地震動位相差分の相関性に着目した位相の模擬

佐藤　忠信[1]・室野　剛隆[2]

[1]正会員　京都大学名誉教授（〒606-8501 京都市吉田本町）
E-mail:satotdnbseu@yahoo.co.jp

[2]正会員　鉄道総合技術研究所・部長（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail:muronoyodhiysks51@rti.or.jp

地震動位相を線形位相遅れとそこからの変動部に分解し，位相変動部の位相差分をその標準偏差で正規化した変数の自己相関特性が，位相差分を求める離散角振動数間隔が小さいときには，ほぼ同一の関数で表現されることを明かにした．さらに，位相差分の共分散行列の表現法を考察し，位相差分の確率密度関数が正規分布と仮定できる場合には，非整数ブラウン運動を修正することにより，位相差分を模擬できる可能性について言及した．さらに，正規化位相差分の確率特性が非ガウス性を示すことを明かにし，それがレヴィフライト確率密度関数としてモデル化できることを明かにした．レヴィフライト確率密度関数に従う確率変数の分散値は存在できないが，分散値が定義できる条件と自己相関係数の表現法を明確にし，位相差分の模擬アルゴリズムを構築する．

Key Words : *earthquke motion phase, covariace matrix, modified fractional Browinan motion, non-Gaussian, Levy-flight distribution, exsistence of variance*

1.　まえがき

地震動の位相特性に関しては，大崎による位相差分を用いた先駆的な研究[1)]に端を発し，群遅延時間の近似値である位相平均勾配を利用した研究[2)-4)]などを列挙できる．この結果，位相差分や位相平均勾配が角振動数ωを媒介変数とする確率過程としてモデル化できることが明らかにされてきている．観測記録として提供されている加速度時刻歴は時間の可積分関数と考えて良いので，そのフーリエ変換の実数部と虚数部を$R(\omega)$と$I(\omega)$とすれば，それらは角振動数の連続関数となる．いま，逆接位相を$\tilde{\phi}(\omega)$とすれば，$\tilde{\phi}(\omega)=\tan^{-1}(I(\omega)/R(\omega))$と定義され，$R(\omega_i)\equiv 0$と$I(\omega_i)\equiv 0$を同時に満たす角振動数点$\omega_i$で位相に不連続が発生するが，$[-\pi/2,\pi/2]$の範囲で，$\tilde{\phi}(\omega)$を$\omega$の区分連続関数と考えて良い．一方，地震動加速度時刻歴のフーリエ変換を$F(\omega)$とすれば，地震動位相の主値は偏角計算で$\bar{\phi}(\omega)=Arg\big(F(\omega)\big)$と求めることができる．この場合，$\bar{\phi}(\omega)$の値は$[-\pi,\pi]$の範囲にあるので，$[-\pi,\pi]$の範囲で，$\bar{\phi}(\omega)$は$\omega$の区分連続関数と考えることができる．ただ，地震動位相$\phi(\omega)$をωの全領域で区分連続関数とするためには，$\bar{\phi}(\omega)$の値をアンラップする操作が必要である．これは，$F(\omega)$が通過してきたリーマン面の枚数n_*を正確に数えることと同等であり，n_*値が与えられれば，$\phi(\omega)=\bar{\phi}(\omega)+2\pi n_*$として，地震動位相が$\omega$の全領域で区分連続関数として定義できることになる．

地震動位相をアンラップ操作をすることなしに，ωの全領域で区分連続関数として，求める努力[5),6)]は行われている．また，アンラップ操作後に求まる位相や位相差分を対象として，位相差分や位相平均勾配の確率特性を抽出するための研究[7),8)]もおこなわれている．しかし，位相差分や位相平均勾配の角振動数に関する相関性に関する研究は，詳細に検討されているとは言い難い．位相を模擬するためには，位相差分の共分散行列が合理的に設定されなければならない．今，位相差分の確率特性が正規分布で定義されるものとし，その共分散行列が，正値行列として与えられれば，コレスキー分解を行うことにより，標準正規乱数列を用いて，位相差分の模擬が可能になる[9)]．この方法を用いて，位相差分を模擬するためには，位相差分の確率密度関数が正規分布で規定されていても，その共分散行列の次元が重要な要因になる．も

しこの次元が非常に大きいものであれば，共分散行列のコレスキ分解が困難になるからである．共分散行列の次元が大きな場合は，長期記憶[10]過程とよばれ，長期記憶を有する正規確率過程の模擬法はMandelbrot＆Vanにより確立され[11]，非整数ブラウン運動[12]と名付けれれた．

本研究では，地震動位相差分の角振動数に対する相関特性を考究することにより，それらが長期記憶特性を有するものであることを明かにする．さらに，位相差分過程の確率特性が角振動数に対して相関性を有しながら，非正規確率特性に従う確率過程であることを明確にし，その模擬法を考究する．

2. 地震動位相の計算法

本章では，既往成果[8]の一部を用い，アンラップ操作を必要としない，地震動位相計算法を紹介する．地震動加速度時刻歴$x(t)$のフーリエ位相を$\phi(\omega)$とすれば，その差分$d\phi(\omega)$は，$x(t)$のフーリエ変換の実数部$R(\omega)$と虚数部$I(\omega)$が与えられれば，次式で定義される．

$$d\phi(\omega) = \frac{RdI - IdR}{R^2 + I^2} \tag{1}$$

ここに，ωは角振動数であり，dRとdIは実数部と虚数部の角振動数ωにおける差分である．式(1)に基づいて位相差分を計算すると，実数部と虚数部の角振動数に関する差分が分子に現れるので，その計算精度が問題になる．ここでは中央差分を用いて，各離散角振動数点でdRとdIを計算するが，その精度は角振動数領域における離散点の総数(離散角振動数間隔)に大きく依存している．離散角振動数間隔は，記録の後半にゼロを足し込むことにより制御できる．位相差分を足し合わせて得られる位相の精度は，計算した位相を用い，フーリエ振幅は既知として，加速度時刻歴を再現し，観測された加速度時刻歴にゼロを足し込んだ全ての離散時刻点で，観測と再現加速度値の残差2乗和を求め，その平方根が1gal以下になる離散角振動数間隔を設定することで，保証する．

解析に用いたのは，1993年北海道南西沖地震の際に寿都町新栄で観測したEW成分の加速度記録[13](離散時間間隔0.02秒)であり，離散点総数として2^{25}個以上あれば，上記の精度が保障されることを確認している．ここでの解析では，離散点総数が$M = 2^{28}$個の場合の離散角振動数間隔$d_0\omega = 100\pi/2^{28}$を用いる．この場合，式(1)は次式のように近似される．

$$d_0\phi_l = d_0\phi(\omega_l) = \frac{d_oI_lR_l - d_0R_lI_l}{R_l^2 + I_l^2} \tag{2}$$

ここに， $R_l = R(\omega_l), I_l = I(\omega_l)$であり，$d_oI_l$と$d_oR_l$は次式で定義される．

$$d_oI_l = \frac{1}{2}(I_{l+1} - I_{l-1}), d_oR_l = \frac{1}{2}(R_{l+1} - R_{l-1}) \tag{3}$$

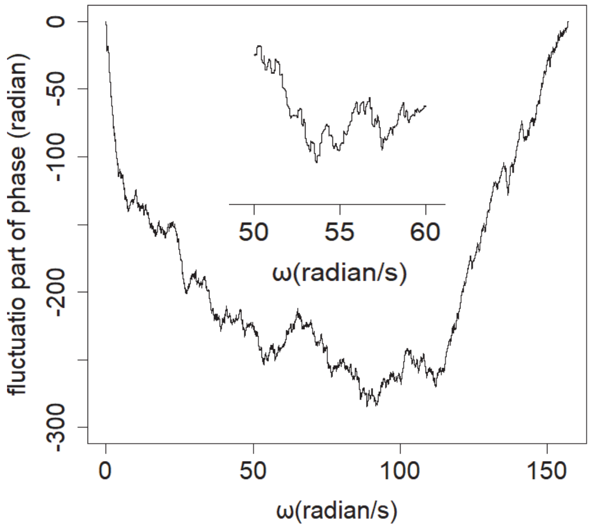

図-1 寿都記録の位相変動部とその拡大図．位相変動部のランダム特性は相似性を有していることが目視できる．

位相$\phi(\omega)$の離散角振動数間隔$d_0\omega$間隔での離散位相数列$\{\phi_l\}$はこの位相差分$d_0\phi_l$を累積加算して求める．さらに，位相を線形遅れ部とそこからの変動部に分け，以下のように表す．

$$\phi(\omega) = -\omega t_0 + \psi(\omega) \tag{4}$$

ここに，$-\omega t_0$は線形位相遅れ部，$\psi(\omega)$はそこからの変動部である．本論文の解析では，特に断らない限り，この位相変動部を位相と呼ぶことにする．

式(4)に基づいて，$\{\phi_l\}$から求まる$\{\psi_l\}$を位相変動部の角振動数領域における離散確率過程と見なすことにする．なお，$d_0\omega$間隔での後退差分列$\{d\psi_l\}$を次式で求め，それを“微小位相差分過程”と名付ける．

$$d_0\psi_l = \psi(\omega_l) - \psi(\omega_{l-1}) = \psi_l - \psi_{l-1} \tag{5}$$

ここに，ω_{l-1}は次式で定義される．

$$\omega_{l-1} = \omega_l - d_0\omega \tag{6}$$

図-1に寿都記録に対して求めた，離散位相変動部列$\{\psi_l\}$を図示した．図中の拡大図に示したように，位相のランダム性は離散角振動数間隔を拡大しても確率的相似性を保っているように見える．この現象を次章で明確にする．

そのために，大きな角振動数間隔$\Delta\omega$での位相差分$\Delta\psi_l$を次式で定義する．

$$\Delta\psi_l = \psi(\omega_l) - \psi(\omega_l - \Delta\omega) \tag{7}$$

ここに，$\Delta\omega$は次式で与えられる．

$$\Delta\omega = k \cdot d_0\omega \quad (k = 2^n, n = 0,1,2,\cdots) \tag{8}$$

式(7)では，$\Delta\psi_l$の計算に，$\psi(\omega)$の重複使用を許しており，離散点総数は$M = 2^{28} - k$である．$\Delta\psi_l$の計算に，$\psi(\omega)$の重複使用を許さない場合には，次式の定義を用いなければならない．

$$\Delta\psi_l = \psi(\omega_{k\cdot l}) - \psi(\omega_{k\cdot(l-1)+1}) \tag{9}$$

この場合の離散点総数は$M = 2^{28}/k$となる．

なお，式(4)のt_0を決定するために，エルゴード仮説が成立するものとして，次式の関係を用いた．

$$E(d_0\phi_l) = -d_0\omega t_0 \tag{10}$$

したがって，$E[d_0\psi_l] \equiv 0$となっている．一方，式(4)は式(7)の関係を用いて，次式のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\Delta\phi_l &= k\cdot d_0\omega t_0 + \sum_{i=1}^{k-1} d_0\psi_{l-1+i-1} \\ &= \Delta\omega t_0 + \Delta\psi_l\end{aligned} \tag{11}$$

これから，$E(\Delta\phi_l) = -\Delta\omega t_0$であり，$E[\Delta\psi_l] = \mu_l \equiv 0$であることが分かる．

式(7)で定義された位相差分を用いて，数値的に求まる分散値は次式で与えられる．アンサンブル計算に基づく分散値は各離散角振動数点ごとに異なるはずであるが，エルゴード仮説が成立するものとして，離散角振動数によらない定数値とする．ただし，その値は$\Delta\omega$の値によって変化するものとし，$\sigma^2_{\Delta\psi 0}(\Delta\omega)$と表す．

$$\sigma^2_{\Delta\psi 0}(\Delta\omega) = \frac{1}{M-k}\sum_{l=1}^{M-k}\Delta\psi_l^2 \tag{12}$$

さらに，地震動位相を扱うときに，注意しておかなければならないのは，位相が角振動数に関して原点逆対称関数になっており，次式が成立することである．

$$\phi(-\omega_-) = -\phi(\omega_+) \tag{13}$$

ここに，ω_- はω の負側の値であり，ω_+は正側の値である．位相に対するこの性質は，地震動位変動部$\psi(\omega)$に対しても成立する．これは，地震動位相のみならず，位相差分の角振動数領域での定義域が$[0,\infty]$であることを意味している．したがって，離散化位相や離散化位相差分の特性を取り扱うには，ナイキスト振動数範囲のデータを取り扱えばよいことになる．

3. 位相の角振動数に対する相関性

(1) 位相差分の相関性

まず，式(7)で定義される位相差分の角振動数に対する相関性を明確にする．$\{\Delta\psi_l\}$は$\Delta\omega$の値により，大きく変化するので，次式で定義される変数を考える．

$$X_l = \frac{\Delta\psi_l - \mu_l}{\Delta\sigma_{\Delta\psi 0}} \tag{14}$$

μ_lは$\Delta\psi_l$の平均であるり，ゼロであることは前述した．

寿都記録を対象とし，$\{X_l\}$を計算した後，その自己相関関数を計算して描画したのが**図-2**である．$\{X_l\}$は標準偏差で正規化されているので，自己相関関数は自己相関係数と全く同じものになる．横軸が離散角振動数値$\omega_l = l\cdot\Delta\omega$ではなく，離散点番号になっていることに注意してほしい．図から明かなように，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$の大きさを制御している$n$値が大きくなると，相関特性は次第に少なくなるが$n=3$程度までは，$\Delta\omega$の値によらず，ほぼ同一の相関特性を有していることが分かる．これから，位相差分の自己相関特性は$\Delta\omega$が小さいときには，$\Delta\omega$の大きさによらず自己相関係数がほぼ同一であり，かつ，離散角振動数の離散点番号が15万を超えても，相関係数値として0.01を超える値を有しており，地震動位相が長期記憶[10]を有し，かつフラクタル[14]な確率過程であるることが分かる．これが，位相差分の特異な確率特性であり，**図-1**で位相過程に確率的相似性が見られた理由である．今，$\{X_l\}$の自己相関係数を角振動数間隔の関数として$\rho(\omega_t - \omega_{t-l})$とし，$\omega_t - \omega_{t-l} = l\cdot\Delta\omega$とおけば，自己相関係数値$\rho_l$は次式のように定義できる．

$$\rho_l = \rho(l\cdot\Delta\omega) \tag{15}$$

$l=0$のときには，$\rho_0 = 1$であることは明白なので，以下では，ρ_0の代わりに，1と表記することにする．

図-2はρ_iとiの関係をn値をパラメータとして表示したものと見ることもできる．**図-2**に示した自己相関係数を次式で近似する．

$$\rho_l = \exp\left(-b_r\left(\frac{l}{k_\rho}\right)^b\right) \tag{16}$$

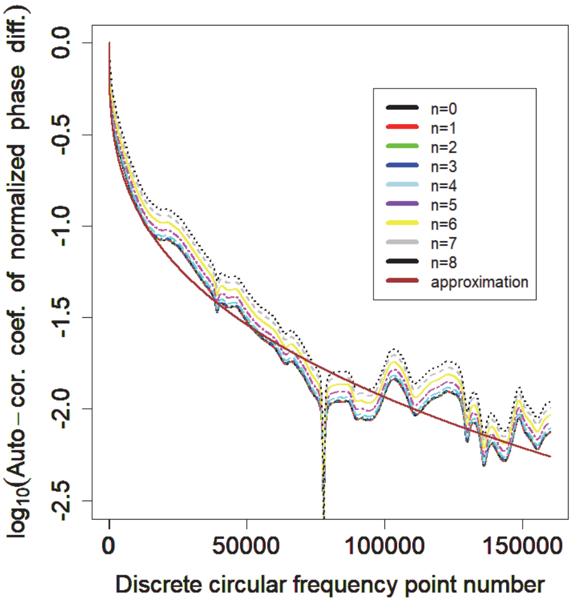

図-2 正規化位相差分$\Delta\psi_l/\Delta\sigma_{\Delta\psi}$の自己相関関数．縦軸は相関係数と表示されている．標準偏差で正規化しているので，相関関数は相関係数と全く同じものになる．横軸は離散角振動数間隔$\Delta\omega = 2^n d_0\omega = 2^n\cdot 50\pi/2^{28}$で計算した角振動数値の$\omega_l = l\cdot\Delta\omega$値ではなく，離散角振動数番号$l$となっている．$\Delta\omega$の値は，$n$値できまるが，その差異は凡例に与えられている．

ここに，lは角振動数ステップで測った絶対相関距離，bは相関係数の減衰特性を規定する定数，b_rは相関性の強度を表す定数，k_ρは角振動ステップを正規化する整数である．図-2に描画した褐色太曲線は，式(16)で$b_r = 4$，$b = 0.1$，$k_\rho = 20000 \times 2^3$とした場合である．

4．正規化位相差分が標準正規分布となる場合

(1) コレスキー分解法による位相差分の模擬

X_lの自己相関関数が図-2で表現され，その近似式が式(16)で与えられ，離散角振動間隔$\Delta\omega$がほぼ一定値に保

$$\Sigma = \sigma_{\Delta\psi 0}^2 \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_L & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_L & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_L & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_L & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_L \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_L & \cdots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ L+1 \\ L+2 \\ \vdots \\ L+2+2^{n_0} \\ L+3+2^{n_0} \\ \vdots \\ 2L+2+2^{n_0} \\ 2L+3+2^{n_0} \end{matrix} \end{array} \tag{17}$$

$$p(X_l) = \frac{1}{2\pi} \exp(X_l^2) \tag{18}$$

$$\{x_m\} = \{x_1, \cdots, x_L, x_{L+1}, x_{L+2} \cdots, x_{L+2+2^{n_0}}, x_{L+3+2^{n_0}} \cdots x_{2L+3+2^{n_0}}\} \tag{19}$$

たれているときには，その共分散行列Σは，式(17)で与えられる．Σの対角要素は1である．この行列の次元は，$(2L+3+2^{n_0}) \times (2L+3+2^{n_0})$である．$L$は片側相関係数数の次元であり，$2^{n_0}$は位相差分の定常部分の次元である．

まず，式(14)で表現される正規化位相差分の確率特性について考究する．一番単純な確率特性は，X_lが式(18)で定義される標準正規分布に従うものである．式(18)から独立同分布で生成した，乱数列を$\{x_l\}$とすれば，それは式(19)で表現される．

共分散行列がΣと表現されるときには，式(14)は次式のように置き換えられなければならない．

$$p(\{X_l\}) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp(\{\Delta\psi_l\}^T \Sigma^{-1} \{\Delta\psi_l\}) \tag{20}$$

式(20)では$\{\mu_l\} = E[\{\Delta\psi_l\}] \equiv \{0\}$であることを考慮している．共分散行列$\Sigma$はコレスキー分解により，下三角行列$C$と上三角行列$C^T$に分解でき，$\Sigma = CC^T$と表現できるので，正規分布に従う確率ベクトル$\{\Delta\psi_l\}$は，次式で模擬[9]できる．

$$\{\Delta\psi_l\} = C\{x_l\} \tag{21}$$

この方法では，共分散行列の次元が大きくなると，コレスキー分解が不安定になり，式(21)では，位相差分の模擬はできなくなる．そのため，コレスキー分解に基づかない方法論が必要になるので，$\{\Delta\psi_l\}$が$\{x_l\}$結合として，次式のように表現される場合を考える．

$$\{\Delta\psi_l\} = c_0 A\{x_l\} \tag{22}$$

c_0は左辺と右辺の次元を合わせるための係数である．なお，式(22)の表現が成立する場合には，ベクトル$\{\Delta\psi_l\}$の共分散行列Σは次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \Sigma = E[A\{x_l\}(A\{x_l\})^T] &= AE[\{x_l\}\{x_l\}^T]A^T \\ &= c_0^2 AA^T \end{aligned} \tag{23}$$

したがって，式(23)の関係を満たすように，行列Aを決める方法論が有ればよい．(3)節ではその方法を考究する．そのために，まず非整数ブラウン運動の概念を概説し，その後，位相差分の模擬に用いることができるように，非整数ブラウン運動を修正する．

(2) 非整数ブラウン運動の概説[11]

$y(t)$が媒介変数tの連続関数で，増分過程$\Delta y(t) = y(t) - y(s)$が，共分散$\gamma_{ts} = \sigma^2|t-s|^{2H}$を有する次式の確率密度関数に従うときを考える．

$$p(\Delta y(t)) = \frac{1}{2\pi\sigma|t-s|^H} \exp\left(\frac{(\Delta y)^2}{\sigma^2|t-s|^{2H}}\right) \tag{24}$$

$\Delta y(t)$は非整数ブラウンノイズと呼ばれている。また，$y(t)$は非整数ブラウン運動と名付けられて，その定式化はMandelbort & Van[11]によって行われ，$y(t)$が次式のように定義されれた．

$$y(t) - y(0) = c\int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\, d\zeta(\tau) \tag{25}$$

ここに，$y(0)$は初期値で，$t = 0$での$y(t)$で，cは両辺の等号を成立させるための定数である．$K(t,\tau)$は積分核で次式で定義される．

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (t-\tau)^\beta - (-\tau)^\beta & (\tau < 0) \\ (t-\tau)^\beta & (0 \le \tau < t) \end{cases} \tag{26}$$

βは次式の定数である．

$$\beta = H - 1/2 \tag{27}$$

なお，$d\zeta(\tau)$はブラウンノイズ過程[15]であり，次式で近似される．

$$d\zeta(\tau) \cong \sigma_B\sqrt{\Delta\tau}\, x(\tau) \tag{28}$$

ここに，σ_Bはブラウンノイズ過程の振幅を制御する定数で，$\Delta\tau$は媒介変数の増分である．また，$x(\tau)$は，τにおいて，標準正規分布から独立同分布で生成されれる標準正規乱数値である．$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$とすれば，$\Delta y$の表現として，次式を得る．

$$\Delta\mathrm{y} = c\int_{-\infty}^{t+\Delta t} K(t+\Delta t,\tau)\,d\zeta(\tau) - c\int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\,d\zeta(\tau) \tag{29}$$

式(29)をリーマン積分の形式に書き変えるため，変数tが同じ離散間隔Δtで離散化されているものとし，$t_j = j\cdot\Delta t$，$\tau_l = l\cdot\Delta t$と置き，$y_j = y(t_j)$と，$\Delta\mathrm{y}_j = y(t_j) - y(t_j-\Delta t) = y_j - y_{j-1}$として，$t = t_j$において，式(29)を離散的表現に書き変えれば，式(27)と(28)を考慮して，$\Delta\mathrm{y}_j$として次式のような離散表現を得る．

$$\Delta\mathrm{y}_j = c\sigma_B(\Delta t)^H\cdot \left\{\sum_{l=-\infty}^{j+1}(j+1-l)^\beta - \sum_{l=-\infty}^{j}(j-l)^\beta\right\}x_l \tag{30}$$

式(30)の右辺の和を$j-1$までの和とそれ以上の項に分解すると次式となる．

$$\Delta\mathrm{y}_j = c\sigma_B(\Delta t)^H\cdot x_j + c\sigma_B(\Delta t)^H\sum_{l=-\infty}^{j-1}\left\{(j+1-l)^\beta-(j-l)^\beta\right\}x_l \tag{31}$$

ここで，$B_{jl} = \left\{(j+1-l)^\beta-(j-l)^\beta\right\}$と置けば，次式を得る．

$$\Delta\mathrm{y}_j = c\sigma_B(\Delta t)^H x_j + c\sigma_B(\Delta t)^H\sum_{l=-\infty}^{j-1}B_{jl}\,x_l \tag{32}$$

x_lは標準正規分布から生成された独立同分布の乱数であるので，次式が成立する．

$$E[x_k x_l] = \begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases} \tag{33}$$

したがって，$\Delta\mathrm{y}_j$の分散$\sigma_{\Delta y}^2 = E\left[\left(\Delta\mathrm{y}_j\right)^2\right]$が，次式で計算できる．

$$\sigma_{\Delta y}^2 = c^2\sigma_B^2(\Delta t)^{2H}\left\{1+\sum_{l=-\infty}^{j-1}B_{jl}^2\right\} \tag{34}$$

式(34)の右辺第2項の和は，$l\to-\infty$で，収束するので，それをs^2とすれば，

$$\sigma_{\Delta y}^2 = c^2\sigma_B^2(\Delta t)^{2H}\{1+s^2\} \tag{35}$$

と表せ，$\sigma_0^2 = c^2\sigma_B^2\{1+s^2\}$と置けば，次式を得る

$$\sigma_{\Delta y}^2 = \sigma_0^2(\Delta t)^{2H} \tag{36}$$

この関係は，非整数ブラウン運動の増分過程に対して，その分散値が，媒介変数の増分間隔Δtに対して，ベキ乗則の成立することを要請している．

(3) 非整数ブラウン運動の修正

地震動位相の変動部ψを対象とし，その増分$\Delta\psi$の分散値$\sigma_{\Delta\psi 0}^2(\Delta\omega)$が角振動数増分$\Delta\omega$のベキ乗関数で表現できることは既に発表[16]しており，最小2乗近似を用いて，次式で与えられていた．

$$\sigma_{\Delta\psi 0}^2(\Delta\omega) \cong \sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H} \tag{37}$$

したがって，地震動位相の変動部ψの模擬に，非整数ブラウン運動をそのまま利用できそうである．しかし，式(25)では，$y(t)$の媒介変数tに対する定義域として，$[-\infty,t]$を必要としていたが，ψの角振動数に対する定義域は，式(13)の拘束条件から，$[0,\infty]$でなければならない．このため，地震動位相の変動部の増分$\Delta\psi$が正規分布に従う場合でも，ψの模擬に，非整数ブラウン運動を直接用いることはできない．以下では，式(13)の条件を満たすように非整数ブラウン運動を修正する．

まず，位相過程は角振動数ωを中心にして，2つの関数の和から構成されるものと考える．それらは，角振動数ゼロからωまでの貢献関数$\psi_1(\omega)$と角振動数∞からωまでの貢献関数$\psi_2(\omega)$であり，次式で表される．

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega)+\psi_2(\omega) \tag{38}$$

両関数は，次式のように，Lebesgue-Stieltjes積分で表現されるものと仮定する．

$$\psi_1(\omega) = c\int_0^\omega K_1(\omega-\tau)\,d\zeta(\tau) \tag{39}$$

$$\psi_2(\omega) = c\int_\omega^\infty K_2(\tau-\omega)\,d\zeta(\tau) \tag{40}$$

ここに，cは次元を合わせるための定数，$d\zeta(\tau)$はブラウンノイズ過程[15]である．$K_1(\omega-\tau)$ と $K_2(\tau-\omega)$は積分核で次式で与えられる．

$$K_1(\omega-\tau) = (\omega-\tau)^\beta,\quad K_2(\tau-\omega) = (\tau-\omega)^\beta \tag{41}$$

βは式(27)で定義された定数である．

式(38)に基づいて，位相差分を計算する．まず後退差分の計算を行うが，$\psi_1(\omega)$に関しては，${}_b\Delta\psi_1(\omega) = \psi_1(\omega)-\psi_1(\omega-\Delta\omega)$で計算できるが，$\psi_2(\omega)$に関しては，${}_b\Delta\psi_2(\omega) = \psi_2(\omega)-\psi_2(\omega+\Delta\omega)$にならなければならない．これは，位相の計算基点が$\psi_1(\omega)$では角振動数ゼロであり，$\psi_2(\omega)$では$\infty$になっているためである．したがって，後退差分は両者の和として次式となる．

$$ {}_b\Delta\psi(\omega) = \{\psi_1(\omega)-\psi_1(\omega-\Delta\omega)\} + \{\psi_2(\omega)-\psi_2(\omega+\Delta\omega)\} \tag{42}$$

式(42)の右辺の各項は次式のように表現される．

$$\psi_1(\omega) = c\int_0^\omega K_1(\omega-\tau)\,d\zeta(\tau)$$

$$\psi_1(\omega-\Delta\omega) = c\int_0^{\omega-\Delta\omega} K_1(\omega-\Delta\omega-\tau)\,d\zeta(\tau)$$

$$\psi_2(\omega) = c\int_\omega^\infty K_2(\tau-\omega)\,d\zeta(\tau)$$

$$\psi_2(\omega+\Delta\omega) = c\int_{\omega+\Delta\omega}^\infty K_2(\tau-\omega-\Delta\omega)\,d\zeta(\tau)$$

$d\zeta(\tau)$ を式(28)で近似し，上式群の離散表現を誘導するため，角振動数を離散角振動数間隔$\Delta\omega$で離散化し$\omega_j = j\cdot\Delta\omega$，$\tau_l = l\cdot\Delta\omega$と表し，$\Delta\psi_j = \Delta\psi(\omega_j)$と表した上で，$K_1(\omega_j-\tau_l)d\zeta_l \cong \sigma_B(j-l)^\beta(\Delta\omega)^H$となることなどに着目すれば，式(42)は次式のように離散化される．

$$\frac{{}_b\Delta\psi_j}{c\sigma_B(\Delta\omega)^H}=\left\{\sum_{l=0}^{j-1}{}_bP_{jl}\,x_l+0x_j+\sum_{l=j+1}^{\infty}{}_bF_{jl}\,x_l\right\} \quad (43)$$

ここに，${}_bP_{jl}$ と ${}_bF_{jl}$は次式で定義される．

$$\begin{aligned}{}_bP_{jl}&=(j-l)^\beta-(j-1-l)^\beta\\ {}_bF_{jl}&=(l-j)^\beta-(l-j-1)^\beta\end{aligned} \quad (44)$$

同様な考察に基づけば，前進差分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}{}_f\Delta\psi(\omega)=&\ \{\psi_1(\omega+\Delta\omega)-\psi_1(\omega)\}\\ &+\{\ \psi_2(\omega-\Delta\omega)-\psi_2(\omega)\}\end{aligned} \quad (45)$$

この式を，離散化すれば，次式となる．

$$\frac{{}_f\Delta\psi_j}{c\sigma_B(\Delta\omega)^H}=\left\{\sum_{l=0}^{j-1}{}_fP_{jl}\,x_l+2x_j+\sum_{l=j+1}^{\infty}{}_fF_{jl}\,x_l\right\} \quad (46)$$

ここに，${}_fP_{jl}$ と ${}_fF_{jl}$は次式で定義される．

$$\begin{aligned}{}_fP_{jl}&=(j+1-l)^\beta-(j-l)^\beta\\ {}_fF_{jl}&=(l-j+1)^\beta-(l-j)^\beta\end{aligned} \quad (47)$$

式(43)と(46)の平均を取ることにより，位相差分$\Delta\psi(\omega)$の離散表現が，次式で与えられることになる．

$$\Delta\psi_j=\frac{1}{2}\{{}_bd\psi_j+{}_fd\psi_j\}=c(\Delta\omega)^H\sigma_B\sum_{l=0}^{\infty}W_{jl}x_l \quad (48)$$

ここに，W_{jl}は次式で定義される．

$$W_{jl}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left({}_bP_{jl}+{}_fP_{jl}\right) & l\le j-1\\ 1 & j=l\\ \frac{1}{2}\left({}_bF_{jl}+{}_fF_{jl}\right) & j+1\le l\end{cases} \quad (49)$$

重み係数W_{jl}を$l\le j-1$ と $j+1\le l$ の部分に分け，それらをP_{jl} と F_{jl}と表現すれば，次式で表現される．

$$P_{jl}=\left((j+1-l)^\beta-(j-1-l)^\beta\right)/2 \quad (50)$$

$$F_{jl}=\left((l+1-j)^\beta-(l-1-j)^\beta\right)/2 \quad (51)$$

これらを用いて，式(48)は次式のように書き直せる．

$$\Delta\psi_j=c\sigma_B(\Delta\omega)^H\left\{\sum_{l=0}^{j-1}P_{j\,l}x_l+x_j+\sum_{l=j+1}^{\infty}F_{j\,l}x_l\right\} \quad (52)$$

式(52)で定義される$\Delta\psi_j$のアルゴリズムを分かりやすくするため，整数であるjとlで定義される，新しい整数$m=|j-l|\ (l<j)$を用いて，次式の重み係数を考える．

$$a_m=\frac{1}{2}\{(m+1)^\beta-(m-1)^\beta\} \quad (53)$$

さらに，$Y_j=\Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H$ と置けば，確率過程Y_jの模擬アルゴリズムは次式のように表現できる．

$$Y_j=c\sigma_B\left\{\sum_{m=1}^{j}a_mx_{j-m}+x_j+\sum_{m=1}^{\infty}a_mx_{j+m}\right\} \quad (54)$$

ここに，x_lの共分散については式(33)の成立すること，$\Delta\psi_j$の分散値が$\sigma^2_{\Delta\psi0}(\Delta\omega)$であることに注意し，$\mathrm{E}\left[Y_j^2\right]$を計算すれば，中心極限定理を用いて，次式が成立する．

$$\frac{\sigma^2_{\Delta\psi0}(\Delta\omega)}{(\Delta\omega)^{2H}}=c^2\sigma_B^2\left\{\sum_{m=1}^{j}a_m^2+1+\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\right\} \quad (55)$$

式(55)の等式が成立するためには，右辺第3項が有限値に収束しなければならないが，その証明は付録A に与えた．

一方，$\varepsilon_0=0.002$ となるような任意の微小値を設定し，式(16)を用い，$\rho_i=\varepsilon_0$となるようなiの値をLとすれば，$L\le j$となるjに関しては，式(55)は次式のように書き変えられ，Y_jはj点に関して点対称で定常な過程として模擬できることになる．

$$Y_j=c\sigma_B\left\{\sum_{m=1}^{L}a_mx_{j-m}+x_j+\sum_{m=1}^{L}a_mx_{j+m}\right\} \quad (56)$$

式(56) を用いた場合の$c\sigma_B$は次式で与えられる．

$$\mathrm{c}\sigma_B=\frac{\sigma_{\Delta\psi0}}{(\Delta\omega)^H}\Bigg/\left(\sqrt{\left\{\sum_{m=1}^{L}a_m^2+1+\sum_{m=1}^{L}a_m^2\right\}}\right) \quad (57)$$

上式を誘導するには，中心極限定理とY_jの分散値が，$\sigma^2_{\Delta\psi0}/(\Delta\omega)^{2H}$で与えられることを用いた．なお，式(56)の形式で与えられているY_jを，非定常の部分を含めて，式(23)の表現と一致させるためには，c_0を次式で与え，

$$c_0=\mathrm{c}\sigma_B(\Delta\omega)^H \quad (58)$$

行列Aの要素は，次式のように，式(53)の重み係数a_nを用いて，式(59)のように設定すれ良い．

$$\mathrm{A}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccccccc}1 & a_1 & \cdots & a_L & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ a_1 & 1 & a_1 & \cdots & a_L & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_L & \cdots & a_1 & 1 & a_1 & \cdots & a_L & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & a_L & \cdots & a_1 & 1 & a_1 & \cdots & a_L & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_L & \cdots & a_1 & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_L\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_L & \cdots & a_1 & 1 & a_1 & \cdots & a_{L-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_L & \cdots & a_1 & 1 & a_1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_L & \cdots & a_1 & 1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}1\\ 2\\ \vdots\\ L+1\\ L+2\\ \vdots\\ L+2+2^{n_0}\\ L+3+2^{n_0}\\ \vdots\\ 2L+2+2^{n_0}\\ 2L+3+2^{n_0}\end{array} \quad (59)$$

この場合には，式(23)，(57)と(58)の関係を用いれば，$\Delta\psi_j$の分散値は次式となる．

$$E\left[\left(\Delta\psi_j\right)^2\right]=\sigma^2_{\Delta\psi0} \quad (60)$$

これは，数値的に求められる位相差分の2乗平均値となっている．なお，σ_Hを次式のように設定すると，

$$\sigma_H=\mathrm{c}\sigma_B\sqrt{\left\{\sum_{m=1}^{L}a_m^2+1+\sum_{m=1}^{L}a_m^2\right\}} \quad (61)$$

式(57)より，次式の関係が得られ，修正非整数ブラウン運動で位相差分を模擬した場合でも，位相差分の分散値に対して離散各振動数に関するベキ乗則が成立する．

$$\sigma_{\Delta\psi 0}^2(\Delta\omega) = \sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H} \tag{62}$$

寿都記録に対しては，$H = 0.8085$が得られている[16]．

5. 正規化位相差分の非正規性

(1) レヴィフライト確率密度関数による表現

式(14)で定義された正規化位相差分X_lの数列$\{X_l\}$を寿都記録に基づいて計算し，その相関性を，第3章で考究した後，第4章ではその確率特性が標準正規分布で規定される場合についての考察を行った．しかし，$\{X_l\}$の確率特性を詳細に検討したものではなかった．X_lを定義するために用いた，標準偏差$\Delta\sigma_{\Delta\psi 0}$は離散角振動数$\Delta\omega = 2^n \cdot 50\pi/2^{28}$の関数であった．そこで，$n = 0,\cdots,11$と変化させたときの確率密度関数を最適階級幅を用いてヒストグラムの形式で推定した[17]ものを，**図-3**に示した．図から明かになるように，$\Delta\omega$のかなり広範囲に亘り，$\{X_l\}$の確率密度関数は重なっており，ほぼ同じであることが分かる．図中には，青点線で標準正規分布$N(0,1)$が示されている．これから，$\{X_l\}$の確率特性は裾野が厚く，正規分布には従わないことが分かる．，その非正規特性を表現するために，左右対称のレヴィフライト確率率密度関数$s(\alpha,\gamma,X)$を用いる[18]．**図-3**に示した$\{X_l\}$の確率特性は，$d_0\omega = 50\pi/2^{28}$とした場合に対して，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$としたときに，$n$が大きくなると，次第に裾野が厚くなる．そこで，レヴィフライト確率密度関数を$s(\alpha_n,\gamma_n,X)$と表現し，nごとに，α_nとγ_nを同定[19]したところ，$n = 0,\cdots,11$に対して，次式のような結果を得た．

$$\alpha_n \equiv 1.5 = \alpha \tag{63}$$

$$\gamma_n = (0.135,0.14,0.145,0.15,0.155,0.16,\ 0.165,0.17,0.175,0.185,0.2,0.24) \tag{64}$$

一方，**付録B**に述べるように，レヴィフライト分布に従う確率変数の分散値は定義できないので，式(14)に基ずく，標準偏差を用いた確率変数の正規化はできないことになる．しかし，観測記録から求められる位相差分は有限の数値データであるので，数値的な分散値を求めることは可能である．また，レヴィフライト確率密度関数の裾野を少しでも切り落とせば，分散値が定義できることが明らかになっている[20]．そこで，確率密度関数$s(\alpha_n,\gamma_n,X)$を用いて，次式で定義されるXの分散値$\sigma_{X_s}^2$を考えて見る．

$$\sigma_{X_s}^2 = \int_{-X_s}^{X_s} X^2\ s(\alpha = 1.5, \gamma = 0.2, X)dX \tag{65}$$

ここで，$\sigma_{X_s}^2 \equiv 1$となるX_sを求めてみる．$n = 0,\cdots,11$対応するそれをX_{sn}とすれば，次式を得る．

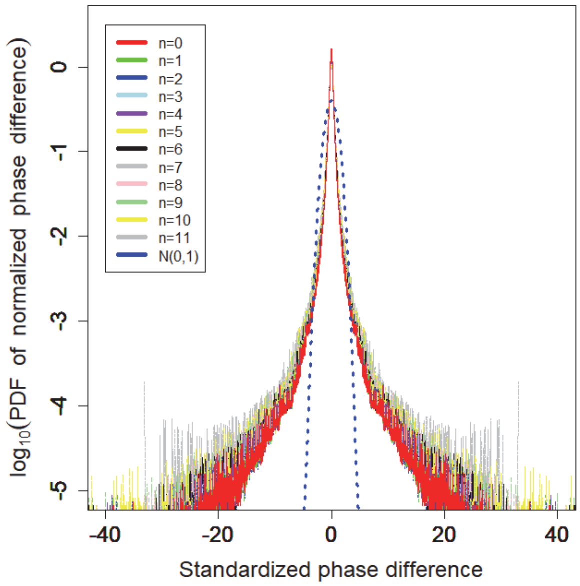

図-3 正規化位相差分の確率密度関数．$d_0\omega = 50\pi/2^{28}$の場合に対し，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$としたときの$n = 0,\cdots,11$に対する$\{X_l\}$の確率密度関数を描画した．

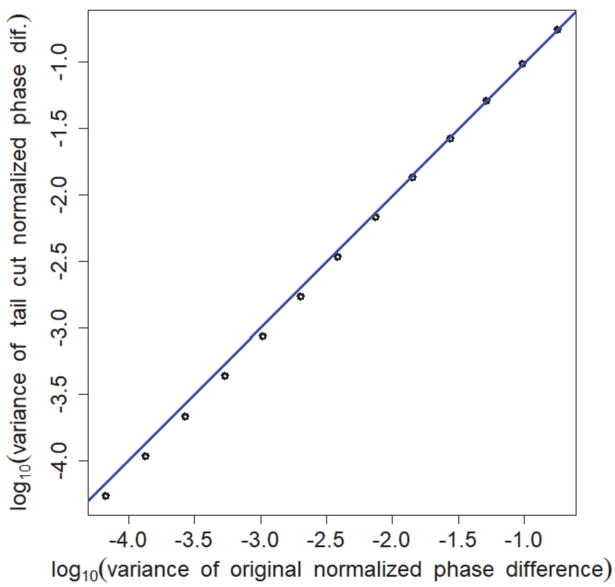

図-4 数値的に求まる位相差分(縦軸)の分散値とレヴィフライト確率密度関数の裾を切り取ったときに解析的に求まる位相差分の分散値(横軸)の比較．両者はよく一致していることが分かる．

$$X_{sn} = (284.20,254.50,229.00.206.88,187.50, \\ 180.50,155.40,142.10,130.30,110.30, \\ 87.30,50.60,39.80) \tag{66}$$

$X = \Delta\psi_l/\sigma_{\Delta\psi n}(\Delta\omega)$と書き換え，それを式(65)に代入し，式(65)のX_sをX_{sn}とし，$\sigma_{X_s}^2 \equiv 1$を考慮すると次式を得る．

$$\sigma_{\Delta\psi n}^2(\Delta\omega) = \int_{-X_{sn}}^{X_{sn}} (\Delta\psi_l)^2 \ s(1.5,0.2,X)dX \tag{67}$$

図-4は式(12)で求めた数値位相差分の数値的分散値と式(67)に基づいて求めた解析的分散値の比較である．これから，かなり広範囲の$\Delta\omega$に対して，次式の成立することが明らかになる．

$$\sigma_{\Delta\psi 0}^2(\Delta\omega) \cong \sigma_{\Delta\psi n}^2(\Delta\omega) \tag{68}$$

したがって，計算された地震動位相差分データを用いて，式(12)に基づいて，位相差分の分散値を数値的に求めることの妥当性が保障できる．

6. 標準化位相差分の非正規性

第4章(3)節では，式(14)を用いて位相差分をその標準偏差で正規化したうえで，その確率密度関数が標準正規分布に従う場合を想定し，その模擬法について考察を加えてきた．しかし，前章で明らかになったように，正規化位相差分の確率密度関数は非正規性を示していた．非正規性を有する確率変数では，中心極限定理を満たさない事象が発生し，分散値の定義できないのが一般的である．したがって，正規化の概念は使用できないので，確率変数の定義を改めなければならない．

(1) 標準化位相差分の自己相関関数と確率密度関数

地震動位相差分の数値的分散値では，式(37)で与えたように，離散角振動数間隔との間にはべき乗則が成立するので，ここでは，位相差分$\Delta\psi_l$を$(\Delta\omega)^H$で標準化した，次式のような確率変数を考える．

$$Y_l = \frac{\Delta\psi_l}{(\Delta\omega)^H} \tag{69}$$

図-5に$d_0\omega = 50\pi/2^{28}$の場合に対し，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$としたときの$n = 0,\cdots,12$に対する$\{Y_l\}$の自己相関係数を描画した．その特性は**図-2**の場合とあまり変わらない．**図-6**に$d_0\omega = 50\pi/2^{28}$の場合に対し，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$としたときの$n = 0,\cdots,12$に対する$\{Y_l\}$の確率密度関数を描画した．褐色太線は$N(0,1)$の確率密度関数である．**図-3**と比較するとら明かになるように，式(14)で定義された正規化位相差分の確率密度関数に比べ，標準化位相差分の確率密度関数の方が，n値に基づく確率密度関数の違いが鮮明になっており，n値が大きくなるにつれて，分布の裾野が厚くなり，いずれのn値に対する確率密度関数も正規確率密度関数では表現できないことが明確である．そこで，各n値に対して，レヴィフライト確率密度

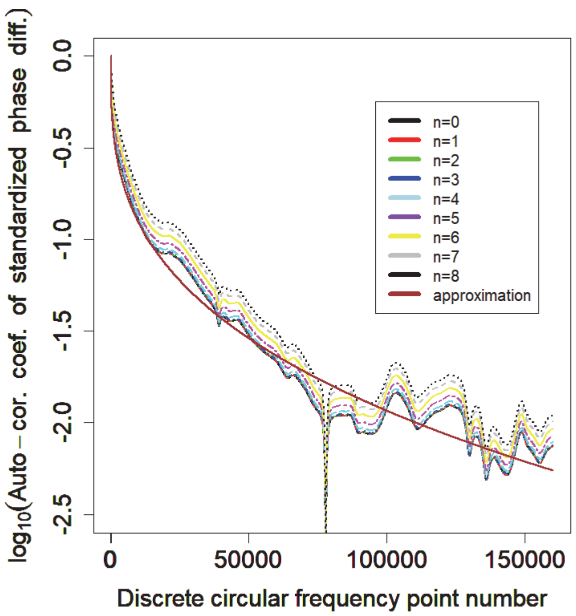

図-5 標準化位相差分の自己相関関数．$\Delta\omega$を規定するn値が大きくなるにつれて，自己相関係数値は小さくなるが，n値が3程度まではほぼ同一の自己相関係数になっている．褐色実線は式(16)で与えられる自己相関係数の近似関数である．パラメータは$b_r = 4$，$b = 0.1$，$k_\rho = 20000 \times 2^3$である．この値は**図-2**の場合と同じ値である．

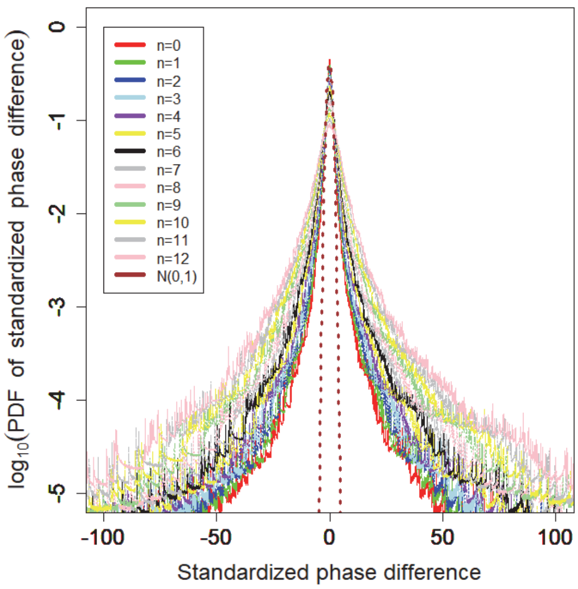

図-6 標準化位相差分の確率密度関数．$d_0\omega = 50\pi/2^{28}$の場合に対し，$\Delta\omega = 2^n d_0\omega$としたときの$n = 0,\cdots,12$に対する$\{Z_l\}$の確率密度関数を描画した．確率密度関数は，最適な階級幅を設定した上で，ヒストグラムの形式で推定したものである．褐色太線は標準積確率密度関数である

関数$s(\alpha_n, \gamma_n, Z)$を仮定し，$n = 0, \cdots, 12$に対して，パラメータを同定する[19]と次式となる．

$$\alpha_n \equiv 1.5 = \alpha \tag{70}$$

$$\gamma_n = (0.70, 0.80, 0.90, 1.10, 1.25, 1.45, 1.70, 2.00, 2.20, 2.40, 2.55, 2.90, 3.65) \tag{71}$$

これらの値を用いて，各n値に対する解析解の確率密度関数を描画したのが**図-7**である．図から明かなように，解析解の確率密度関数は観測記録から求められる確率密度関数を良く表現していると言える．

(2) 標準化位相差分の模擬アルゴリズム

式(69)で定義された確率変数Y_lはレヴィフライト確率密度関数$s(\alpha_n \equiv \alpha, \gamma_n, Y)$に従うので，位相差分$\Delta\psi_l$もレヴィフライト確率密度関数に従わなければならない．そこで，位相ψを角振動数ωの関数として模擬するためのアルゴリズムを構築する．それを非整数レヴィフライト運動と名付ける．基本的なアルゴリズムの展開は，4章(3)で誘導した方法と同じであり，位相変動部の位相$\psi(\omega)$が，式(38)のように，2つの関数の和から構成されるものと考える．それら2つの関数が，式(39)と(40)のように，Lebesgue-Stieltjes積分で表現され，積分核の表現も式(41)と一致する．ただし，βの値が次式で定義されている点が異なっている．

$$\beta = H - 1/\alpha \tag{72}$$

また，$d\zeta(\tau)$はブラウンノイズ過程ではなくレヴィフライトノイズ過程であり，次式で近似される確率過程であり，確率密度関数の再現性を有している過程である[21]．

$$d\zeta(\tau) \cong \gamma_L (\Delta\tau)^{\frac{1}{\alpha}} z(\tau) \tag{73}$$

ここに，γ_Lはレヴィフライトノイズ過程の振幅を決定する値である．なお，$z(\tau)$は角振動数τにおいて，標準レヴィフライト確率密度関数$s(\alpha = 1.5, \gamma = 1, Z)$から，独立同分布で生成される乱数である．一方，式(28)で与えられたブラウンノイズの場合には，γ_L値はσ_Bであったので，非整数レヴィフライト運動を取り扱うときは，式(43)，(46)，(48)，(52)，(54)，(56)におけるσ_Bをγ_Lに置き換える必要がある．また，これらの式に現れる$\{x_l\}$は標準正規確率密度関数に従う独立同分布の乱数列であったが，非整数レヴィフライト運動では標準レヴィフライト確率密度関数$s(\alpha = 1.5, \gamma = 1, Z)$に従う独立同分布の乱数列$\{z_l\}$に置き換えられなければならない．したがって，式(54)に基づく模擬アルゴリズムは次式の形式に書き変えておかねばならない．

$$Y_j = c\gamma_L \left\{ \sum_{m=1}^{j} a_m z_{j-m} + z_j + \sum_{m=1}^{\infty} a_m z_{j+m} \right\} \tag{74}$$

なお，$c\gamma_L$値の決定には，$\{z_l\}$が標準正規乱数列ではなく，標準レヴィフライト確率密度関数からの乱数列であるので，分散値が定義できず，中心極限定理が使えないので，一般化中心極限定理[22]を利用しなければならない．この場合，$Y_j(\Delta\omega)$が従う確率密度関数$s(\alpha_n \equiv \alpha, \gamma_n, Y)$の形式が与えられていなければならない．このために，$\Delta\omega = 2^n d_0 \omega = 2^n \cdot (50\pi/2^{28})$と定義されていたので，$n = 3$を指定し，$\Delta\omega$値を固定する．これは，位相を模擬するための離散角振動数間隔を決定することと同等である．模擬する位相差分の個数は，ナイキスト角振動数内の離散点個数で良かったので，$\Delta\omega$の値が決定されると，式(59)のn_0の値も自動的に決定されることになる．ここでは$n = 3$を選定し，式(71)から$\gamma_3 = 1.10$とし，$n_0 = 24$とした．このγ_3と，一般化中心極限定理[22]を用いて，**付録B**の式(b5)を用いて，$c\gamma_L$値が次式で決定できる．

$$\gamma_3^\alpha = (c\gamma_L)^\alpha \left\{ \sum_{m=1}^{j} a_m^\alpha + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^\alpha \right\} \tag{75}$$

式(75)の等式が成立するためには，右辺第3項が有限値に収束しなければならないが，その証明は**付録A**に与えた．

一方，式(55)の下に定義した，$L \le j$となるjに関しては，式(74)は次式のように書き変えられ，Y_jはj点に関して点対称で定常な過程として模擬できることになる．

$$Y_j = c\gamma_L \left\{ \sum_{m=1}^{L} a_m x_{j-m} + x_j + \sum_{m=1}^{L} a_m x_{j+m} \right\} \tag{76}$$

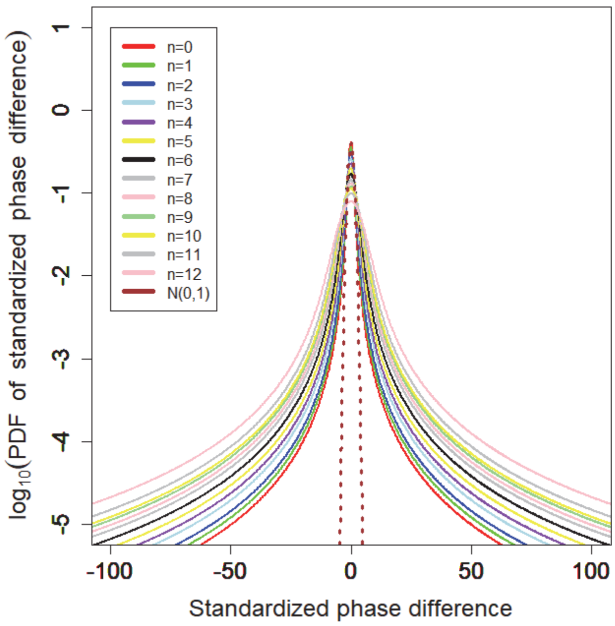

図-7 各n値に対して，解析的に求まる確率密度関数を描画した．解析的に求まる確率密度関数は，数値的に求まった**図-6**の確率密度関数をよく近似していることが分かる．

(3)　模擬アルゴリズに基づく位相差分の自己相関特性

式(76)に基づけば，離散点jと$j+1$における位相差分$\Delta\psi_j(\Delta\omega)$と$\Delta\psi_{j+k}(\Delta\omega)$は次式に示すように，式(77)と(78)で与えられる．

$$\frac{\Delta\psi_j}{(\Delta\omega)^H} = c\gamma_L\left\{\sum_{m=1}^{L} a_m z_{j-m} + z_j + \sum_{m=1}^{L} a_m z_{j+m}\right\} \quad (77)$$

$$\frac{\Delta\psi_{j+k}}{(\Delta\omega)^H} = c\gamma_L\left\{\sum_{m=1}^{L} a_m z_{j+k-m} + z_{j+k} + \sum_{m=1}^{L} a_m z_{j+k+m}\right\} \quad (78)$$

したがって，離散角振動数$\Delta\omega$でのkステップ差の位相差分の自己相関関数$R(k)$は次式で与えられる．

$$R(k) = E\left[\Delta\psi_j(\Delta\omega)\Delta\psi_{j+k}(\Delta\omega)\right] \quad (79)$$

式(77)と(78)の$\{z_l\}$が標準レヴィフライト確率密度関数から独立同分布で生成された乱数列であったことを思い越せば，次式が成立する．

$$E[z_l z_{l+k}] \equiv 0 \quad (80)$$

問題は，レヴィフライト確率密度関数に従う確率変数の分散値$E[z_l z_l]$が∞に発散し，定義できないことである．しかし，確率密度関数の裾野を少しでも切り落とすと分散値が存在[20]し，それをσ_l^2とすれば，次式で定義される．

$$\sigma_l^2 = E_c[z_l z_l] = \int_{-Z_{cl}}^{Z_{cl}} Z^2 s(\alpha, 1, Z)dZ \quad (81)$$

ここに$E_c[\quad]$は確率密度関数の裾野をZ_{cl}で切り取った期待値計算を意味する記号である．式(79)に式(77)と(78)を代入し，式(80)と(81)を考慮すれば，次式を得る

$$\frac{R(k)}{c^2\gamma_L^2(\Delta\omega)^{2H}} = \left(a_{L-k}a_L\sigma_{j+k-L}^2 + \cdots + a_2 a_{k+2}\sigma_{j-2}^2 + \cdots + a_1 a_{k+1}\sigma_{j-1}^2 + 1\cdot a_k\sigma_j^2 + a_1 a_{k-1}\sigma_{j-1}^2 + \cdots + a_{k-1}a_1\sigma_{j+k-1}^2 + a_k\cdot 1\sigma_{j+k}^2 + a_{k+1}a_1\sigma_{j+k+1}^2 + a_{k+2}a_2\sigma_{j+k+2}^2 + \cdots + a_L a_{L-k}\sigma_{j+L}^2\right) \quad (82)$$

σ_l^2がlによらない一定値σ_c^2であるとすれば，次式を得る．

$$\frac{R(k)}{\sigma_c^2 c^2\gamma_L^2(\Delta\omega)^{2H}} = \left(2\sum_{l=1}^{L-k} a_l a_{k+l} + \sum_{l=1}^{k-1} a_l a_{k-l} + 2\cdot a_k\right) \quad (83)$$

$k=0$のときは，次式で表現される．

$$\frac{R(0)}{\sigma_c^2 c^2\gamma_L^2(\Delta\omega)^{2H}} = \left(2\sum_{l=1}^{L} a_l^2 + 1\right) \quad (84)$$

$\rho(k) = R(k)/R(0)$と定義されるので，次式を得る．

$$\rho(0) = 1 \quad (85)$$

$$\rho(k) = \frac{\left(2\sum_{l=1}^{L-k} a_l a_{k+l} + \sum_{l=1}^{k-1} a_l a_{k-l} + 2\cdot a_k\right)}{(2a_L^2 + \cdots + 2a_1^2 + 1)} \quad (86)$$

係数列$\{a_m\}$と，式(85)と(86)を用いて，k値の大きな離散点数までの相関係数を求めるのには時間がかかるので，次元が$2L+1$より十分大きく，式(76)の係数列$\{a_m\}$から構成される，次式のような重み係数ベクトルを考える．

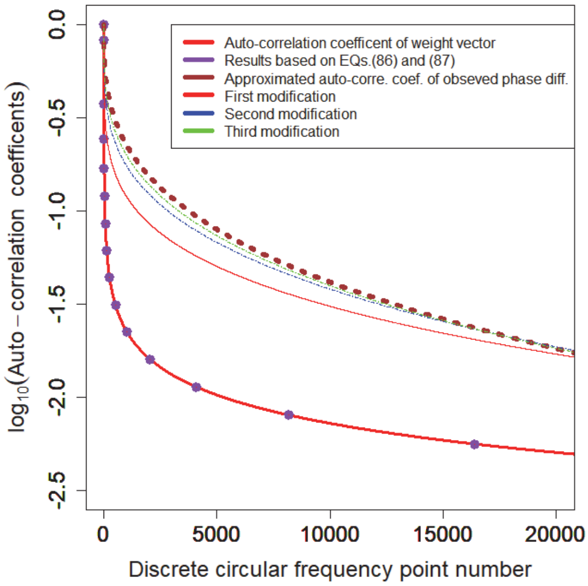

図-8　各種自己相関係数．赤太実線は式(87)のパワースペクトルのフーリエ逆変換で求められる自己相関係数．赤太実線上に乗っている紫●印は式(82)と(83)に基づく結果である．褐色点線は観測記録から求められた自己相関係数の近似式(式(16)を参照)である．赤太実線と褐色点線の差が大きいので，赤太実線を計算した係数列$\{a_n\}$に倍率を乗ずる補正を3回繰り返し，そのパワースペクトルから自己相関係数を求めたた結果が緑一点鎖線で表示されている．褐色太点線を精度よく近似していることが分かる．

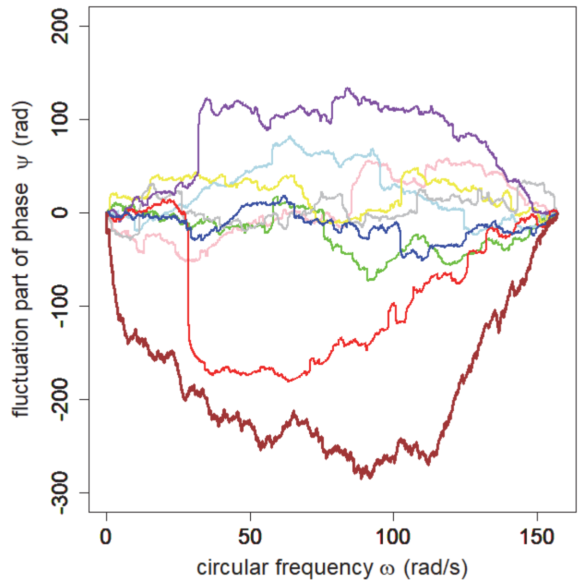

図-9　式(74)に基づいて，初期乱数を変えて模擬した8種類の位相変動部．褐色太曲線は寿都記録から決定した位相変動部．

$$\{w\} = \{a_L, \cdots, a_1, 1, a_1, \cdots, a_L, 0, \cdots, 0\} \tag{87}$$

この重み係数ベクトルのパワースペクトルを計算し，その逆変換で自己相関関数$R_w(k)$が求まるので，それから$\rho(k) = R_w(k)/R_w(0)$として，自己相関係数を求めた．その結果が赤太実線で**図-8**に示されている．赤太実線上に乗っている紫●印は式(85)と(86)に基づいた結果である．褐色太点線は**図-5**に示した褐色太実線と同じものである．赤太実線と褐色点線との各離散点における倍率の平方根が係数値a_mの倍率r_{1m}になっているとして，赤太実線の自己相関係数を補正したのが赤細実線である．同様に，赤細実線と褐色点線の倍率に基づいてr_{2m}を計算し，赤細実線を補正したのが青細点線である．さらに青細点線と褐色点線の倍率に基づきr_{3n}を計算し，青細点線を補正したのが緑一点鎖線である．緑一点鎖線は，係数列$\{r_{1m} \cdot r_{2m} \cdot r_{3m} \cdot a_m\}$を用いて，式(87)で定義された重み係数ベクトルを作成し，そのパワースペクトルのフーリエ逆変換で求めた自己相関係数になっている．緑一点鎖線が褐色太点線をよく近似できていることが分かる．

図-9は，$\{a_m\} = \{r_{1m} \cdot r_{2m} \cdot r_3 \cdot a_m\}$と置き直し，式(76)に定義したアルゴリズムを用いて，模擬した位相変動部である．標準レヴィフライト確率密度関数からの乱数列$\{z_l\}$を生成するための初期乱数として，任意の8個を設定して，$\Delta\omega = (50\pi/2^{25})$に対し，$\{Y_j(\Delta\omega)\}$を$2^{n_0}$個模擬し，それから，$\{\Delta\psi_j\} = (\Delta\omega)^H\{Y_j(\Delta\omega)\}$として，位相変動部の位相差分$\Delta\psi$を求め，その累積和として$\psi(\omega)$を求めた．観測記録の離散時間間隔$\Delta t$は0.02秒でなので，図示した角振動数範囲は，50πラジアンまでである

8. むすび

以上，地震動位相の角振動数に関する相関性を主な課題とし，地震動位相差分の非正規性についても議論し，地震動位相の相関性に着目した，新しい地震動位相の模擬アルゴリズムを考究してきた．得られた内容を要約すれば以下のようである．

(1) 地震動位相を線形位相遅れ部とそこからの変動部に分解し，変動部の位相差分を考察の対象とした．
(2) 位相差分の分散値が存在できるものとし，数値的に求められる標準偏差で正規化した位相差分の角振動数に対する自己相関関数の特性を精査した．
(3) その結果，正規化位相差分の自己相関係数が，位相差分を計算する離散角振動数間隔によらず，ほぼ同一の相関特性を示すことが判明した．
(4) 位相差分の確率密度関数が正規分布に従うと仮定した上で，その共分散行列の表現法について考察した．その場合を対象とし，非整数ブラウン運動の模擬アルゴリズムを修正し，位相差分の模擬に利用できるかどうかを議論した．
(5) 正規化位相差分の確率密度関数が非正規性を示すことを明かにし，それの確率密度関数が，再現性を有する，レヴィフライト確率密度関数で表現できることを明かにした．
(6) レヴィフライト確率密度関数に従う確率変数の分散値は定義できないので，正規化位相差分を非正規系の確率変数として取り扱うことはできな．そこで，レヴィフライト分布関数に従う確率変数の分散値を解析的に求めるための条件を明確にした．
(7) 数値的に求まる分散値が離散角振動数間隔に対してベキ乗則に従う場合を対象として，位相差分に標準化の概念を導入し，標準化された位相差分の確率密度関数がレヴィフライト分布で定義できることを明かにした．
(8) その結果を用いて，非整数レヴィフライト運動と名付けた，新しい確率過程の模擬アルゴリズムを構築し，それを用いて，地震動位相の変動部が，非正規過程として模擬可能であることを示した．

以上が主な結論であるが，位相差分の標準化は離散角振動数数間隔Δωとハースト指数Hを用い，$\Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H$としていた．位相平均勾配は$\Delta\psi_j/\Delta\omega$となるので，**図-5**に示した自己相関特性は，位相平均勾配についても，全く同じになることは明白である．これから，$\Delta\omega \to 0$の極限として定義される群遅延時間の自己相関特性も明白になることを付記する．

謝辞：本研究を推進するに当たり，気象庁が提供している地震動加速度時刻歴のデータベース[13)]を利用した．また，日本学術振興会から科学研究助成基金助成金#18K04334の援助を得た．併せて謝意を表す．

付録A　式(55)と式(75)の収束性の証明

式(75)の右辺第3項は次式のように表現されていた．

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{\alpha} \tag{a1}$$

一方，式(55)と式(75)で用いているa_mは，同じ形をしており，次式のように定義されていた．

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{(m+1)^{\beta} - (m-1)^{\beta}\right\} \tag{a2}$$

また，式(75)のβ値は次式で与えられていた．

$$\beta = H - 1/\alpha \tag{a3}$$

今，$\alpha = 2$とすれば，式(a1)は式(55)に一致する．この場合のβ値は，式(27)で定義した非整数ブラウン運動のと

きの，β値に一致する．したがって，式(55)の収束性は，式(75)の収束性を証明すれば，自動的に満たされることになる．そこで，ここでは式(a1)の収束性のみを証明する．

まず，mの値を十分に大きなMとすれば，式(a3)を考慮して，a_Mは次式のように近似できる．

$$a_M^\alpha \cong \beta^\alpha M^{\alpha(\beta-1)} = \beta^\alpha M^{\alpha(H-1)-1} \quad \text{(a4)}$$

ここで，式(a1)を$M-1$までの和とそれ以上の和に分解すると，次式となる．

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^\alpha = \sum_{m=1}^{M-1} a_m^\alpha + \sum_{m=M}^{\infty} a_m^\alpha \quad \text{(a5)}$$

式(a4)の近似式を用いると，式(a5)の右辺第2項は次式のように評価できる．

$$\sum_{m=M}^{\infty} a_m^\alpha \cong \int_M^\infty \beta^\alpha x^{\alpha(H-1)-1}\,dx = \frac{\beta^\alpha M^{\alpha(H-1)}}{\alpha(1-H)} \quad \text{(a6)}$$

H値の範囲は$[0.5, 1)$であったから[23]，式(a6)は十分大きなMについてはゼロに収束する．したがって，式(a1)の無限和の収束性が証明され，式(75)の収束することが保障される．この証明過程はα値によらず成立するので，$\alpha=2$の場合にも，式(a1)の収束することが保障され，式(55)の収束性が保証できる．

付録B レヴィフライト分布関数の概説[15)]

平均値ゼロのレヴィフライト分布[18)]は，2つのパラメータαとγを用いて，定義できるので，その確率密度関数を$S(\alpha,\gamma,X)$と表す．αは確率密度関数の裾野の厚さを制御するパラメータで，特性指数と呼ばれ，$0<\alpha\leq 2$の範囲で定義される．$\gamma>0$は確率密度関数の広がりを制御するパラメータであり，規模母数と呼ばれる．Xは確率変数を表す．この確率密度関数は陽な形では定義されないが，その特性関数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\varphi(2\pi t,\alpha,\gamma) &= E[exp(-i2\pi tX)] \\ &= exp(-\gamma^\alpha|2\pi t|^\alpha)\end{aligned} \quad \text{(b1)}$$

$E[\ ]$は期待値計算を表現する関数であり，$S(\alpha,\gamma,X)$はこの特性関数のフーリエ逆変換として，次式のように定義される．

$$S(\alpha,\gamma,X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi t,\alpha,\gamma)e^{i2\pi tX}d(2\pi t) \quad \text{(b2)}$$

なお，$\gamma=1$である，$S(\alpha,1,Z)$は標準レヴィフライト確率密度関数と名付けられる．$S(\alpha,1,Z)$からの確率変数をZとすると，$S(\alpha,\gamma,X)$からの確率変数Xとの間には，次式の変換関係が成立する．

$$X = \gamma Z \quad \text{(b3)}$$

さらに，$S(\alpha,\gamma_i,X)$からの確率変数をX_iとしたときに，X_iと$X_j (i\neq j)$が互いに独立であるとして，次式のような重み付き和からなる確率変数X_wを考える．

$$X_w = \sum_{l=1}^{n} w_l X_l \quad \text{(b4)}$$

この場合，X_wは同じパラメータαを有する安定分布族に属し，その確率密度関数は$S(\alpha,\gamma_w,X)$と表現され，γ_wは次式で規定される．

$$\gamma_w^\alpha = \sum_{l=1}^{n} w_l^\alpha \gamma_l^\alpha \quad \text{(b5)}$$

式(b4)と(b5)はレヴィフライト分布から独立同分布で生成された確率変数の和を取り扱うときの中心極限定理に相当する役割を果たす式に成っている．分散が存在しないレヴィフライト確率密度関数から生成された乱数列の和を取り扱うときに重要な役割を果たすので，拡張型中心極限定理[21)]と位置づけられる．

レヴィフライト分布関数に分散値が存在しないことは以下のように証明される．レヴィフライト分布関数の分散は式(b1)で与えられる特性関数を$(2\pi t)$で2階微分し，-1を乗じた上で$2\pi t\to 0$とすれば求められる．いま，分散値をσ_X^2と表せば，そのオーダーは次式で評価できる．

$$O(\sigma_Z^2) = O\left(\lim_{t\to 0}(|2\pi t|^{\alpha-2})\right) \quad \text{(b6)}$$

αの値は2未満なので，$2\pi t\to 0$の極限でσ_X^2は∞に発散する．

参考文献

1) Ohsaki, Y. : On the significance of phase content in earthquake ground motions, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.7, pp.427-439, 1979.
2) 和泉正哲，勝倉裕：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会構造系論文集，第 327 号，20-26，1983.
3) 石井　透，渡辺孝英：地震動の位相特性と地震のマグニチュード・震源距離・深さの関係，日本建築学会学術講演会梗概集，385-386，1987.
4) 佐藤智美，植竹富一，菅原良次：群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 493 号，31-39，1997.
5) Katukura, H., Ohno, S. and Izumi, M. : Symmetric FFt techinique and its applications to earthquake engineering, Eathquake Enigineering and Structural Dynamics, Vol.18,pp.717-725,1989.
6) 佐藤忠信：確率過程として見た地震動位相の不可解性，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vo..72, No.4(地震工学論文集第 35 巻)，pp.I_831-I_841，2016.
7) 佐藤忠信：自己相似仮説から導出される地震動位相の確率特性と地震動振幅の減衰，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.70, No.3, pp.463-473, 2014.
8) 佐藤忠信・室野剛隆：地震動観測記録に見る位相平均勾配の特異な確率特性とそのモデル化，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol. 74, No.2, pp.229-240, 2018.

9) 伏見正則：乱数，UP 応用数学選書，東京大学出版会，1989.
10) 松葉育雄：長期記憶過程の統計—事故筋な時系列の理論と方法ー，共立出版株式会社，2007.
11) Mandelbrot, B. B. and Van, J. W. : Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, Vol.10 (4), pp.422-437, 1968.
12) Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B. and Zhang, T. : *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, London, 2008.
13) 国土交通省気象庁，主な地震の強震観測データ，http://www.data.jma.go.jp/svd/eqev/data/kyoshin/jishin/index.html，2017 年 8 月 12 日閲覧.
14) Falconer, K.: *Fractal Geometry; Mathematical Foundation and Application,* 2nd ed. John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2003.
15) Karatzas, I. and Shreve S.E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.
16) 佐藤忠信：地震動加速度時刻歴のフーリエ変換に内在する微分不可能性の本質を探る，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.74, No.4(地震工学論文集第 37 巻)，I_452-I_463, 2018.
17) Scott, D. W. : *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*, Wiley, 1992.
18) Nolan, J. P. : Stable Distribution: Models for Heavy Tailed Data, (http://academic2.american.edu/~ jpnolan/stable/chap1.pdf) 2015 年 11 月 13 日閲覧.
19) R Core Team (2015): *A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, URL* https://www.R-project.org/, Package “libstableR” by Royula-del-Val, et.al. Ver.1.0.2, 2018-08-26.
20) Mantegna, R. N. and Stanley : *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexty in Finace,* Cambridge University Prrss, Cambridge, 2000.
21) 佐藤忠信：地震動位相差分の特異な確率特性と確率過程 - 分散の定義できない群遅延時間のモデル化 - ，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.73, No.2, pp.344-363, 2017.
22) Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. *: Limit Distribution for Sums of Independent Random Variables, English translation by K.L. Chung, revised 1968,* Addison-Wesley, 1968.
23) Tanaka, K. and Sato, T.：Evaluation of inhomogeneous structures in seismic propagation path in Japan based on the fractal characteristic of observed earthquake motion phase, *Proceedings of 16th World Conference on Earthquake Engineering*, Paper No.1420, 2018.

(2020. 9. 7 受付)

AUTO-CORRELATION CHARACTERISTIC OF THE EARTHQUAKE MOTION PHASE DIFFERENCEE

Tadanobu SATO and Yoshitaka MURONO

We decomposed the earthquake motion phase into linear delay and fluctuation parts. In this paper, we discuss the peculiar auto-correlation characteristics of the fluctuation part of the phase. First, we normalized the phase difference of the fluctuation part by its standard deviation then investigate the auto-correlation characteristic of the normalized phase difference. The auto-correlation characteristic of the phase difference is expressed by a unique equation and is independent of the circular frequency interval to calculate the phase difference, which means that the phase difference possesses the fractal characteristics. Then we develop a method to define the covariance matrix of normalized phase difference form the identified auto-correlation function. If the probability density function is assumed to be expressed by the normal distribution function, we discussed a possibility to simulate the earthquake motion phase by modifying the fractional Brownian motion. Moreover, we discuss the non-Gaussian feature of the phase difference and derive a formula that expresses the phase difference as a Levy-flight probability density function. Because the variance of the stochastic value obeying the Levy-flight distribution cannot be defined we discuss the existence condition of the variance even if the stochastic value obeying the Levy-flight distribution. Then we develop a new stochastic process, namely, the fractional Levy-flight motion, using the Levy-flight noise process and the kernel with the fractional characteristic for the simulation of a stochastically rigorous sample earthquake motion phase.