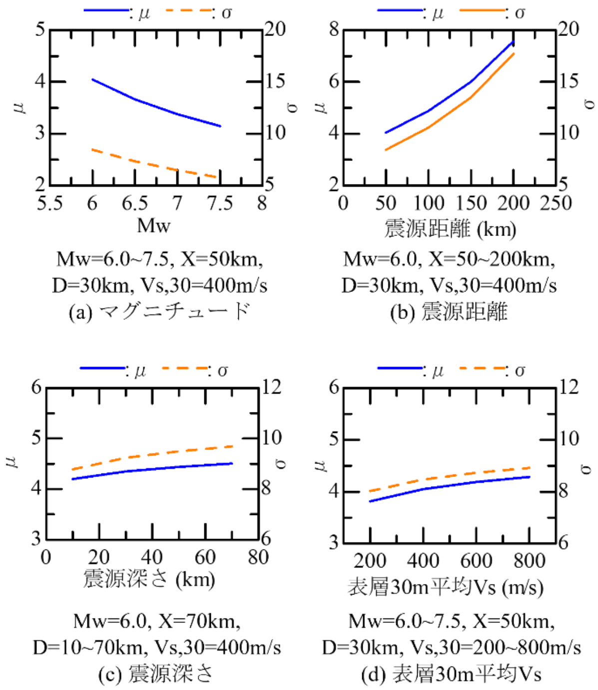



図-7　回帰式における各パラメータと$\mu$・$\sigma$の関係

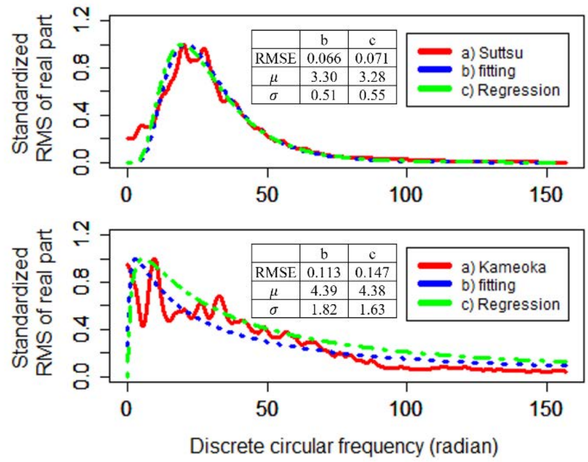



図-8　標準化平均変動過程と回帰結果の比較

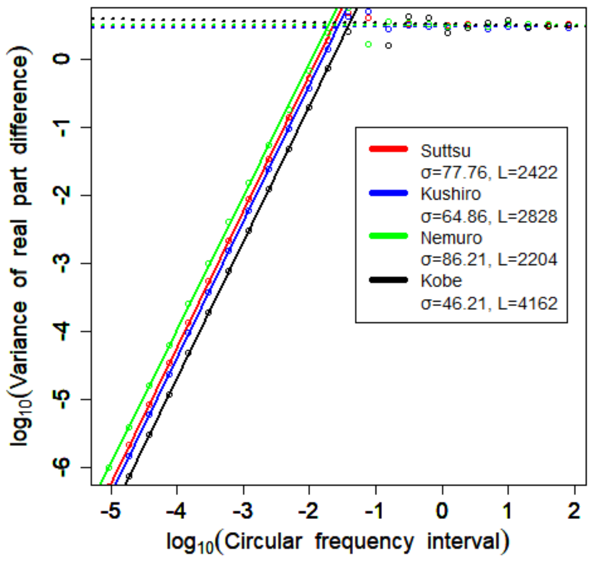



図-9　観測記録の標準化実数部差分の分散値

実数部平均勾配を計算し，それぞれのヒストグラムを評価した結果を**図-11**に示す．**図-11**において，凡例に示す配色の実線が各差分間隔に対応する$g_l$のヒストグラムである．**図-11**を見ると，各観測記録における$g_l$のヒストグラムは差分間隔に関わらず同じであり，赤点線で示す正規分布の確率密度関数と概ね一致する．このことから，標準化実数部平均勾配の確率特性は正規分布で規定されていると考えられる．また，各観測記録の評価結果を比較すると，観測記録ごとに正規分布の分散値が異なっており，標準化実数部平均勾配の確率特性は観測記録ごとに固有のものであると考えられる．さらに，**表-2**に示すベキ乗則から評価した$\sigma_0^2$と，各観測記録のヒストグラムと一致する正規分布の分散値$\sigma^2$を比較すると，両者が概ね一致している．ここで、標準化実数部平均勾配は式(24)で表されることから、標準化実数部差分の分散値$\sigma_{\Delta y}^2$は、次式で表される．

$$\sigma_{\Delta y}^2 = E[(\Delta y_l)^2] = \sigma_0^2(\Delta\omega)^2 \tag{25}$$

このことから，標準化実数部平均勾配の確率特性が差分間隔に関わらず正規分布にしたがうという特性から，標準化実数部の分散値がベキ乗則を有するという特性が誘導されていると考えられる．

ここで，標準化実数部平均勾配の確率特性について考察する．標準化実数部平均勾配の確率特性は正規分布で規定されていることから，式(22)より標準化実数部差分$\Delta y_l$も正規分布に従うと考えられる．これは，標準化実数部が非整数ブラウン運動で表現できる可能性を示唆している．非整数ブラウン運動は媒介変数に対して連続性を有する確率過程である。したがって，実数部$R(\omega)$も連続性をもつと考えられるため，これらの特性は加速度時刻歴が連続関数であることから得られる性質である可能性がある．

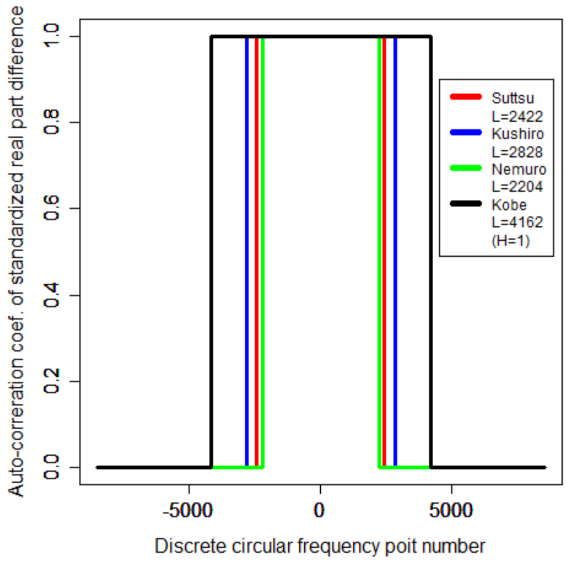



**図-10** ベキ乗則から誘導した自己相関係数

**表-2** 標準化実数部差分の分散値における$\sigma_0^2$とL値，および標準化実数部平均勾配の確率特性の分散値$\sigma^2$

| 観測記録 | $\sigma_0{}^2$ | L値 | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|
| 寿都 | 78.22 | 2401 | 80 |
| 釧路 | 65.07 | 2828 | 65 |
| 根室 | 86.21 | 2204 | 90 |
| 神戸 | 46.31 | 4162 | 50 |

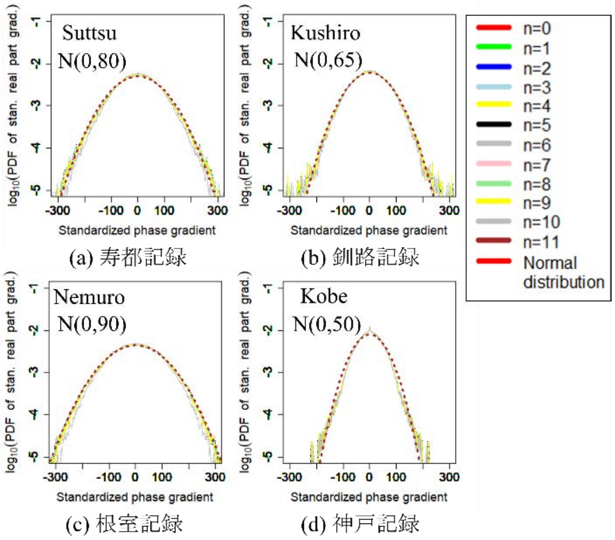



**図-11** 標準化実数部平均勾配のヒストグラムと正規分布

## 5. むすび

本検討では，観測地震記録の加速度時刻歴について，そのフーリエ変換の実数部の非定常特性をモデル化する方法論と，弱定常特性の確率特性を規定するパラメータについて検討した．まず，観測記録のフーリエ変換の実数部には非定常性が確認された．非定常性が見られると，確率密度関数の推定等に影響を及ぼすことから，実数部の絶対値をparzen窓で平滑化した平均変動過程で実数部を除した，標準化実数部について，その相関特性・確率特性を規定するパラメータを同定することが必要だと考えられた．

実数部の非定常特性である平均変動過程を表現するため，対数正規分布の確率密度関数形状によりフィッティングする方法を提案した．観測記録の標準化平均変動過程とそれを対数正規分布形状でフィッティングした結果は，概ね一致しており，提案手法によって平均変動過程の形状を表現できる可能性があることを確認した．

次に，実数部の弱定常特性である標準化実数部の差分に注目すると，その分散値は，差分間隔の2乗に対して比例するベキ乗則を有することがわかった．また，ベキ乗則から標準化実数部差分の自己相関特性を理論的に表現することが可能となっている．

最後に，これらの提案手法が複数の観測記録にも適用

可能であることを確認した．非定常特性に関して，対数正規分布形状によるフィッティングすることにより得られる$\mu$と$\sigma$をモデル化するため，Sgobbaら[10]の方法を参考に回帰式を作成した．回帰式より評価した$\mu$と$\sigma$と，回帰式の各パラメータとの関係を確認すると，一般的な地震動の傾向と概ね一致していると考えられた．この回帰式から評価した対数正規分布形状は，観測記録の平均変動過程と概ね一致することが確認された．しかしながら，平均変動過程の形状だけでなく，その最大値も表現する必要がある．したがって，平均変動過程の最大値をモデル化することについては今後の課題として残っている．
弱定常特性に関して，複数の観測記録で，標準化実数部差分の分散値にベキ乗則が確認され，そこから同定されるパラメータを用いて，各観測記録に固有の自己相関特性を表現できる可能性があることがわかった．標準化実数部差分を差分間隔で除した，標準化実数部平均勾配に注目すると，その確率特性は正規分布で規定されており，その特性からベキ乗則が誘導されることを確認した．そして，これらの分散特性・確率特性は加速度時刻歴が時間の連続関数であることから得られる性質であると推察される．

以上から，実数部の非定常特性については対数正規分布に基づいて表現することにより，弱定常特性についてはその相関特性や確率特性から確率過程を模擬することにより，実数部の模擬が可能となると考えられる．このように観測地震記録のフーリエ変換の実数部を模擬することができれば，観測記録と同値なサンプル確率過程としての加速度時刻歴を多数模擬できることになり、構造物の応答特性に及ぼす地震動の不確定性を評価できると考えられる．

**謝辞**：本検討では，防災科学技術研究所のK-NET観測網と気象庁で観測された記録を利用させていただきました．

**参考文献**

1) 亀田弘行：強震地震動の非定常パワースペクトルの算出法に関する一考察，土木学会論文報告集，第 235 号，pp.55-62，1977.
2) 佐藤忠信：地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈，土木学会論文集 A1，Vol.70，No.2，pp.295-305，2014.
3) 佐藤忠信：地震動位相差分の特異な確率特性と確率過程－分散の定義できない群遅延時間のモデル化－，土木学会論文集 A1，Vol.73，No.2，pp.344-363，2017.
4) Aki,,K..：Scaling law of seismic spectrum, *J Geophys*、 *Res.*, 72, pp. 1217-1231, 1967.
5) Aki, K. and Richard P. G. ：*Quantitative seismology theory and methods*, pp. 162-163, University science books, 2002.
6) 野津厚，長尾毅，山田雅行：スペクトルインバージョンに基づく全国の強震観測地点におけるサイト増幅特性とこれを利用した強震動評価事例，日本地震工学会論文集，第 7 巻，第 2 号，pp. 215-234，2007.
7) Papoulis A. :Fourier integral and its applications,p192-209, pp. 213-217, McGraw-Hill, 1962.
8) Parzen E. ：On estimation of a probability density function and mode, Ann. Math. Stat. 33, pp. 1065-1076,1962.
9) 松岡昌志，若松加寿江，藤本一雄，翠川三郎：日本全国地形・地盤分類メッシュマップを利用した地盤の平均 S 波速度分布の推定，土木学会論文集 No.794, I-72, pp.239-251, 2005.
10) Sgobba S., Stafford P., Marano G. : A Seismologically Consistent Husid Envelope Function for the Stochastic Simulation of Earthquake Ground-Motions, Computational Methods in Stochastic Dynamics, pp.229-246, 2011

（2021. ?. ?? 受付）

## MODELING OF NON-STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE REAL PART BY FOURIER TRANSFORMING THE ACCELERATION TIME HISTORY

Yuki SUGIYAMA, Tadanobu SATO, Yoshitaka MURONO and Kimitoshi SAKAI

In this study, for the purpose of simulate the real part of the Fourier transform of the acceleration time history of ground motion, we examined the methodology for modeling the non-stationary characteristics and the parameters that define the stochastic characteristics of the weak stationary characteristics. It was found that the shape of the non-stationary characteristics can be roughly expressed by the regression equation based on the lognormal distribution.Regarding the weak stationary characteristics, paying attention to the difference between the standardized real part excluding the influence of the non-stationary part from the real part, the variance value has power-law, and the correlation characteristic is derived from it. In addition, when the average gradient of the standardized real part was evaluated, it was found that its probability characteristic was defined by a normal distribution and was related to the power-law.From the above, it is possible to simulate the real part by modeling the non-stationary characteristics of the real part based on the lognormal distribution and simulating the stochastic process from the correlation characteristic and the stochastic characteristic of the weak stationary characteristics.