

種々の教科書におけるモード解析の取り扱いとその改善策に関する一考察

野津 厚¹

¹正会員 港湾空港技術研究所 (〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1)

E-mail: nozu@p.mpat.go.jp

モード解析は地震工学において基本的な事項の一つであるが、最近の著者の経験からすると、一冊の教科書で一通りの理解に至ることができる状況にはない。本稿では、モード解析の一連の流れのうち特にわかりにくい点について、既存の教科書における記載内容を整理し、改善策を検討した。モード解析の一連の流れのうち特にわかりにくい点として次の二点が指摘できる。1) 固有方程式の解である λ は必ず実数かつ正となるのか。2) 固有方程式が重根を持つ場合どうなるのか。これらの点について明確に記載している教科書は少数であった。これらの点を明確にするための記載内容の改善策を検討した。

Key Words: modal analysis, symmetric matrix, positive definite matrix, repeated eigenvalues, textbook

1. はじめに

著者は最近橋梁の地震応答を検討する機会があり、その中で、モード解析を行う機会があった。モード解析については、大略は把握しているつもりであったが、実際に解析を行うにあたり、その詳細を把握する必要があった。モード解析は、地震工学においては基本的な事項であるから、いずれかの教科書を読めばすぐにも理解できるものと考えていた。しかしながら、実際に始めてみると、すぐには理解できない点が多く、様々な教科書から情報を集め、かつ、不足する点を自分で補うことで、ようやく一通りの理解に至ることができた。本来は一冊の教科書で一通りの理解に到達できることが望ましいが、そうした状況にはないことがわかった。

本稿は、モード解析の一連の流れのうち特にわかりにくい点に着目し、既存の教科書における記載内容を整理し、さらに改善策を検討したものである。こうした検討は、将来、我々が地震工学の専門家として、より良い教科書や教材を作ることに役立つと考えられる。

なお、本稿では非減衰多自由度系のモード解析を対象とする。減衰を有する系のうち、減衰マトリクスが Rayleigh 減衰のように特定の形をしている場合に対しては本稿の議論を応用できるが、減衰マトリクスが一般の形をしている場合については本稿の議論の対象外である。

2. モード解析の説明の一般的な流れとわかりにくい点

以下においては、既存の教科書^{1,2)}における典型的なモード解析の説明の流れをたどりつつ、著者にとってどのような点がわかりにくかったかについて述べる。

まず、非減衰多自由度系（自由度を n とする）の運動方程式は次式で与えられる。

$$M\ddot{x} + Kx = f \quad (1)$$

ここに M は質量マトリクス、 K は剛性マトリクス、 x は変位ベクトル、 f は外力ベクトル、 $\ddot{}$ は時間に関する二階微分を表す。自由振動の場合の式は

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (2)$$

であり、その解を

$$x = \phi e^{i\omega t} \quad (3)$$

とおけば

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (4)$$

が得られる。これが非自明解を持つためには

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (5)$$

でなければならない。ここに $\det$ は行列式を表す。この条件から固有方程式が導かれる。

ここで、一般には固有方程式の解である ω を小さい方から順に並べたものが1次、2次、…、 n 次の固有円振動数であると説明されることが多い。モード解析のわかりにくい点の一点目がここにある。 $\lambda = \omega^2$ とおけば、固有方程式は λ に関する n 次方程式であるから、複素数まで考えれば n 個の解 λ があることはわかるが、 λ が実数とならなければ ω も実数とならない。また、 λ が実数であっても負であれば ω は実数とならない。固有方程式の解である λ は必ず実数かつ正となるのかという点がモード解析のわかりにくい点の一点目である。この点については、結果的には後述の通り（系が非減衰である限り）「 λ は常に正の実数であり、 ω も正の実数とすることができる」が正しい結論であるが、この結論にたどりつくまでに著者の場合にはだいぶ時間を要した。

さて、 n 個の ω がすべて正の実数であることは認めるとすると、次の手順は固有ベクトルの直交性を示すことである。いま ω_i と ω_j を固有方程式の解、 ϕ_i と ϕ_j を対応する固有ベクトルとすると（ただし $i \neq j$ とする）

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = 0 \quad (6)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M})\phi_j = 0 \quad (7)$$

である。式(6)に ϕ_j^T を、式(7)に ϕ_i^T をそれぞれ左から乗じると、

$$\phi_j^T (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = 0 \quad (8)$$

$$\phi_i^T (\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \phi_j = 0 \quad (9)$$

であり、式(8)両辺の転置をとると

$$\phi_i^T (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})^T \phi_j = 0 \quad (10)$$

である。ここで $\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ が対称行列であることを考慮すると（この点も後述する）

$$\phi_i^T (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_j = 0 \quad (11)$$

であり、式(9)から式(11)を引くと

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad (12)$$

である。

ここで多くの教科書では「 $\omega_i \neq \omega_j$ である場合には」

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (13)$$

であるとしている。式(13)は固有ベクトルの直交性を示す重要な式である。確かに $\omega_i \neq \omega_j$ であれば式(13)は導かれるが、固有方程式が重根を持つ場合どうなるか言及している教科書は少ない。この点がモード解析のわかりにくい点の二点目である。モード解析について詳細な知見を有している方にとっては自明のことかも知れないが、モード解析の初心者にとっては、

- ・固有方程式が重根を持つ場合はモード解析ができないのか
- ・対象とする系がなんらかの性質を持つ場合は固有方程式が重根を持たないということなのか

判断に迷うところである。この点について、結果的には後述の通り「固有方程式が重根を持つ場合でもモード解析はできる」が正しい結論であるが、この結論にたどりつくまでにだいぶ時間を要した。

念のため式(13)以降の展開も記述しておくことにする。いったん式(13)が言えると式(9)より

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (14)$$

も言える。ここで n 個の列ベクトル ϕ_j を並べた行列を Φ （モード行列）とすると式(13)(14)より $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ と $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ は対角行列となる。ここで式(1)に戻り、変位ベクトル $\mathbf{x}$ を一般化座標 $\mathbf{q}$ で表す。

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (15)$$

これを式(1)に代入し左から Φ^T を乗じると

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (16)$$

を得る。左辺の係数行列は上述のとおり対角行列であるため、式(16)は一般化座標に関する n 本の独立な方程式となり、モード毎の解析が可能となる。

3. 既存の教科書における記述の比較

モード解析に関して著者がわかりにくいと感じた上記の二点に関して、種々の教科書でどのように説明されているか比較したものが表-1および表-2である。

まず「固有方程式の解である λ は必ず実数かつ正となるのか」という点について種々の教科書での記載内容をまとめたものが表-1である。この表からわかるように、多くの教科書ではこの点に言及されておらず、 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{K}$ の

表-1 「固有方程式の解である λ は必ず実数かつ正となるのか」という点に関する既存の教科書の記述（－は言及なし）

文献	記載内容
柴田 ¹⁾	－
片山他 ²⁾	－
土岐 ³⁾	－
土木学会編 ⁴⁾	－
長松 ⁵⁾	－
近藤 ⁶⁾	M は正値行列であり, K も安定なつり合い位置では正値行列である. したがって...」 p. 90
Chopra ⁷⁾	“This equation has N real and positive roots for ω_n^2 because m and k , the structural mass and stiffness matrices, are symmetric and positive definite” p. 407
Clough and Penzien ⁸⁾	－

表-2 「固有方程式が重根を持つ場合どうなるのか」という点に関する既存の教科書の記述

文献	記載内容
柴田 ¹⁾	「相異なる二つの固有振動について次の式が成り立つ」 p. 63 重根の場合については言及なし
片山他 ²⁾	「 $n \neq m$ で, かつ $\omega_n \neq \omega_m$ の場合には $\phi_n^T M \phi_m = 0$ が成り立つ」 p. 103 重根の場合については言及なし
土岐 ³⁾	重根の場合については言及なし
土木学会編 ⁴⁾	「 $\omega_m^2 - \omega_n^2 \neq 0 (m \neq n)$ の関係より次式が導かれる...」 p. 43 重根の場合については言及なし
長松 ⁵⁾	「一般には $\lambda_r \neq \lambda_l$ であるから...」 p. 424 重根の場合については言及なし
近藤 ⁶⁾	「 $\omega_i \neq \omega_j$ のとき...」 p. 91 重根の場合については言及なし
Chopra ⁷⁾	“If the frequency equation (10. 2. 4) has a j-fold multiple root (i. e., the system has one frequency repeated j times), it is always possible to find j modes associated with this frequency that satisfy Eq. (10. 4. 1)” p. 409.
Clough and Penzien ⁸⁾	“they <i>do not</i> apply to two modes having the same frequency” p. 212 “they”は“the orthogonality conditions”を表す 重根の場合については言及なし

対称性と正定値性から λ が実数かつ正となることを述べているのは著者の見た範囲¹⁾⁸⁾では近藤⁶⁾と Chopra⁷⁾だけである。また、 M と K が対称性と正定値性を有するとき λ が実数かつ正となる理由にまで踏み込んで説明しているのは近藤⁶⁾だけである。

一方「固有方程式が重根を持つ場合どうなるのか」という点について種々の教科書での記載内容をまとめたものが表-2 である。この表からわかるように、「固有方程式が重根を持つ場合でもモード解析はできる」という正しい結論を書いているのは著者の見た範囲¹⁾⁸⁾では Chopra⁷⁾だけであり、かつ、Chopra⁷⁾による説明も、それだけでわかるほど詳しく書かれているわけではない。

4. 望ましい記載内容

モード解析は地震工学においては基本的な事項であるため、一つの教科書あるいは教材の中で首尾一貫とした

説明がなされることが望ましいと考えられる。上記の分析を踏まえると、次のような一連の流れで説明することが望ましいと考えられる。

- まず K と M の対称性、正定値性について述べる。
- 柴田¹⁾に従い K から A への変換を行う。

$$A = M^{-1/2} K M^{-1/2}$$

- A の対称性、正定値性について述べる。
- 「実対称行列は直交行列により対角化可能である」という定理（付録A）を利用し A を対角化する。

$$U^T A U = \Lambda$$

- 「正定値行列の固有値はすべて正である」という定理（付録B）を利用し、 $\lambda_1 \sim \lambda_n$ (Λ の対角成分) はすべて正であることを述べる。 $\lambda_1 \sim \lambda_n$ の平方根を $\omega_1 \sim \omega_n$ とする。
- $\omega_1 \sim \omega_n$ の中に重複するものがあっても A の対角化は可能であることを述べる。
- モード行列 Φ を次式により定義する。

$$\Phi = M^{-1/2} U$$

h) 変位ベクトル $\mathbf{x}$ を一般化座標 $\mathbf{q}$ で表す.

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}$$

i) これを $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ に代入し次式を得る.

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Lambda \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}$$

以下, これらについて詳述する.

(1) $\mathbf{K}$ の対称性

離散的なシステムに対しては, $\mathbf{K}$ の対称性は作用・反作用の法則から説明するのが最もわかりやすいと考えられる. 一例として図-1 に示す 3 自由度系に対しては

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

であり, このうち 1 行目の赤色に着色した部分はバネ k_2 が質点 1 に及ぼす力, 2 行目の赤色に着色した部分はバネ k_2 が質点 2 に及ぼす力を表す. これらの力は作用・反作用の法則により大きさが等しく向きが反対でなければならないから, 赤色に着色した部分は対称となる. 同様のことはすべてのバネについて言えるので, $\mathbf{K}$ は全体として対称となる.

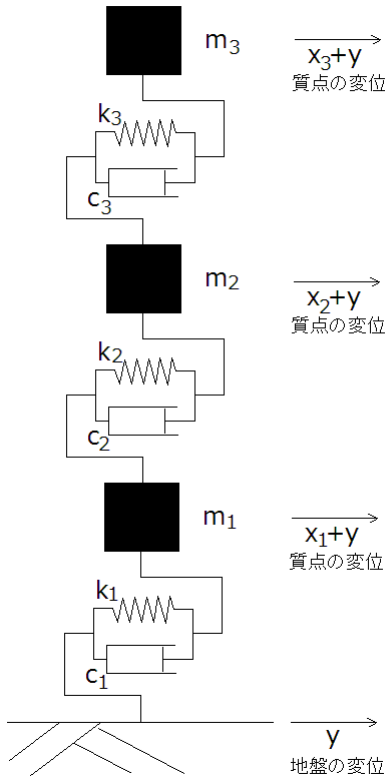


図-1 多自由度系の例

連続的なシステムを離散化して多自由度系の運動方程式を導く場合, $\mathbf{K}$ の形は離散化の方法によっても変わっ

てくるが, $\mathbf{K}$ が対称性を有するように離散化を行う場合が多い. 例えばはり要素の要素剛性マトリクスは一般には

$$k_{ij}^e = \int_0^L EI \psi''_i(\xi) \psi''_j(\xi) d\xi \quad (18)$$

のように対称となっており⁷⁾, これを重ね合わせて得られる $\mathbf{K}$ も全体として対称となる. なお式(18)において E はヤング率, I は断面二次モーメント, $\psi_i(\xi)$ は形状関数, $\psi''_i(\xi)$ はその ξ に関する二階微分, L ははり要素の長さである. 式(18)が対称となっているのは離散化の過程で同じ形状関数が繰り返し用いられている (Galerkin 法) からである. 前述の離散的なシステムに関する議論を踏まえれば, Galerkin 法は作用・反作用の法則を逸脱しない離散化の方法であると言える.

表-3 では $\mathbf{K}$ の対称性に関する既存の教科書での扱いを整理している. $\mathbf{K}$ の対称性について理由にまで踏み込んで説明しているのは著者の見た範囲¹⁸⁾では近藤⁶⁾と Clough and Penzien⁸⁾だけであった.

(2) $\mathbf{K}$ の正定値性

大きさが 0 でない任意の実ベクトル $\mathbf{x}$ に対し $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0$ となるとき $\mathbf{K}$ は正定値性を有するという. $\mathbf{K}$ の正定値性は次のように示すことができる. まず, 次式に示す通り $\mathbf{K}$ を複数のバネの寄与の重ね合わせで表現する.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \cdots + \mathbf{K}^p \quad (19)$$

ここに p はバネの総数である. 式(19)より

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{K}^1 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{x} + \cdots + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^p \mathbf{x} \quad (20)$$

である. さて, 図-1 に示すバネはタイプ A, タイプ B の二つに分けられる. タイプ A は二つの質点 i と j を結ぶもので, 対応する剛性マトリクス $\mathbf{K}^l$ は式(17)で赤色に着色した部分のようになり, これに対しては

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^l \mathbf{x} = k_l (x_i - x_j)^2 \quad (21)$$

となる (バネ定数を k_l とした). 一方, タイプ B は一つの質点 i と地盤を結ぶもので, 対応する剛性マトリクス $\mathbf{K}^m$ は式(17)で緑色に着色した部分のようになり, これに対しては

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^m \mathbf{x} = k_m x_i^2 \quad (22)$$

表-3 K の対称性, 正定値性に関する既存の教科書の記述

文献	K の対称性	K の正定値性
柴田 ¹⁾	○ p. 62	○ p. 62
片山他 ²⁾	○ p. 95	—
土岐 ³⁾	—	—
土木学会編 ⁴⁾	—	—
長松 ⁵⁾	○ p. 424	—
近藤 ⁶⁾	◎ p. 89	◎ 「行列 K が正値行列であるときに, つり合いは安定となる」 p. 87
Chopra ⁷⁾	○ p. 407	◎ “The positive definite property of k is assured for all structures supported in a way that prevents rigid-body motion” p. 407
Clough and Penzien ⁸⁾	◎ p. 179	—

◎ : 事実とその理由が述べられている ○ : 事実だけが述べられている — : 述べられていない

表-4 M の対称性, 正定値性に関する既存の教科書の記述

文献	M の対称性	M の正定値性
柴田 ¹⁾	○ p. 62	○ p. 62
片山他 ²⁾	○ p. 109	—
土岐 ³⁾	—	—
土木学会編 ⁴⁾	—	—
長松 ⁵⁾	○ p. 424	—
近藤 ⁶⁾	◎ p. 89	◎ p. 89
Chopra ⁷⁾	○ p. 407	◎ p. 407
Clough and Penzien ⁸⁾	◎ p. 187	—

◎ : 事実とその理由が述べられている ○ : 事実だけが述べられている — : 述べられていない

となる (バネ定数を k_m とした) . 式(21)(22)の右辺はいずれも 0 以上であるから, 式(20)の右辺も 0 以上すなわち

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0 \quad (23)$$

であることが先ずわかる. そして, 等号が成立するのはタイプ A のすべてのバネに対して $x_i = x_j$ となり, かつタイプ B のすべてのバネに対して $x_i = 0$ となる場合であるが, すべての質点が直接・間接にバネで地盤に結ばれていると仮定すると, この条件は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となることと同じである. いま $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ としているのでこの条件は成立しない. よって, すべての質点が直接・間接にバネで地盤に結ばれているとき

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \quad (24)$$

すなわち $\mathbf{K}$ は正定値性を有する. なお, 同様の議論を適用すると, すべての質点が直接・間接にダッシュポットで地盤に結ばれているとき, 減衰マトリクス $\mathbf{C}$ は正定値

性を有することも示すことができる.

表-3 では $\mathbf{K}$ の正定値性に関する既存の教科書での扱いを整理している. $\mathbf{K}$ の正定値性について理由にまで踏み込んで説明しているのは著者の見た範囲¹⁾⁸⁾では近藤⁶⁾とChopra⁷⁾だけであった.

(3) M の対称性

図-1 に示すような離散的なシステムに対しては $\mathbf{M}$ は対角行列となるので明らかに対称性を有する. 連続的なシステムを離散化して多自由度系の運動方程式を導く場合, $\mathbf{M}$ の形は離散化の方法によっても変わってくるが, $\mathbf{M}$ が対称性を有するように離散化を行う場合が多い. 例えばはり要素の整合質量マトリクスは一般には

$$m_{ij}^e = \int_0^L \rho A \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi \quad (25)$$

のように対称となっており⁷⁾, これを重ね合わせて得られる $\mathbf{M}$ も全体として対称となる. なお式(25)において ρ

は密度、 A は断面積である。

表-4 では M の対称性に関する既存の教科書での扱いを整理している。 M の対称性について理由にまで踏み込んで説明しているのは著者の見た範囲¹⁾⁸⁾では近藤⁹⁾と Clough and Penzien⁸⁾だけであった。近藤⁹⁾による説明は離散的なシステムに関するもの、Clough and Penzien⁸⁾による説明はより要素に関するものである。

(4) M の正定値性

M が正定値性を有することを簡単に示す方法として次のような方法が考えられる。与えられた M を有する多自由度系に対し、ダッシュポットを付加し、すべての質点がダッシュポットで直接・間接に地盤に結ばれている状態とする。この多自由度系が自由振動を行う場合の運動方程式は

$$M\ddot{x} + Kx = -C\dot{x} \quad (26)$$

であり、左から $\dot{x}^T$ を乗じると

$$\dot{x}^T M \ddot{x} + \dot{x}^T K x = -\dot{x}^T C \dot{x} \quad (27)$$

となるが、 M と K が対称行列であることを踏まえると、この式は

$$\frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T M \ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T K x + \frac{1}{2}\dot{x}^T K \dot{x} = -\dot{x}^T C \dot{x} \quad (28)$$

すなわち

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T K x \right) = -\dot{x}^T C \dot{x} \quad (29)$$

となる。ここで系が $t = 0$ で初期条件 $x = 0$ かつ $\dot{x} = \dot{x}_0$ で自由振動を開始し、減衰の影響で最終的に停止したとする。この間、式(29)右边は C の正定値性により常に負であり、式(29)左辺 () 内の最終的な値は 0 であるから、式(29)左辺 () 内の $t = 0$ での値は正でなければならない。 $t = 0$ において式(29)左辺 () 内の第 2 項は 0 であるから、第 1 項は正でなければならない。このことは大きさが 0 でないどのようなベクトル $\dot{x}_0$ に対しても言えるから、 M は正定値性を有する。

表-4 では M の正定値性に関する既存の教科書での扱いを整理している。 M の正定値性について理由にまで踏み込んで説明しているのは著者の見た範囲¹⁾⁸⁾では近藤⁹⁾と Chopra⁷⁾だけであった。

(5) K から A への変換¹⁾

柴田¹⁾に従い K から A への変換を行う。まず $M^{1/2}$ と $M^{-1/2}$ を求める。 M が対角行列の場合は

$$M^{1/2} = \begin{bmatrix} m_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{1/2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$M^{-1/2} = \begin{bmatrix} m_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

とすれば良い。 M が対角行列でない場合は、「実対称行列は直交行列により対角化可能である」という性質（付録 A 参照）を利用し、実対称行列である M を次式の通り対角化する。

$$W^T M W = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

ここに W は直交行列、 $p_1 \sim p_n$ は M の固有値である（付録 A 参照）。 M は正定値行列であるから、 M の固有値である $p_1 \sim p_n$ はすべて正である（付録 B 参照）。したがって、 $M^{1/2}$ と $M^{-1/2}$ は次式で与えられる。

$$M^{1/2} = W \begin{bmatrix} p_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^{1/2} \end{bmatrix} W^T \quad (33)$$

$$M^{-1/2} = W \begin{bmatrix} p_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^{-1/2} \end{bmatrix} W^T \quad (34)$$

実際に式(32)の対角化を行うには Jacobi 法などの方法を用いればよい。ここで得られた $M^{1/2}$ と $M^{-1/2}$ は実対称行列である。

次に次式により行列 A を定義する。

$$A = M^{-1/2} K M^{-1/2} \quad (35)$$

K と $M^{-1/2}$ が実対称行列であることから、 A も実対称行列である。また、 A は正定値行列である。これは次のように示すことができる。大きさが 0 でない任意の実ベクトル x に対し

$$x^T A x = x^T M^{-1/2} K M^{-1/2} x \quad (36)$$

である。ここで

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{x} \quad (37)$$

とおくと

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (38)$$

となる． $\mathbf{K}$ は正定値行列であり， $\mathbf{y}$ は大きさが 0 でない実ベクトルであるから，式(38)の右辺は正である．よって $\mathbf{A}$ は正定値行列である．

(6) $\mathbf{A}$ の対角化

「実対称行列は直交行列により対角化可能である」という性質（付録 A 参照）を利用し，実対称行列である $\mathbf{A}$ を次式の通り対角化する．

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (39)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (40)$$

ここに $\mathbf{U}$ は直交行列， $\lambda_1 \sim \lambda_n$ は $\mathbf{A}$ の固有値である（付録 A 参照）． $\mathbf{A}$ は正定値行列であるから， $\mathbf{A}$ の固有値である $\lambda_1 \sim \lambda_n$ はすべて正である（付録 B 参照）．そこで，これらの平方根を $\omega_1 \sim \omega_n$ とする．これらは固有円振動数と呼ばれる．これらを用いると

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Omega}^2 \quad (41)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{bmatrix} \quad (42)$$

となる． $\omega_1 \sim \omega_n$ の中に重複するものがあつたとしてもこのような対角化は可能である．実際に対角化を行うには Jacobi 法などの方法を用いればよい．

(7) モード行列と一般化座標の導入

ここから先の説明は従来と同様である．

まず，モード行列 Φ を

$$\Phi = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{U} \quad (43)$$

により定義する（式(15)の Φ と少し定義が異なる）．式(43)より

$$\Phi^T = \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{-1/2} \quad (44)$$

である．ここで式(1)に戻り，変位ベクトル $\mathbf{x}$ を一般化座標 $\mathbf{q}$ で表す．

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (45)$$

これを式(1)に代入すると

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (46)$$

となり，左から Φ^T を乗じると

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (47)$$

となる．ここで式(35)(41)(43)(44)を用いれば式(47)は

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (48)$$

となる．左辺の係数行列が対角行列となるため，式(48)は一般化座標に関する n 本の独立な方程式となり，モード毎の解析が可能となる．

5. まとめ

モード解析は地震工学において基本的な事項の一つであるが，最近の著者の経験からすると，一冊の教科書で一通りの理解に至ることができる状況にはない．本稿では，モード解析の一連の流れのうち特にわかりにくい点について，既存の教科書における記載内容を整理し，改善策を検討した．

モード解析の一連の流れのうち特にわかりにくい点として次の二点が指摘できる，

- 1) 固有方程式の解である λ は必ず実数かつ正となるのか
- 2) 固有方程式が重根を持つ場合どうなるのか

1)については「 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{K}$ の対称性と正定値性から λ は常に正の実数であり， ω も正の実数とすることができる」が正しい結論であるが（非減衰の場合），このことを述べているのは著者の見た範囲では近藤⁹⁾と Chopra⁷⁾だけであつた．また， $\mathbf{M}$ と $\mathbf{K}$ が対称性と正定値性を有するとき λ が実数かつ正となる理由にまで踏み込んで説明しているのは近藤⁹⁾だけであつた．

2)については「固有方程式が重根を持つ場合でもモード解析はできる」が正しい結論であるが，このことをきちんと書いているのは Chopra⁷⁾だけであり，かつ，Chopra⁷⁾による説明も，それだけでわかるほど詳しく書かれているわけではなかつた．

これらの分析結果を踏まえ，記載内容の改善策を検討した．こうした検討は，将来，我々が地震工学の専門家として，より良い教科書や教材を作ることに役立つと考えられる．

付録 A 実対称行列の直交行列による対角化⁹⁾

本文の記載内容において決定的に重要なのは「実対称行列は直交行列により対角化可能である」という定理である。特に、行列の固有値の中に重複するものがあるかどうかに関わらず対角化が可能であるという点が重要である。その重要性を考慮し、以下に証明を記載する。

まず直交行列の定義を確認する。 $n \times n$ の実正方行列 U が以下のいずれかの条件を満足するとき U を直交行列という。

$$1) U^T = U^{-1}$$

2) U の n 本の列ベクトルが正規直交基底をなす

3) U の n 本の行ベクトルが正規直交基底をなす

1)~3)の条件はすべて同値である。これは次のようにして示すことができる。1)は $U^T U = I$ と同値であり (I は単位行列)，これを成分で書けば

$$U_{ki}U_{kj} = \delta_{ij} \quad (A1)$$

となる。ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、添え字には総和規約を適用する。式(A1)は U の第 i 列と第 j 列の列ベクトルの内積が δ_{ij} であることを示している。すなわち 1)と 2)の条件は同値である。同様に 1)は $U U^T = I$ と同値であり、これを成分で書けば

$$U_{ik}U_{jk} = \delta_{ij} \quad (A2)$$

となる。式(A2)は U の第 i 行と第 j 行の行ベクトルの内積が δ_{ij} であることを示している。すなわち 1)と 3)の条件は同値である。

$n \times n$ の実対称行列は直交行列により対角化可能である。すなわち、実対称行列を A とするとき、

$$U^T A U = \Lambda \quad (A3)$$

となるような直交行列 U と対角行列 Λ が存在する。これは次のように帰納法で示すことができる⁹⁾。

まず、 $n = 1$ のとき、どのような実対称行列でも直交行列 $U = 1$ により対角化可能である。

次に、 $n = k - 1$ のとき実対称行列が直交行列により対角化可能であることを仮定し、 $n = k$ のときにも実対称行列が直交行列により対角化可能であることを示す。 $k \times k$ の実対称行列 A の固有値の一つを λ_1 、大きさ 1 の固有ベクトルを r_1 とする。すなわち

$$A r_1 = \lambda_1 r_1 \quad (A4)$$

である。ここで、 r_1 を含むような正規直交基底

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ を設定する。このような正規直交基底は必ず設定することができる。その理由は次の通りである。 k 次のベクトル空間 V の基底を $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ とする。 r_1 はこれらの線形結合として

$$r_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k \quad (A5)$$

のように表される。いま r_1 の大きさはゼロではないので、 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ のどれかはゼロでないはずである。そこで仮に c_1 がゼロでないとし、 v_1 を r_1 で置き換えた $r_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ が線形独立であることを示す。いま係数 $d_i (i = 1, 2, \dots, k)$ が

$$d_1 r_1 + d_2 v_2 + \dots + d_k v_k = 0 \quad (A6)$$

を満たすと仮定する。式(A5)を式(A6)に代入すると

$$c_1 d_1 v_1 + (d_2 + c_2 d_1) v_2 + \dots + (d_k + c_k d_1) v_k = 0 \quad (A7)$$

となるが、 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ は線形独立であるから係数はすべてゼロ、すなわち

$$\begin{aligned} c_1 d_1 &= 0 \\ d_2 + c_2 d_1 &= 0 \\ &\dots \\ d_k + c_k d_1 &= 0 \end{aligned}$$

である。これより

$$d_1 = d_2 = \dots = d_k = 0 \quad (A8)$$

が得られる。式(A6)を満たす d_i がすべてゼロとなることがわかったので、 $r_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ は線形独立である。以上により、 r_1 を含む k 本の線形独立なベクトルを設定できることがわかった。次に、 $r_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ にグラム・シュミットの直交化法¹⁰⁾を適用する。すなわち $r_j (j = 2, \dots, k)$ を次式で定義する。

$$r_j = (v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (r_i \cdot v_j) r_i) / \|v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (r_i \cdot v_j) r_i\| \quad (A9)$$

ここに $\cdot$ はベクトルの内積を、 $\| \cdot \|$ はベクトルの大きさを表す。 $r_j (j = 2, \dots, k)$ の大きさが 1 であることは明らかである。また、 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ が互いに直交するベクトルであることは次のように帰納法で示すことができる。まず $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{j-1}$ が互いに直交するベクトルである

とする．このとき $\mathbf{r}_j$ と $\mathbf{r}_l(l = 1, \dots, j-1)$ の内積をとれば

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_l &= \\ (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_l)) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \delta_{il}) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{v}_j) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_j$ は互いに直交するベクトルである．よって $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ は互いに直交するベクトルである．以上により， $\mathbf{r}_1$ を含む正規直交基底 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ を設定できることが確認された．

そこで， $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ を並べた行列を $\mathbf{R}$ とする． $\mathbf{R}$ は列ベクトルが正規直交基底をなす行列であるから直交行列である．ここで基本ベクトル $\mathbf{e}_1$ を $\mathbf{e}_1^T = (1, 0, 0, \dots, 0)$ で定義すると $\mathbf{R}$ の定義により

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \quad (\text{A10})$$

である．これを式(A4)に代入すると

$$\mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \quad (\text{A11})$$

であり，左から $\mathbf{R}^T$ をかけると

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad (\text{A12})$$

となる（ $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ なので）．式(A12)は基本ベクトル $\mathbf{e}_1$ が $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ の固有値 λ_1 の固有ベクトルであることを示している．このことから， $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ は次のような形の行列でなければならないことがわかる．

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

一方， $\mathbf{A}$ は対称行列であるから， $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ も対称行列である．したがって $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ の形はより限定され，

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (\text{A14})$$

のような形でなければならないことがわかる．上の行列で

$$\begin{bmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{bmatrix}$$

の部分は $(k-1) \times (k-1)$ の実対称行列であり，これを $\mathbf{A}_{k-1}$ と書くことにすれば

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A15})$$

である．さて，仮定により $(k-1) \times (k-1)$ の実対称行列は対角化可能である．すなわち

$$\mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \quad (\text{A16})$$

となるような直交行列 $\mathbf{R}_{k-1}$ と対角行列 $\mathbf{A}_{k-1}$ が存在する．そこでこの $\mathbf{R}_{k-1}$ を用いて $\overline{\mathbf{R}}_k$ を

$$\overline{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A17})$$

で定義すると，

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_k^T \overline{\mathbf{R}}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

が成立するので $\overline{\mathbf{R}}_k$ は直交行列である．これを用いると，

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \overline{\mathbf{R}}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

となる．そこで

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \overline{\mathbf{R}}_k \quad (\text{A20})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A21})$$

とおけば

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A3})\text{再掲}$$

となる。 $\mathbf{U}$ は直交行列同士の積なので直交行列である。よって $k \times k$ の実対称行列は対角化可能である。以上により帰納法により実対称行列は直交行列により対角化可能であることが示された。

さて、式(A3)を変形すると

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A22})$$

となり、 j 列目の式に着目すれば

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \quad (\text{A23})$$

となる。ここに $\mathbf{u}_j$ は $\mathbf{U}$ の j 本目の列ベクトル、 λ_j は $\mathbf{\Lambda}$ の j 番目の対角項である。式(A23)より、 $\mathbf{\Lambda}$ の対角項（すなわち $\mathbf{\Lambda}$ の固有値）は $\mathbf{A}$ の固有値であること、 $\mathbf{U}$ の各列が対応する固有ベクトルであることがわかる。逆に $\mathbf{\Lambda}$ の対角項以外に $\mathbf{A}$ の固有値は存在しないことも以下のように示される。 $\mathbf{A}$ の任意の固有値を λ 、対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすれば

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\text{A24})$$

であるが、

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (\text{A25})$$

により $\mathbf{y}$ を定義すれば

$$\mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (\text{A26})$$

であり、左から $\mathbf{U}^T$ をかけると

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (\text{A27})$$

となる。したがって $\mathbf{A}$ の任意の固有値は必ず $\mathbf{\Lambda}$ の固有値（ $\mathbf{\Lambda}$ の対角項）となっている。実対称行列の固有値がすべて実数であることも以上のことからわかる。

以上より、行列 $\mathbf{A}$ の固有値の中に重複するものがあるかどうかに関わらず、式(A3)の対角化が可能であることがわかった。

付録B 正定値行列と固有値

$n \times n$ の実対称行列 $\mathbf{A}$ が以下のいずれかの条件を満足するとき $\mathbf{A}$ を正定値行列という。

1) 大きさが 0 でない任意の実ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$

2) $\mathbf{A}$ の固有値がすべて正

1)2)の条件は同値である。これは次のようにして示すことができる。

まず 1)が成立するとき、 $\mathbf{A}$ の任意の固有値を λ 、対応する固有ベクトル（大きさを1とする）を $\mathbf{u}$ とすれば

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (\text{B1})$$

であり、左から $\mathbf{u}^T$ をかけると

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \lambda \quad (\text{B2})$$

であるが、1)の条件より $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} > 0$ であるから $\lambda > 0$ である。

次に 2)が成立するとき、 $\mathbf{A}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 、固有ベクトル（大きさ1）を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ とすると、大きさが0でない任意の実ベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ の線形結合で

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n \quad (\text{B3})$$

と表すことができる。これより、固有ベクトルの直交性（付録A）を考慮すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n)^T \mathbf{A} (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) \\ &= (c_1 \mathbf{u}_1^T + c_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + c_n \mathbf{u}_n^T) (\lambda_1 c_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n c_n \mathbf{u}_n) \\ &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

となるが、2)の条件より $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ はすべて正であり、かつ、 $\mathbf{x}$ の大きさが0でないという条件から $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ のいずれかは0でないため $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ である。

以上のことから「正定値行列の固有値はすべて正である」と言える。

参考文献

- 1) 柴田明徳：最新 耐震構造解析，第2版，森北出版，2003。
- 2) 片山恒雄・宮田利雄・国井隆弘：構造物の振動解析，

- 新体系土木工学 10, 技報堂出版, 1979.
- 3) 土岐憲三: 構造物の耐震解析, 新体系土木工学 11, 技報堂出版, 1981.
 - 4) 土木学会編: 動的解析の方法, 動的解析と耐震設計 第2巻, 技報堂出版, 1989.
 - 5) 長松明男: モード解析入門, コロナ社, 1993.
 - 6) 近藤恭平: 工学基礎 振動論, 培風館, 1993.
 - 7) Chopra, A. K.: *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*, Fourth Edition, Prentice Hall, 2012.
 - 8) Clough, R.W. and Penzien, J.P.: *Dynamics of structures*, Third Edition, Computers and Structures, Inc., 2003.
 - 9) 理数アラカルト: 実対称行列の 4 つの大切な性質, <https://risalc.info/src/real-symmetric-matrix.html>.
 - 10) 理数アラカルト: グラム・シュミットの直交化法, <https://risalc.info/src/Gram-Schmidt.html>.

DESCRIPTIONS IN EXISTING TEXTBOOKS ON MODAL ANALYSIS AND POSSIBLE MEASURES FOR IMPROVEMENT

Atsushi NOZU

Modal analysis is one of the key concepts in earthquake engineering. According to the author's latest experience, the descriptions in existing textbooks on modal analysis are not necessarily complete and do not give comprehensive understanding of the concept. In this article, the descriptions in existing textbooks are analysed and possible measures for improvement are discussed, especially focusing on two points: 1) Is the solution λ of the characteristic equation is always real and positive? 2) Is modal analysis applicable when the characteristic equation results in repeated eigenvalues? In terms of the former point, the answer could be described as "the solution λ of the characteristic equation is always real and positive because the mass matrix and the stiffness matrix are symmetric and positive definite," however, the author could find only two text books that involve this conclusion, namely, Kondoh (1993) and Chopra (2012). Detailed explanations were only included in Kondoh (1993). In terms of the latter point, the answer could be described as "modal analysis is applicable even when the characteristic equation results in repeated eigenvalues," however, the author could find only one text book that addresses this issue, namely, Chopra (2012). In addition, Chopra's (2012) description does not involve detailed equations. Based on these observations, the author proposed possible measures for improving the descriptions on modal analysis with the aim of providing more comprehensive explanations on the subject for students and engineers.