

隣接値の有意差を反映した空間確率場の表示法

後藤 浩之¹・Anirban CHAKRABORTY²

¹正会員 京都大学准教授 防災研究所 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

E-mail: goto@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp (Corresponding Author)

²正会員 法政大学教務助手 デザイン工学部 (〒162-0843 東京都新宿区谷田町 2-33)

E-mail: anirban.chakraborty.43@hosei.ac.jp

自然災害に対するハザードマップが現在広く活用されているが、ハザードマップで示される値は本来不確実性を有するものである。このため平均値だけでなく確率情報を活かして、表示される空間解像度を構成することが望ましい。既往の不確実性投影法 (UPM) は確率分布を直接扱うことができないため、本研究では隣接点での値の有意差に応じて解像度を調整する新たな表示法 (Uniform uncertainty mapping) を提案する。まずこの表示法の理論的な枠組みについて紹介し、数値的に与えた 1 次元/2 次元問題に適用してその性能について評価する。その後、逆問題の例として微動アレイ探査において 1 次元の速度構造を推定する問題、ハザードマップの例として 2 次元の地盤増幅率の表示に関する問題にそれぞれ適用する。

Key Words: 空間解像度, 確率場, 表示法, イメージング, ハザードマップ

1. はじめに

現在、国や地方自治体ではハザードマップが作成され防災計画等に活用されている¹⁾²⁾。ハザードマップには地盤災害、水災害、地震災害など多様なものがあるが、基本的には地域で予測される災害危険度を図上に示したものであり、地すべり地形のように確定的なものや震度のように予測値の平均が示されたものがある。最近では数値地図情報として提供されていることも多く³⁾⁴⁾、インタラクティブに地域を拡大して高解像度な地図と重ねて表示させることもできる。

しかし、ハザードマップで示される値は本来不確実性を有するものである。高解像度な地図と重ねるに耐えるだけの情報を有していなければ、過度に危険/安心情報を提供する可能性も考えられる。すなわち、不確実性に基づいた適切な空間解像度でハザードマップを示すことが重要であると言える。地震ハザードマップで示されることの多い震度は、本来は確率として評価されたものであるため、平均値だけでなくその確率情報を活かして空間解像度を構成することが望ましい。

このような表示法が必要とされる場面はハザードマップだけに限らない。例えば、逆解析により内部構造をイメージングするような問題では、観測レイアウトの都合により解像度の高い箇所と低い箇所が表れることがある。空間的に均一に結果を表示するのではなく、推定誤差に

応じて解像度の高い箇所と低い箇所を強弱を付けて表示することが望ましい⁴⁾⁵⁾。

以上のような背景から、Chakraborty and Goto⁶⁾は不確実性投影法 (Uncertainty Projected Mapping : UPM) を提案し、高密度地震観測網によるデータを用いてその性質を評価した。しかし、UPM は限られたデータしか扱えない場合にのみ有効であり、十分にデータが与えられた場合には平均を表示する手法と一致する⁷⁾。このため、確率分布そのものが与えられている場合や、サンプル数の多いデータを扱う場合には新たな枠組みが必要となる。

そこで本研究では、確率分布が与えられた場合に、隣接点の有意差に応じて解像度を調整する新たな表示法 (Uniform uncertainty mapping) を提案する。この方法は、隣接点での値の有意差を Kullback-Leibler divergence (KL 情報量) で定量化し、その値が図面上で一定となるように表示したものである。本研究ではまず、この表示法の理論的な枠組みについて紹介し、数値的に与えた 1 次元/2 次元問題に適用してその性能について評価する。その後、逆問題の例として微動アレイ探査において 1 次元の速度構造を推定する問題、ハザードマップの例として 2 次元の地盤増幅率の表示に関する問題にそれぞれ適用する。

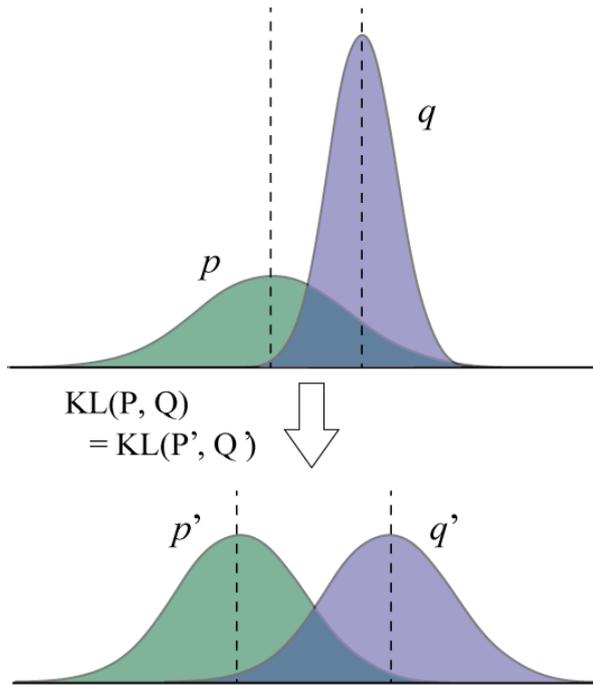


図-1 Uniform Uncertainty Map の考え方

(上 : 与えられた確率密度関数,

下 : 写像された等しい標準偏差を持つ正規分布)

2. Uniform Uncertainty Mapping (UUM)

(1) 基本的な考え方

ある隣接する2地点の予測値がばらつきを持つ確率変数であるとする。ばらつきが非常に小さく、予測値がその平均で代表できる場合であれば、平均の差の値で2地点の予測値の差を特徴付けることができる。しかし、ばらつきの大きさが無視できない場合には、平均のみではなく有意差を議論する必要がある。

ところが、現在のハザードマップはメッシュ毎に震度や地盤増幅率などの平均がそのまま示されており、ばらつきについての情報は図上に反映されていない。このため、空間的にばらつきが変化していることを把握することができず、ばらつきが一樣であるとみなしてしまう恐れがある。

そこで本研究では、ばらつきが一樣とみなされることを積極的に利用することを考える。すなわち、実際の与えられた確率場を空間的に一樣なばらつきを持つ確率場に写像した表示 (Uniform Uncertainty Mapping : UUM) を提案する (図-1)。

(2) KL 情報量による有意差の特徴付け

ある2地点の予測値が確率変数 P, Q によって表され、

それぞれ確率密度関数 p, q に従うとする。Kullback-Leibler divergence (KL 情報量) は、2つの確率密度関数の差を定量化する指標のひとつであり、 P の Q に対する KL 情報量は、次式で与えられる。

$$KL(P, Q) = \int p \log \frac{p}{q} dx \quad (1)$$

ただし、一般に KL 情報量は対称ではないため、 P の Q に対する KL 情報量と Q の P に対する KL 情報量は異なる。そこで、以下では両者の平均を KL と表すことにする。

本研究では、与えられた確率変数 P, Q を標準偏差の等しい正規分布 p', q' にそれぞれ従う確率変数 P', Q' に写像する。 p', q' の標準偏差をいずれも σ' とすると、 P' の Q' に対する KL 情報量は次式で与えられる。

$$KL(P', Q') = \frac{\Delta\mu'^2}{2\sigma'^2} \quad (2)$$

ここで、 $\Delta\mu'$ は p', q' の平均値の差である。

UUM では、両者の KL 情報量が等しくなるように写像し、断りのない場合にはその平均値を表すものとする。このとき、 $\Delta\mu'$ は次のように表される。

$$\Delta\mu' = \sigma' \sqrt{2 KL} \quad (3)$$

すなわち、KL 情報量が大いほど $\Delta\mu'$ は大きく求められるため、UUM 上で明瞭な値の違いとして示される。対して KL 情報量小さい場合には UUM 上の値の差は明瞭でなくなる。これは、両地点の値を平均して滑らかにする操作とみなせるため、空間解像度を落とした表示と解釈することもできる。

(3) UUM の定式化

KL 情報量は UUM での値の差にのみ寄与するため、UUM の空間的なトレンドを KL 情報量のみで決めることはできない。また、UUM の標準偏差 σ' も独立に与えることができるパラメータである。そこで本研究では、UUM のトレンドと標準偏差を、与えられた確率分布の平均値やデータとの残差が小さくなるように選ぶことにする。

UUM で表示される各点の平均値を μ とする。ハザードマップのように確率分布が直接与えられている問題では、与えられた確率場の平均値 $\bar{\mu}$ との残差を標準偏差 σ で重み付けして最小化する。

$$\text{Minimize: } \|(\bar{\mu} - \mu)/\sigma\|^2 \quad (4)$$

一方、イメージングのような逆問題では、与えられた観測 (データ) を \bar{y} とし、 μ の関数として与えられる $y(\mu)$ との残差を最小化する。

$$\text{Minimize: } \|\bar{y} - y(\mu)\|^2 \quad (5)$$

μ は行列 A とベクトル b によって表される以下の評

価関数を最小化する解として与える.

$$\text{Minimize: } \|A\mu = b\|^2 \quad (6)$$

例えば, 0 次のトレンド (直流成分) のみを考慮する場合, A, b はそれぞれ次式で与えられる.

$$A = \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$b = \begin{Bmatrix} \sigma'\sqrt{2KL} \\ \mu_0/n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここで, P は隣接関係を表す行列で, 1次元の場合は

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (7)$$

と与えられる. n は UUM で評価する地点数, μ_0 は 0 次のトレンド成分である.

式(4)あるいは式(5)と式(6)をあわせて解くことで, 最適なトレンドと標準偏差 σ' , そして各点の平均 μ が求まる. 式(6)は線形最小二乗法であるので, トレンドと標準偏差が与えられれば正規方程式により一意に解くことができる. このため実質的には, トレンドと標準偏差をパラメータとした非線形最小化問題を数値的に解くことになる.

3. 数値実験

(1) 1次元問題

等間隔に 101 点を 1 列に並べた 1 次元問題を考える (図-2). 各点 ($i = 0, \dots, 100$) の予測値は正規分布に従うものとし, その平均と標準偏差は空間的に変動しているものとする. 平均は振幅 1 の正弦波で変動し, 標準偏差は左から右に向かって単調に増加するものとする.

$$\mu = \sin(0.16\pi(i - 10)) \quad (8)$$

$$\sigma^2 = 10^{\tanh(0.2i-10)} \quad (9)$$

この問題では, 予測値の平均をそのまま空間分布として表すと, 図-2のように標準偏差の情報が表現できない. 隣接する 2 点間の確率分布を比較すると, 左側では有意な差があると考えられるのに対し, 右側では左側ほど有意な差はない. そこで, この予測値の分布を UUM で表すことにする.

0 次のトレンドと標準偏差を, 式(4)と式(6)を用いて L-BFGS-B 法⁹⁾により求める. なお, 標準偏差は 0.01-100 の範囲で探索した. 図-3 は, 求められた UUM を与えられた予測値の平均・標準偏差と比較して示したものである. UUM のトレンド成分は 0, 標準偏差は 0.320 である. 標準偏差の小さい左側では予測値の平均とほぼ一致した値を示すが, 標準偏差の大きい右側では滑らかで平坦な曲

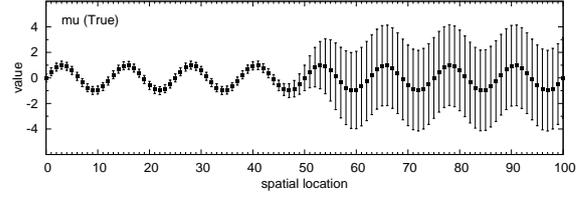


図-2 数値実験 (1次元問題) の問題設定

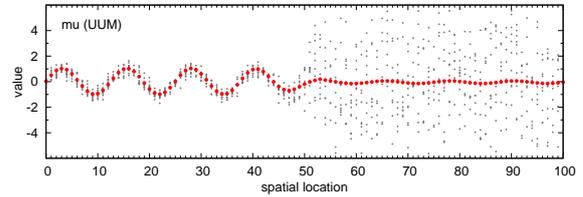
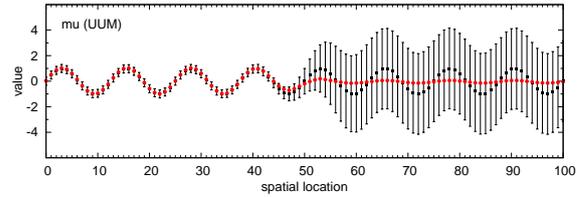


図-3 数値実験 (1次元問題) の UUM

(上: 与えられた平均・標準偏差との比較

下: 10 サンプルデータとの比較)

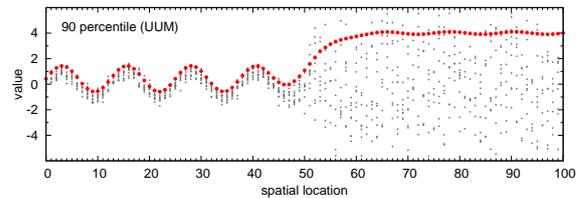
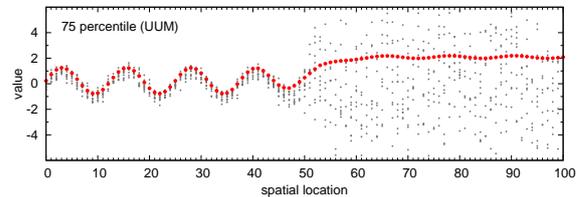


図-4 数値実験 (1次元問題) における 75 パーセンタイル

(上図) と 90 パーセンタイルの UUM (下図)

線を示している. 図-3 下図には, 各点に与えられた正規分布から 10 サンプル生成したデータを UUM による表示と重ねて示している. サンプルデータが大きくばらつく右側で滑らかで平坦な曲線を示していることがわかる.

また, 元の確率分布におけるパーセンタイル値 $\bar{P}_{a\%}$ と平均 $\bar{\mu}$ を用いて, 以下のようにパーセンタイル値 $P_{a\%}$

を UUM で表すこともできる。

$$P_{a\%} = \mu + \bar{P}_{a\%} - \bar{\mu} \quad (10)$$

図-4 は、75 パーセンタイル、90 パーセンタイルを UUM で表したものである。パーセンタイルにおいても、ばらつきの大きな右側では滑らかに表すことができている。例えば、既往の地震記録の応答スペクトルをまとめて 90 パーセンタイルで設計入力地震動を定義しようとする¹⁰⁾とき、UUM を用いることでばらつきの大きな周期帯域では特定の周期で山谷が出ないように表すことができると考えられる。

(2) 2次元問題

格子状に 21×21 点が等間隔に配置された 2次元問題を考える (図-5)。各点 (i, j) の予測値は正規分布に従うものとし、平均は j 方向に単調に増加し、標準偏差は i 方向に単調に増加するものとする。

$$\mu = \tanh(0.2(j - 10)) \quad (11)$$

$$\sigma^2 = 10^{\tanh(0.2(i-10))} \quad (12)$$

この問題の平均値だけを表すと (図-5)、標準偏差の大きな箇所と小さな箇所とで表示が等しくなるため、有意な違いを適切に表すことができない。

1次元問題と同様に、0 次のトレンドと標準偏差を式(4)と式(6)を用いて L-BFGS-B 法により求める。なお、標準偏差は 0.01-100 の範囲で探索した。UUM のトレンド成分は 0、標準偏差は 0.510 と求められた。

図-6 は、求められた UUM を表したものである。図面の左側は標準偏差が小さいため上下方向の平均の変化が明瞭に示されているが、右側では滑らかに変化が示されている。平滑化の強さによって図面の解像度を調整することはしばしば行われるが、UUM では与えられた標準偏差に応じて図面の解像度が表されているため、空間的に可変な解像度を実現することができていると言える。

図-6 中の A と B における確率密度関数を比較したものが図-7 である。式(11)-(12)によって与えた確率密度関数を黒線で、UUM によって評価された確率密度関数を赤線で示している。与えた確率密度関数の平均は A と B で等しいが、B は標準偏差が大きいため確率密度関数にほぼ違いが見られない。UUM では標準偏差が等しく平均値の違いとして表されるため、A に比べて B の平均の差は小さく求められた。

A の KL 情報量は、与えた確率密度関数に対して 0.179 であるのに対し、UUM では 0.103 と求まる。B では、与えた確率密度関数に対して 0.0021 と非常に小さく、UUM でも 0.0088 と評価されている。2次元の UUM では、隣接する全ての組み合わせ数 (840) に対して評価点数 (441) が少ないため、全ての KL 情報量を保存するこ

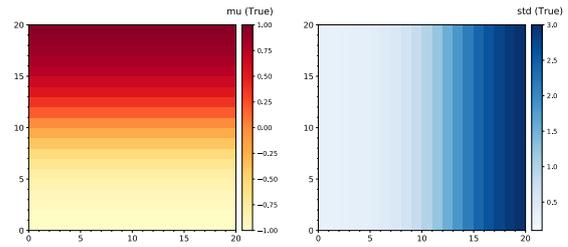


図-5 数値実験 (2次元問題) の問題設定

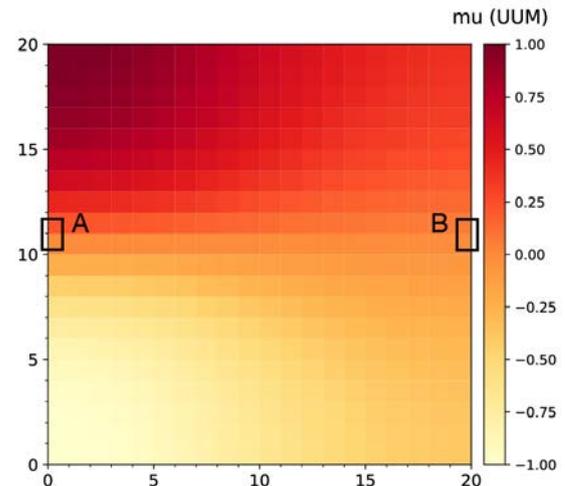


図-6 数値実験 (2次元問題) の UUM

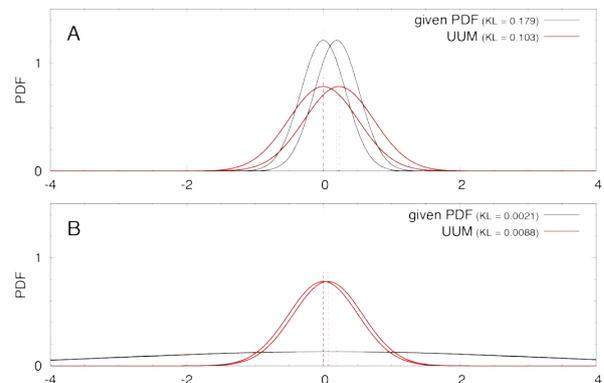


図-7 与えられた確率密度関数関数と UUM による確率密度関数の比較

とができない。式(6)に示したようにあくまで最小二乗解として得られるため、多次元の UUM では与えられた確率密度関数に対する KL 情報量を厳密に保存できないことに注意が必要である。

表-1 1次元構造の初期モデル

Vs(m/s)	Vp(m/s)	density(kg/m ³)	depth(m)
180	1700	2000	20
350	1700	2000	40
200	1700	2000	60
400	1700	2100	100
700	2000	2250	300
1300	2650	2400	-

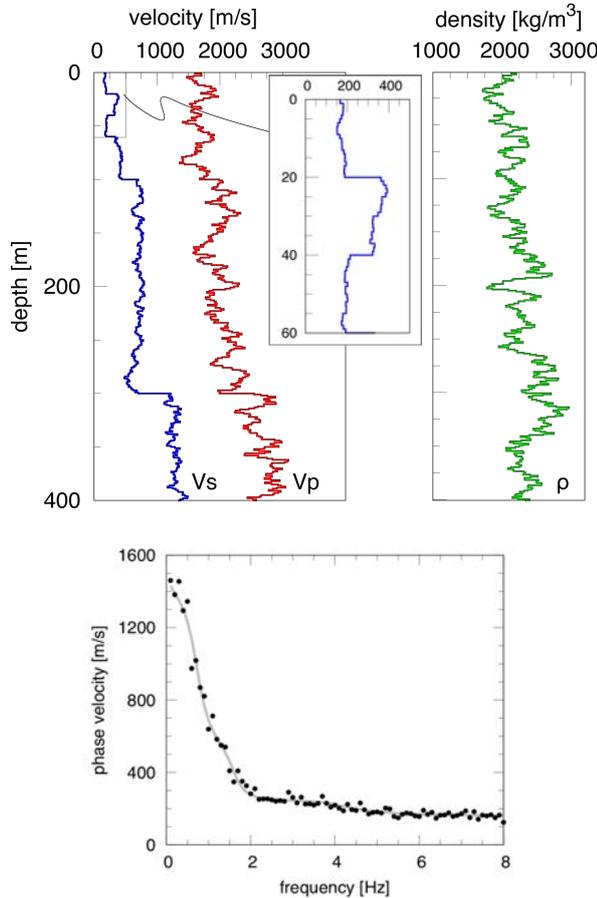


図-8 1次元速度構造の推定実験におけるモデル地盤と Rayleigh 波位相速度

4. 応用例

(1) 微動アレイ探査による1次元速度構造の推定

微動アレイ探査は、時刻同期させた複数の地震計によって常時微動を同時に測定することによって表面波の位相速度分散曲線を求め、さらに地下のS波速度構造を推定するものである。表面波は地表に近いほど振幅が大きく構造の影響を受けやすいため、位相速度から推定される速度構造は浅部ほど解像度が高いと考えられる。そこで、UUMを用いて微動アレイ探査による推定S波速度構造を表示することを試みる。

実際の微動アレイ記録を用いると真のS波速度構造が

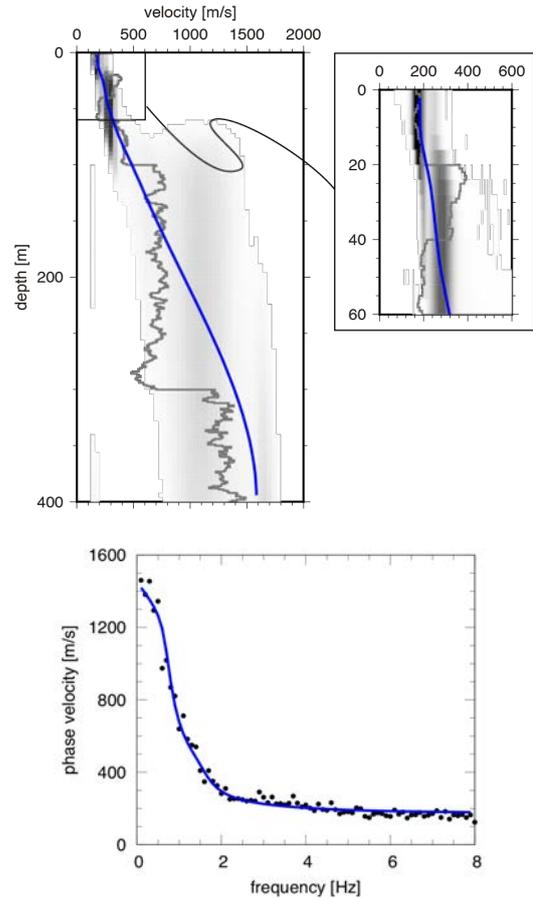


図-9 推定された1次元S波速度構造のUUMと位相速度

不明であるため UUM の性能を見ることができない。そこで本研究では人工的に作成したモデル地盤から Rayleigh 波の位相速度を求め、これにノイズを付加したものを疑似観測データとし、1次元S波速度構造を推定する。図-8は、与えた1次元モデル地盤とこの地盤から求められた Rayleigh 波位相速度（基本モード）を示している。300m以深が半無限の基盤と仮定できるような初期モデル（表-1）を設定し、これに相関距離10m、標準偏差0.1のvon-Karman型のランダム性を付加した。さらに求められた位相速度に10%のノイズを付加したものをデータとして用いる。

ここでは、S波速度の1次のトレンドと標準偏差を式(5)と式(6)を用いて差分進化アルゴリズム¹¹⁾により求める。ただし、式(6)にはKL情報量が必要なため、既往の研究¹²⁾と同様に、位相速度を説明する2,000,000モデルをMCMC法により生成させ、これを深さ4m毎に離散化して深さ毎のデータを生成し、これらから隣接深さのKL情報量を計算した。なお、P波速度と密度はRayleigh波位相速度に対する感度が低いため、初期モデルで固定している。

図-9は、得られたS波速度のUUMを表したものである。標準偏差は0.01-500の範囲で探索したところ、18.27と求められた。比較のため与えたモデルを灰色線で、MCMC法により推定したモデルの分布を背景に示している。UUMは60m以浅では分布のピーク付近を通る曲線を示しているが、100m以深では分布の中心付近を通る滑らかな曲線を示している。初期モデルに与えた逆転層（深さ40-60m）や300mに設定した層境界は明瞭ではない。しかし、図-9下に示すようにUUMの結果を用いて求められた位相速度がデータをよく説明できていることから、逆転層や300mの層境界に対する分解能が十分でないことを意味している。このように、UUMではデータに関して十分な解像度がない領域を滑らかに示すとともに、分解能に対する知見も与えることができる。

(2) 地盤増幅率

地盤増幅率は、表層地盤による地震動の増幅特性を簡便に表したもので、最大加速度等の指標が工学的基盤に対してどれだけ増幅するかを比率として評価したものである。我が国では、地震ハザードステーション（J-SHIS）において最大速度の増幅率が公開されており、全国地震動予測地図等に利用されている。ここでは、京阪神地域を対象としてJ-SHISで公開されている増幅率を例にUUMによる表示を試みる。

図-10は、本解析の対象地域において評価されている最大速度の増幅率を示したものである。この増幅率は微地形区分から深さ30mまでの平均S波速度を推定¹³⁾し、さらに平均S波速度から増幅率を推定¹⁴⁾したものである。いずれも回帰式により評価されたものであるため、図-10は予測の平均値が表示されていると考えることができる。それぞれのばらつきは標準偏差として与えられているため、ここでは微地形区分から平均S波速度を求める際の標準偏差と平均S波速度から増幅率を求める際の標準偏差を用いて誤差伝播の法則により各地の標準偏差を求めた。図-11は、対象地域における標準偏差の分布を示したものである。概ね0.2-0.4の範囲にあるが微地形区分により異なるため、例えば丘陵地では標準偏差が大きく評価されている。

全50070地点について、0次のトレンドと標準偏差を式(4)と式(6)を用いて求めたところ、0次のトレンドは1.044、標準偏差は0.200と求められた。図-12はUUMで表した対象地域の地盤増幅率であるが、図-10と比較して全体的な傾向に違いは見られない結果となった。これは、数値実験で与えた条件と比較して、標準偏差の空間変動が小さかったためと考えられる。

ただし、この事実をもって現在の平均値による地盤増

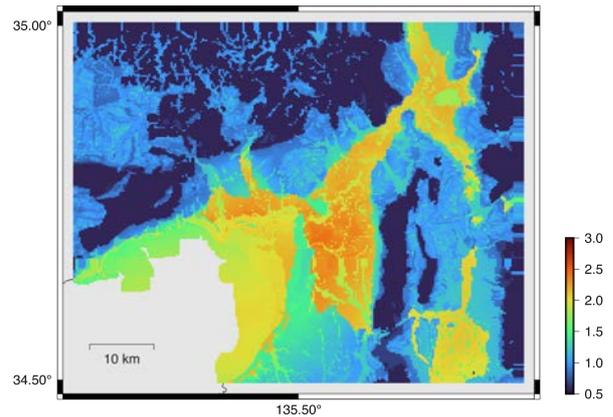


図-10 J-SHISで公開されている京阪神地域の地盤増幅率

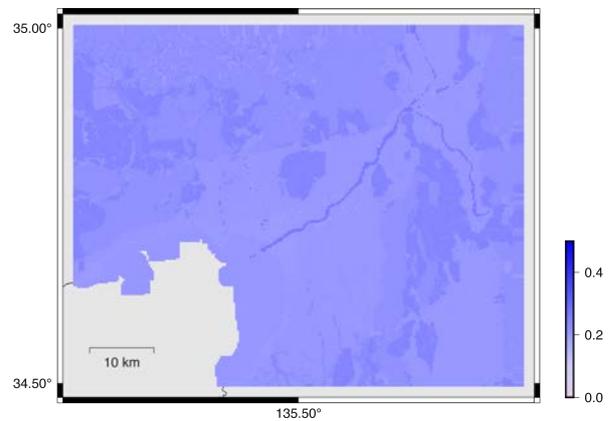


図-11 地盤増幅率の標準偏差の分布

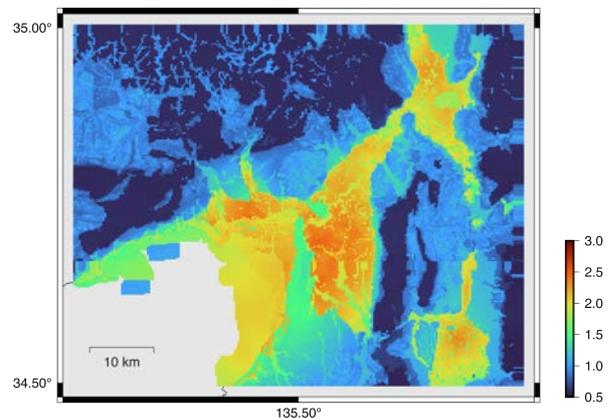


図-12 UUMでの表示による京阪神地域の地盤増幅率

幅率の表示が適切と言えるかは、慎重な議論が必要であると考えられる。実記録を用いて評価したばらつきはより大きく、場所によっても大きく異なることが知られている¹⁵⁾。また、地盤構造が急変する箇所では地震波の到来方向による影響が考えられるため、ばらつきが大きくなる傾向が予想される。現在、地点毎の地盤増幅率のばらつ

きを評価する研究が進められており¹⁶⁾、このような研究の成果を受けて UUM で表示される内容が大きく変わる可能性も考えられる。

5. 結論

本研究は、確率分布が与えられた場合に、隣接点の有意差に応じて解像度を調整する新たな表示法 (Uniform uncertainty mapping : UUM) を提案した。これは、隣接点での値の有意差を KL 情報量で定量化し、その値が図面上で一定となるように表示したものである。UUM で表示する際のトレンドと標準偏差をパラメータとする非線形最小化問題として定義することができ、これを解くことで UUM を求めることができる。

数値的に与えた 1 次元/2 次元問題に適用したところ、標準偏差の小さな領域に対して大きな領域では滑らかな表示が得られた。すなわち、UUM では与えられた標準偏差に応じて図面の解像度が表されているため、空間的に可変な解像度を実現することができていると言える。

逆問題の例として微動アレイ探査において 1 次元の速度構造を推定する問題、ハザードマップの例として 2 次元の地盤増幅率の表示に関する問題にそれぞれ適用した。地盤増幅率の問題では数万点からなるデータに対しても安定して計算できることを示すことができたが、現在のデータに含まれるばらつきの情報のみでは、UUM と通常の平均値による表示とで大きな違いは見られなかった。このため、実データに基づき地盤構造の変化に応じた各地の地盤増幅率のばらつきを評価することが今後重要であると言える。

謝辞：本研究では地震ハザードステーション (防災科学技術研究所) のデータを使用させていただきました。

参考文献

- 1) 地震調査研究推進本部地震調査委員会：全国地震動予測地図 2020 年版地図編，2021。
- 2) 内閣府：平成 17 年版防災白書，2005。
- 3) 防災科学技術研究所：地震ハザードステーション，<https://www.j-shis.bosai.go.jp> (令和 3 年 7 月 20 日閲覧)。

- 4) 国土交通省：重ねるハザードマップ，<https://disaportal.gsi.go.jp/index.html> (令和 3 年 7 月 20 日閲覧)。
- 5) Green, P.J.: Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, *Bio-metrika*, Vol.82, No.4, pp.711-732, 1995.
- 6) Page, M.T., Custodio, S., Archuleta, R.J., and Carlson, J.M.: Constraining earthquake source inversions with GPS data: 1. Resolution-based removal of artifacts, *J. Geophys. Res.*, Vol.114, No.B1, B01314, 2009.
- 7) Chakraborty, A. and Goto, H.: A Bayesian model reflecting uncertainties on map resolutions with application to the study of site response variation, *Geophysical Journal International*, Vol.214, No.3, pp.2264-2276, 2018.
- 8) Chakraborty, A. and Goto, H.: Visualizing data saturation process in mapping site amplification of earthquake ground motions, *Journal of Natural Disaster Science*, Vol.40, No.2, pp.14-25, 2020.
- 9) Byrd, R.H., Lu, P., Nocedal, J., and Zhu, C.: A limited memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.16, No.5, pp.1190-1208, 1995.
- 10) 坂井公俊, 室野剛隆, 佐藤勉：近年の地震記録に基づいた L2 地震動の考え方とその設定方法，鉄道総研報告，Vol.25, No.9, pp.5-12, 2011。
- 11) Storn, R. and Price, K.: Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *J. Global Optimization*, Vol.11, pp.341-359, 1997.
- 12) Goto, H.: Bayesian posterior mean in velocity modeling as alternative to resolution guaranteed imaging, *Proc. 6th IASPER/IAEE International Symposium: Effect of Surface Geology on Seismic Motion*, 2021.
- 13) 松岡昌志, 若松加寿江, 藤本一雄, 翠川三郎：日本全国地形・地盤分類メッシュマップを利用した地盤の平均 S 波速度分布の推定，土木学会論文集，No.794/I-72, pp.239-251, 2005。
- 14) 藤本一雄, 翠川三郎：近接観測点ペアの強震記録に基づく地盤増幅度と地盤の平均 S 波速度の関係，日本地震工学会論文集，Vol.6, No.1, pp.11-22, 2006。
- 15) 後藤浩之, 羽田浩二, 澤田純男, 吉田望, 大内徹：常時微動観測と臨時余震観測による福島県浪江町市街地の地盤震動特性評価，日本地震工学会論文集，Vol.16, No.1, pp.309-321, 2016。
- 16) Stewart, J.P. and Afshari, K.: Epistemic uncertainty in site response as derived from one-dimensional ground response analyses, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, Vol.147, No.1, 04020146, 2021.

VISUALIZING SPATIAL PROBABILITY FIELDS REFLECTING SIGNIFICANT DIFFERENCES IN NEIGHBORING VALUES

Hiroyuki GOTO and Anirban CHAKRABORTY

In this decade, hazard maps have been developed and utilized for disaster prevention planning in communities. The values shown in the hazard maps are inherently uncertain. It is very important to reflect the probability information in the spatial resolution as well as the average value. In this study, given a probability distribution, we propose a new visualization method (Uniform uncertainty mapping) that adjusts the resolution according to the significant difference at neighboring points. We first introduce the theoretical framework of this method and discuss its performance by applying it to numerical problems. It is then applied to the problem of estimating 1D velocity structure in microtremor array exploration as an example of the inverse problem, and to the problem of displaying 2D ground amplification as an example of the seismic hazard map, respectively.