交点クランプで連結された2本のケーブルの張力推定手法の提案

山田　哲[1]・古川　愛子[2]・小林　亮介[3]

[1]学生会員　京都大学大学院学生　工学研究科都市社会工学専攻（〒615-8540 京都市西京区京都大学桂）
E-mail: yamada.satoshi.44n@st.kyoto-u.ac.jp

[2]正会員　京都大学大学院准教授　工学研究科都市社会工学専攻（〒615-8540 京都市西京区京都大学桂）
E-mail: furukawa.aiko.3w@kyoto-u.ac.jp

[3]非会員　神鋼鋼線工業株式会社　尼崎事業所（〒660-0091 兵庫県尼崎市中浜町10番地1）
E-mail: kobayashi.ryosuke@shinko-wire.co.jp

ニールセンローゼ橋の斜材ケーブルは，風による振動で接触することによる騒音や損傷を防ぐため交点クランプにて連結されている．維持管理のためケーブル張力を把握する必要がある．実務では，交点クランプを取り外した上で，個々のケーブルに対して単一ケーブルの張力推定手法を適用し，クランプの再取り付けを行う．クランプを取り外さずに張力を推定できれば点検業務の効率化になる．本研究ではクランプで連結された 2 本のケーブルの張力を固有振動数から推定する手法を提案する．2 本のケーブルが構成する面に対して面外，面内方向の固有振動数それぞれを用いる 2 通りの手法を提案する．提案手法の有用性は数値実験と模型実験により検証した．面外方向の固有振動数を用いた手法の方が張力推定精度が高く，模型実験における最大誤差は 10%であった．

Key Words: *cable, intersection clamp, tension estimation, natural frequency, Nielsen-Lohse bridge*

1.　はじめに

斜張橋をはじめとするケーブル構造物は，ケーブルの張力で荷重を支える構造をしている．ケーブルそれぞれに耐荷重が設定されているため，維持管理では張力を計測し，張力が耐荷重を上回っていないことを確認する必要である．張力を計測する方法として，ロードセルや油圧ジャッキを使用して張力を直接測定する方法や，ハンマー等でケーブルに衝撃力を与えて得られた振動波形より求めた固有振動数から張力を間接的に推定する方法がある．斜張橋やエクストラドーズド橋などの単一ケーブルの張力推定実務では，少ない労力で精度良く張力を推定できる後者の方法が採用されている．

我が国における単一ケーブルの張力推定実務では，新家ら [1)]の振動法と山極ら [2)]の高次振動法が主に採用されている．新家ら [1)]は，ケーブルを弦でモデル化し，弦の固有振動数は張力の平方根とモード次数の積に比例することから，単一モードの固有振動数から張力を推定する式を提案している．ただし，実際のケーブルは完全な弦ではなく曲げ剛性が無視できないことから，曲げ剛性の影響を考慮に入れた補正式を提案している．このように，新家らの振動法では事前に曲げ剛性の値を把握する必要があるが，実際問題として困難な場合も多い．この問題を解決したのが山極ら [2)]の高次振動法である．山極らは，ケーブルを張力のかかった梁とモデル化し，ピン支持または剛結の境界条件のもとで振動方程式を解き，各モードの固有振動数を張力と曲げ剛性を用いて表す理論式を導出している．したがって，2 つ以上のモードの固有振動数を計測すれば，最小二乗法を適用して張力と曲げ剛性を同時推定することが可能となる．この方法では，曲げ剛性は未知数と見なされ張力と同時に推定されるため，事前に値を把握する必要がない．

上記の張力推定手法の他には，モードシェープを用いた張力推定手法 [3)]，複雑な境界条件を持つケーブルの張力推定手法 [4),5)]，傾斜したケーブルの張力推定手法 [6)]，ニューラルネットワークを用いた張力推定手法 [7)]など，研

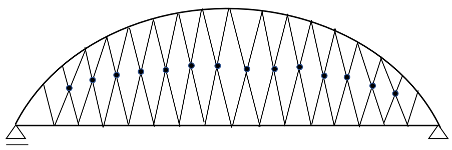


図-1　ニールセンローゼ橋の概略図

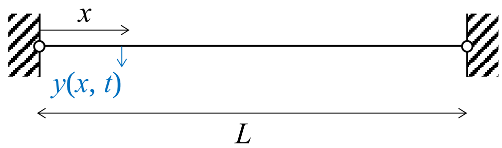


図-2　ケーブル単体モデル

究レベルで様々な張力推定手法が提案されている．しかしいずれも単一ケーブルの張力推定に関する研究である．

本研究は，交点クランプで連結された2本のケーブルの張力を固有振動数から同時推定する手法の提案を目的としている．具体的には，**図-1**に示すニールセンローゼ橋[8),9),10)]における交点クランプで連結された2本の斜材ケーブルの張力を，交点クランプを取り外すことなく推定する手法を提案する．ニールセンローゼ橋はアーチ橋の一種で，アーチ部材から吊り降ろされた斜材ケーブルにて補剛桁を弾性支持する構造形式を有する．斜材ケーブルは互いに交差しており，風による振動で接触することによる騒音や損傷を防止するために，交点クランプにて連結されている．2本のケーブルは交点クランプ位置において変位は同じであるが，回転は拘束されていない．

ニールセンローゼ橋のケーブル張力推定実務では一般に，交点クランプを取り外してケーブルが単一ケーブルとして振動するようにした上で，前述の新家らの振動法[1)]や山極らの高次振動法[2)]が用いられることが多い．しかし，交点クランプは桁から高い位置に設置されていることも多く，交点クランプの取り外しと再取り付けの作業には高所作業車や交通規制が必要となり，時間も労力もかかる．交点クランプを取り外すことなく張力を推定することが可能となれば，点検業務の効率化につながる．

ニールセンローゼ橋の張力推定手法に関する既往研究はほとんど例がない．栗山ら[11)]は，交点クランプ位置から片方の端部までのケーブルを単一ケーブルとみなし，交点クランプを取り付けたまま高次振動法を適用する手法を提案している．しかし実際は，交点クランプは固定されておらず，連結されたケーブルは一体となって振動するため，交点クランプを取り外さない限りケーブル1本ずつの張力推定は理論的に不可能である．交点クランプと連結されたケーブルを一体として考える必要があるが，このような張力推定手法は未だに研究されておらず，本研究が初めての取り組みである．

本研究では，高次振動法と同様にケーブルを張力のかかった梁とみなし，複数モードの固有振動数から2本のケーブル張力を同時推定する手法を提案する．2本のケーブルで構成される平面に対して，面外方向に振動した場合と面内方向に振動した場合とで固有振動数が異なることから，面外・面内それぞれの方向の固有振動数を用いた張力推定手法を提案する．有限要素法を用いた数値実験と模型実験によって提案手法の有効性を検証する．

2.　高次振動法[2)]

(1)　概説

本研究の提案手法は，ケーブルを張力のかかったオイラー・ベルヌーイ梁とモデル化した高次振動法を基にしているため，本節では高次振動法について説明する．

(2)　高次振動法[2)]

a)　張力のかかった梁の固有振動数の算定式の導出

ケーブルを張力のかかったオイラー・ベルヌーイ梁とみなすと，振動方程式は次式で表される．

$$\rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

ここに，$y(x,t)$ は時間 t におけるケーブル位置 x のたわみ（軸直角方向変位）である．ρ は密度，A は断面積，EI は曲げ剛性，T は張力（引張を正）であり，ケーブル位置によらず一定とする．

たわみ$y(x,t)$を次式のように変数分離する．

$$y(x,t)=Y(x)\exp(j\omega t) \tag{2}$$

ここで，$Y(x)$はモード関数，jは虚数単位，ωは円振動数である．式(2)を式(1)に代入すると，$Y(x)$に関する常微分方程式が得られる．

$$-\rho A\omega^2 Y(x)+EI\frac{d^4Y(x)}{dx^4}-T\frac{d^2Y(x)}{dx^2}=0 \tag{3}$$

これを解くと，モード関数$Y(x)$の一般解が得られる．

$$Y(x)=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x+C_3\cosh\beta x+C_4\sinh\beta x \tag{4}$$

ここで，C_1,C_2,C_3,C_4 は積分定数であり，α，βは，

$$\alpha=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2+\frac{\rho A\omega^2}{EI}}-\frac{T}{2EI}} \tag{5}$$

$$\beta=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2+\frac{\rho A\omega^2}{EI}}+\frac{T}{2EI}} \tag{6}$$

である．

高次振動法[2)]は，単一ケーブルの張力推定手法であり，ケーブル両端がピン支持の場合と剛結の場合の2通りの式が提案されているが，本研究では**図-2**に示すピン支持の場合の定式化について述べる．ケーブル両端がピン支持と仮定すると，式(7)～(10)の境界条件が成立する．

$$Y(0) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2Y(0)}{dx^2} = 0 \tag{8}$$

$$Y(L) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d^2Y(L)}{dx^2} = 0 \tag{10}$$

4 つの積分定数に対して，4 つの境界条件式を構築することができたので，式(7)～(10)を式(4)に代入する．モード関数$Y(x)$が 0 とならない解，すなわち全ての積分定数が同時に 0 とならない解が存在するには，次式が成立する必要がある．

$$\sin\alpha L = 0 \tag{11}$$

三角関数の性質より，式(11)を満たす固有振動数f_iは多数存在し，iを正の整数として，

$$\sin\alpha^i L = 0 \tag{12}$$

$$\alpha^i L = i\pi \tag{13}$$

$$\alpha^i = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho A (2\pi f_i)^2}{EI}} - \frac{T}{2EI}} \tag{14}$$

と表される．式(13)を満たすα^iを式(14)に代入したときに得られるf_iが固有振動数である．式(13)(14)を整理すると，i次モードの固有振動数f_iに関する次式が導かれる．

$$f_i^2 = \frac{\pi^2 EI}{4\rho A L^4} i^4 + \frac{T}{4\rho A L^2} i^2 \tag{15}$$

このように，固有振動数は曲げ剛性と張力の関数であり，第 1 項が曲げ剛性EIに関する項，第 2 項が張力Tに関する項である．曲げ剛性EIにはモード次数iの 4 乗が掛かるのに対し，張力Tにはモード次数iの 2 乗が掛かるので，高次モードになるほど曲げ剛性が固有振動数に及ぼす影響が大きくなることがわかる．

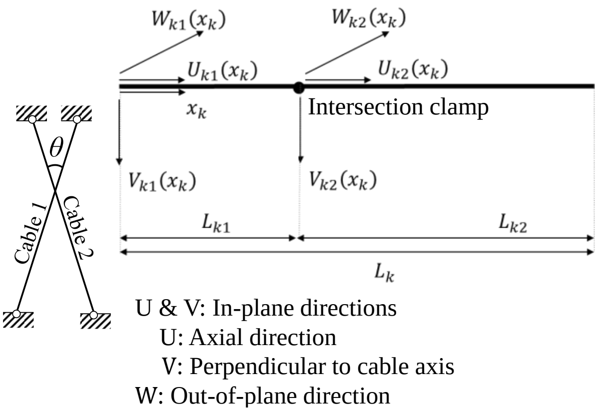
b) 張力推定手法

高次振動法では，次の最適化問題を解くことによって曲げ剛性EIと張力Tを推定する．

$$minimize\ F(T, EI) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi^2 EI}{4\rho A L^4} i^4 + \frac{T}{4\rho A L^2} i^2 - f_i^2 \right)^2 \tag{16}$$

上式において，ケーブル単位長さ当たりの質量ρA（密度ρ，断面積A）とケーブル長さLは設計図から既知であるとし，固有振動数f_iとそのモード次数iは計測によって得られるとする．nは推定に用いる固有振動数の最高次数である．加速度センサーをケーブルに設置し，ハンマー等でケーブルに衝撃力を与え，応答を加速度センサで計測し，加速度波形をフーリエ変換することによってケーブルの固有振動数を読み取ることができる．未知数は曲げ剛性EIと張力Tの 2 つであり，2 つ以上の固有振動数とモード次数のペアが計測で得られれば，最小二乗法により曲げ剛性EIと張力Tが推定される．

張力推定に用いる固有振動数の数は，多ければ多いほど望ましいというわけではない．式(15)から明らかなように，モード次数iが大きくなるほど曲げ剛性EIに関する第 1 項の影響が大きくなり，相対的に張力の推定精度が落ちることが確認されており，先行研究では 5 次モードまでの固有振動数を用いて張力推定することが奨励されている [2]．なお，亜鉛メッキマルチケーブルを使用した検証実験では，高次振動法による張力推定誤差は 5%以内であることが確認されている [12]．



(a)ケーブルモデル　(b)要素座標系の座標軸と変位の方向

図-3　連結された 2 本のケーブルモデル

3. 提案する張力推定手法

(1) 座標軸と変位の方向の定義

本節では，図-3(a)に示す交点クランプによって連結された 2 本のケーブルの張力推定手法を提案する．2 本のケーブルの両端はピン支持と仮定する． 2 本のケーブルを含む平面があると仮定すると，ケーブルの振動は，その平面に垂直な方向（面外方向）への振動と，その平面内（面内方向）の振動とに分けて考えることができる．したがって，面外方向の固有振動数を用いた張力推定手法と，面内方向の固有振動数の固有振動数を用いた張力推定手法の 2 手法を提案する．現場の制約条件により，面外方向の固有振動数を計測できない可能性があるため，面内方向の手法も提案することとした．

2 本のケーブルそれぞれにケーブル番号k $(k = 1,2)$ を付ける．図-3(b)のようにケーブルkの要素座標系を考え，ケーブル軸をx_k軸とし，右向きをx_k軸の正方向とする．左端から交点クランプ設置位置までの長さをL_{k1}，交点クランプ設置位置から右端までの長さをL_{k2}とすると，ケーブル長L_kは$L_k = L_{k1} + L_{k2}$となる．

ケーブルの変位のうち，面外方向変位のインデックスをwとする．面内方向変位は，軸方向変位と軸直角方向変位とに分解でき，それぞれのインデックスをu，vとする．w，u，vそれぞれの方向への変位のうち，L_{k1}側の変位をw_{k1}，u_{k1}，v_{k1}とし，L_{k2}側の変位をw_{k2}，u_{k2}，v_{k2}とする．したがって，交点クランプより左側と右側を表すインデックスとしてm ($m=1,2$) を考えると，ケーブルkのm側の変位は，ケーブル座標x_kと時間tの関数として，次のように変数分離される．

$$w_{km}(x_k,t) = W_{km}(x_k)\exp(j\omega t) \tag{17}$$

$$u_{km}(x_k,t) = U_{km}(x_k)\exp(j\omega t) \tag{18}$$

$$v_{km}(x_k,t) = V_{km}(x_k)\exp(j\omega t) \tag{19}$$

(2) 面外方向の固有振動数を用いた張力推定手法

a) 面外方向の固有振動数が満たすべき制約式の導出

ケーブルkを張力のかかったオイラー・ベルヌーイ梁とみなすと，面外方向の振動方程式は次式で表される，

$$\rho_k A_k \frac{\partial^2 w_{km}(x_k,t)}{\partial t^2} + E_k I_k \frac{\partial^4 w_{km}(x_k,t)}{\partial x_k^4} - T_k \frac{\partial^2 w_{km}(x_k,t)}{\partial x_k^2} = 0 \tag{20}$$

ここに，$w_{km}(x_k,t)$は時間tにおけるケーブル位置x_kの面外方向変位（たわみ）である．ρ_kは密度，A_kは断面積，E_kはヤング率，I_kは断面2次モーメント，$E_k I_k$は曲げ剛性，T_kは張力（引張を正）であり，下付きのインデックスkはケーブル番号を示す．これらの値はケーブル位置によらず一定とするが，ケーブル毎に独立の変数と考える．

式(17)を式(20)に代入すると，面外方向変位（たわみ）のモード関数$W_{km}(x_k)$の一般解が得られる．

$$\begin{aligned} W_{k1}(x_k) &= C_{k1}\cos\alpha_k x_k + C_{k2}\sin\alpha_k x_k \\ &\quad + C_{k3}\cosh\beta_k x_k + C_{k4}\sinh\beta_k x_k \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} W_{k2}(x_k) &= D_{k1}\cos\alpha_k(x_k - L_{k1}) \\ &\quad + D_{k2}\sin\alpha_k(x_k - L_{k1}) \\ &\quad + D_{k3}\cosh\beta_k(x_k - L_{k1}) \\ &\quad + D_{k4}\sinh\beta_k(x_k - L_{k1}) \end{aligned} \tag{22}$$

ここで，$C_{k1},C_{k2},C_{k3},C_{k4},D_{k1},D_{k2},D_{k3},D_{k4}$は積分定数であり，$\alpha_k$，$\beta_k$は次式の通りである．

$$\alpha_k = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T_k}{2E_kI_k}\right)^2 + \frac{\rho_k A_k \omega^2}{E_k I_k}} - \frac{T_k}{2E_kI_k}} \tag{23}$$

$$\beta_k = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T_k}{2E_kI_k}\right)^2 + \frac{\rho_k A_k \omega^2}{E_k I_k}} + \frac{T_k}{2E_kI_k}} \tag{24}$$

ケーブル毎に8つの積分定数が存在するため，全部で16個の条件式が必要となる．

境界条件として，両端がピン支持であると仮定すると，次式が成立する．

$$W_{k1}(0) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{d^2 W_{k1}(0)}{dx^2} = 0 \tag{26}$$

$$W_{k2}(L_k) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{d^2 W_{k2}(L_k)}{dx^2} = 0 \tag{28}$$

また，交点クランプは1点で2ケーブルを連結しており，2ケーブルは交点クランプから軸直角方向の力を受けるが曲げモーメントは受けないと考えると，それぞれのケーブルのたわみ，たわみ角，曲率は交点クランプの両側で連続しているとみなすことができる．

$$W_{k1}(L_{k1}) = W_{k2}(L_{k1}) \tag{29}$$

$$\frac{dW_{k1}(L_{k1})}{dx_k} = \frac{dW_{k2}(L_{k1})}{dx_k} \tag{30}$$

$$\frac{d^2W_{k1}(L_{k1})}{dx_k^2} = \frac{d^2W_{k2}(L_{k1})}{dx_k^2} \tag{31}$$

式(25)～(31)はケーブルそれぞれに対して成立するため，14個の条件式を構築できたことになる．残りの条件式として，ケーブル連結部における変位の適合条件と力のつり合い条件を考える．交点クランプ位置においてそれぞれのケーブルの面外方向変位が等しいことから，変位の適合条件は次式となる．

$$W_{11}(L_{11}) = W_{21}(L_{21}) \tag{32}$$

交点クランプ位置においてケーブル1が受ける力とケーブル2が受ける力は大きさが等しく向きが反対であることから，力のつり合い条件は次式となる．

$$\begin{aligned} &E_1 I_1 \left\{ -\frac{d^3 W_{11}(L_{11})}{dx_1^3} + \frac{d^3 W_{12}(L_{11})}{dx_1^3} \right\} \\ &+ E_2 I_2 \left\{ -\frac{d^3 W_{21}(L_{21})}{dx_2^3} + \frac{d^3 W_{22}(L_{21})}{dx_2^3} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

以上，16個の積分定数に対して，16個の条件式を構築することができた．式(21)(22)を式(25)~(33)に代入して整理する．モード関数$W_{km}(x_k)$が0とならない解，すなわち全ての積分定数が同時に0とならない解が存在するには，次式が成立する必要のあることが導かれる．

$$g_{11}\,g_{22} + g_{12}g_{21}\frac{g_{32}}{g_{31}} = 0 \tag{34}$$

ここに，

$$g_{1k} = \sin\alpha_k L_k \tag{35}$$

$$\begin{aligned} g_{2k} &= \sin\alpha_k L_{k1}\sin\alpha_k L_{k2} - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\alpha_k L_k \\ &\quad \times \frac{1 + e^{-2\beta_k L_k} - e^{-2\beta_k L_{k1}} - e^{-2\beta_k L_{k2}}}{2(1 - e^{-2\beta_k L_k})} \end{aligned} \tag{36}$$

$$g_{3k} = E_k I_k \{(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2\}\alpha_k \tag{37}$$

である．

式(34) を満たす固有振動数f_iは多数存在し，i を正の整数とすると，

$$G_1^i \equiv g_{11}^i g_{22}^i + g_{12}^i g_{21}^i \frac{g_{32}^i}{g_{31}^i} = 0 \tag{38}$$

と書くことができ，新たに関数G_1^iを定義する．ここに，

$$g_{1k}^i = \sin \alpha_k^i L_k \tag{39}$$

$$g_{2k}^i = \sin \alpha_k^i L_{k1} \sin \alpha_k^i L_{k2} - \frac{\alpha_k^i}{\beta_k^i} \sin \alpha_k^i L_k \times \frac{1 + e^{-2\beta_k^i L_k} - e^{-2\beta_k^i L_{k1}} - e^{-2\beta_k^i L_{k2}}}{2\left(1 - e^{-2\beta_k^i L_k}\right)} \tag{40}$$

$$g_{3k}^i = E_k I_k \left\{ \left(\alpha_k^i\right)^2 + \left(\beta_k^i\right)^2 \right\} \alpha_k^i \tag{41}$$

$$\alpha_k^i = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T_k}{2E_k I_k}\right)^2 + \frac{\rho_k A_k (2\pi f_i)^2}{E_k I_k}} - \frac{T_k}{2E_k I_k}} \tag{42}$$

$$\beta_k^i = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T_k}{2E_k I_k}\right)^2 + \frac{\rho_k A_k (2\pi f_i)^2}{E_k I_k}} + \frac{T_k}{2E_k I_k}} \tag{43}$$

である．式(38)は固有振動数f_iを陽に含まないが，式(42)(43)のα_k^i，β_k^iに含まれている．すなわち，式(38)のおいてG_1^iが 0 となることを満たすf_iが面外方向の固有振動数であり，式(38)が面外方向の固有振動数が満たすべき制約式である．

b) 張力推定手法

提案する面外方向の固有振動数を用いた張力推定では，次の最適化問題を解く．

$$minimize\ G(T_1, T_2, E_1 I_1, E_2 I_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(G_1^i\right)^2 \tag{44}$$

ここで，nは推定に用いる固有振動数の総数，iは固有振動数の番号である．

2 本のケーブルの単位長さ当たりの質量$\rho_k A_k$（密度ρ_k，断面積A_k），ケーブル長さL_k は設計図から既知であり，固有振動数 f_i は計測によって得られるとする．そして，2 本のケーブルの張力T_kと曲げ剛性$E_k I_k$の計 4 変数が未知数である． 計測によって得られた固有振動数f_iを式(42)(43)に代入し，式(44)の右辺が最小となるような 2 本のケーブルの張力T_kと曲げ剛性$E_k I_k$を非線形最適化問題として解く．

高次振動法の式(16)と違い，提案手法の式(38)～(44)にはモード次数iが含まれない．高次振動法では，固有振動数の値（f_i）とそれが何次モードであるか（i）をセットで入力する必要があったが，提案手法では固有振動数の値さえ分かればよく，モード次数を特定する必要がないというメリットがある．

(3) 面内方向の固有振動数を用いた張力推定手法

a) 面内方向の固有振動数が満たすべき制約式の導出

面内方向の固有振動数が満たすべき制約式を導出するには，ケーブルの軸直角方向の振動だけでなく，軸方向の振動についても考える必要がある．ケーブルkの軸方向の振動方程式は次式のとおりである．

$$\rho_k A_k \frac{\partial^2 u_k(x_k, t)}{\partial t^2} = E_k A_k \frac{\partial^2 u_k(x_k, t)}{\partial x_k^2} \tag{45}$$

ここに，$\rho_k A_k$ は単位長さあたりの質量，$E_k A_k$ は軸剛性である．式(18)を式(45)に代入すると，

$$\frac{d^2 U_{km}(x_k)}{dx^2} + \frac{\rho_k A_k \omega^2}{E_k A_k} U_{km}(x_k) = 0 \tag{46}$$

となり，軸方向のモード関数$U_{km}(x_k)$の一般解は，

$$U_{k1}(x_k) = C_{k5} cos\, \eta_k x_k + C_{k6} sin\, \eta_k x_k \tag{47}$$

$$U_{k2}(x_k) = D_{k5} cos\, \eta_k (x_k - L_{k1}) + D_{k6} sin\, \eta_k (x_k - L_{k1}) \tag{48}$$

となる．ここで，$C_{k5}, C_{k6}, D_{k5}, D_{k6}$ は積分定数であり，η_kは次式の通りである．

$$\eta_k = \omega \sqrt{\frac{\rho_k A_k}{E_k A_k}} \tag{49}$$

面内における軸直角方向変位のモード関数の一般解は，面外方向と同様に，次式のように表すことができる．

$$V_{k1}(x_k) = C_{k7} cos\, \alpha_k x_k + C_{k8} sin\, \alpha_k x_k + C_{k9} cosh\, \beta_k x_k + C_{k10} sinh\, \beta_k x_k \tag{50}$$

$$V_{k2}(x_k) = D_{k7} cos\, \alpha_k (x_k - L_{k1}) + D_{k8} sin\, \alpha_k (x_k - L_{k1}) + D_{k9} cosh\, \beta_k (x_k - L_{k1}) + D_{k10} sinh\, \beta_k (x_k - L_{k1}) \tag{51}$$

ここで，$C_{k7}, C_{k8}, C_{k9}, C_{k10}, D_{k7}, D_{k8}, D_{k9}, D_{k10}$ は積分定数であり，α_k，β_kは式(23)(24)の通りである．

ケーブルそれぞれに対して軸方向に 4 つ，軸直角方向に 8 つ，計 12 の積分定数が存在するため，全部で 24 個の条件式が必要となる．

軸方向の境界条件として，両端が固定であると仮定する．また，それぞれのケーブルの軸方向変位が交点クランプの両側で連続であると考えると，次式が成立する．

$$U_{k1}(0) = 0 \tag{52}$$

$$U_{k2}(L_k) = 0 \tag{53}$$

$$U_{k1}(L_{k1}) = U_{k2}(L_{k1}) \tag{54}$$

軸直角方向の境界条件として，両端がピン支持であると仮定する．また，交点クランプは 1 点で 2 ケーブルを連結しており， 2 ケーブルは交点クランプから軸直角方向の力を受けるが曲げモーメントは受けないと考えると，それぞれのケーブルのたわみ，たわみ角，曲率は交点クランプの両側で連続しているとみなすことができる．

$$V_{k1}(0) = 0 \tag{55}$$

$$\frac{d^2V_{k1}(0)}{dx^2}=0 \tag{56}$$

$$V_{k2}(L_k)=0 \tag{57}$$

$$\frac{d^2V_{k2}(L_k)}{dx^2}=0 \tag{58}$$

$$V_{k1}(L_{k1})=V_{k2}(L_{k1}) \tag{59}$$

$$\frac{dV_{k1}(L_{k1})}{dx_k}=\frac{dV_{k2}(L_{k1})}{dx_k} \tag{60}$$

$$\frac{d^2V_{k1}(L_{k1})}{dx_k^2}=\frac{d^2V_{k2}(L_{k1})}{dx_k^2} \tag{61}$$

式(52)～(61)はケーブルそれぞれに対して成立するため，20 個の条件式を構築できたことになる．残りの条件式として，ケーブル連結部における変位の適合条件と力のつり合い条件を考える．交点クランプ位置においてそれぞれのケーブルの変位ベクトルが等しいことから，変位の適合条件は次式となる．

$$\begin{Bmatrix}U_{11}(L_{11})\\V_{11}(L_{11})\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{21}(L_{21})\\V_{21}(L_{21})\end{Bmatrix} \tag{62}$$

ここで，モード関数はそれぞれのケーブルの要素座標系で立式しているため，2 本のケーブルの交差角θを用いて座標変換をしている．

交点クランプ位置においてケーブル 1 が受ける力とケーブル 2 が受ける力のベクトルは大きさが等しく向きが反対であることから，力のつり合い条件は次式となる．

$$\begin{Bmatrix}E_1A_1\left\{\dfrac{dU_{11}(L_{11})}{dx_1}-\dfrac{dU_{12}(L_{11})}{dx_1}\right\}\\E_1I_1\left\{-\dfrac{d^3W_{11}(L_{11})}{dx_1^3}+\dfrac{d^3W_{12}(L_{11})}{dx_1^3}\right\}\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_2A_2\left\{\dfrac{dU_{21}(L_{21})}{dx_2}-\dfrac{dU_{22}(L_{21})}{dx_2}\right\}\\E_2I_2\left\{-\dfrac{d^3W_{21}(L_{21})}{dx_2^3}+E_2I_2\dfrac{d^3W_{22}(L_{21})}{dx_2^3}\right\}\end{Bmatrix} \tag{63}$$

以上，24 の積分定数に対して，24 の条件式を構築することができた．式(47)(48)(50)(51)を式(52)~(63)に代入して整理する．モード関数$U_{km}(x_k)$と$V_{km}(x_k)$が同時に 0 とならない解，すなわち全ての積分定数が同時に 0 とならない解が存在するには，次式が成立する必要のあることが導かれる．

$$\begin{aligned}&cos^2\theta\left(g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}\frac{g_{32}}{g_{31}}\right)\\&\times\left(g_{41}g_{52}+g_{42}g_{51}\frac{g_{62}}{g_{61}}\right)\\&+\sin^2\theta\left(g_{11}g_{52}+g_{42}g_{21}\frac{g_{62}}{g_{31}}\right)\\&\times\left(g_{41}g_{22}+g_{12}g_{51}\frac{g_{32}}{g_{61}}\right)=0\end{aligned} \tag{64}$$

ここに， g_{1k},g_{2k},g_{3k}は面外方向の式(36)～(37)と同じであり，g_{4k},g_{5k},g_{6k}は次の通りである．

$$g_{4k}=\sin\eta_kL_k \tag{64}$$

$$g_{5k}=\sin\eta_kL_{k1}\sin\eta_kL_{k2} \tag{65}$$

$$g_{6k}=E_kA_k\eta_k \tag{66}$$

式(64) を満たす固有振動数f_iは多数存在し， i を正の整数とすると，

$$\begin{aligned}G_2^i\equiv\ &cos^2\theta\left(g_{11}^ig_{22}^i\ +g_{12}^ig_{21}^i\frac{g_{32}^i}{g_{31}^i}\right)\\&\times\left(g_{41}^ig_{52}^i\ +g_{42}^ig_{51}^i\frac{g_{62}^i}{g_{61}^i}\right)\\&+\sin^2\theta\left(g_{11}^ig_{52}^i\ +g_{42}^ig_{21}^i\frac{g_{62}^i}{g_{31}^i}\right)\\&\times\left(g_{41}^ig_{22}^i\ +g_{12}^ig_{51}^i\frac{g_{32}^i}{g_{61}^i}\right)=0\end{aligned} \tag{67}$$

と書くことができ，新たに関数G_2^iを定義する．ここに，

$$g_{4k}^i=\sin\eta_k^iL_k \tag{68}$$

$$g_{5k}^i=\sin\eta_k^iL_{k1}\sin\eta_k^iL_{k2} \tag{69}$$

$$g_{6k}^i=E_kA_k\eta_k^i \tag{70}$$

$$\eta_k^i=2\pi f_i\sqrt{\frac{\rho_kA_k}{E_kA_k}} \tag{71}$$

であり，g_{1k}^i，g_{2k}^i，g_{3k}^iは式(39)～(41)と同じである．式(67)は固有振動数f_iを陽に含まないが，式(42)(43)(71)のα_k^i，β_k^i，η_k^iに含まれている．式(67)のおいてG_2^iが 0 となることを満たすf_iが面内方向の固有振動数であり，式(67)が面内方向の固有振動数が満たすべき制約式である．

b) 張力推定手法

提案する面内方向の固有振動数を用いた張力推定では，次の最適化問題を解く．

$$\begin{aligned}&minimize\ G(T_1,T_2,E_1I_1,E_2I_2,E_1A_1,E_2A_2)\\&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\left(G_2^i\right)^2\end{aligned} \tag{72}$$

ここで，nは推定に用いる固有振動数の総数，iは固有振動数の番号である．

2 本のケーブルの単位長さ当たりの質量ρ_kA_k（密度ρ_k，断面積A_k），ケーブル長さL_k は設計図から既知であり，固有振動数 f_i は計測によって得られるとする．そして，2 本のケーブルの張力T_k と曲げ剛性E_kI_kと軸剛性E_kA_kの計 6 変数が未知数である． 計測によって得られた固有振動数f_iを式(42)(43)(71)に代入し，式(72)の右辺が最小となるような 2 本のケーブルの張力T_kと曲げ剛性E_kI_kと軸剛性E_kA_kを非線形最適化問題として解く．

面外方向の提案手法と同様に，面内方向の提案手法でも固有振動数の値さえ分かればよく，モード次数を特定する必要がないというメリットがある．

(4) モード次数を入力しないことの弊害と対策

高次振動法では固有振動数の値とそのモード次数をセットで入力する必要があるのに対して，提案手法では固有振動数の値を入力するだけでよく，モード次数を入力する必要がないというメリットがある．交点クランプで連結された 2 本のケーブルでは，隣接するモードが存在する場合など，モード次数を特定することが難しい場合があるため，好都合な性質である．一方で，モード次数を用いないことは，張力推定に用いる情報量が少ないことを意味するため，推定精度に悪影響を及ぼす可能性もある． ここでは，高次振動法を例にとり，モード次数を用いないことのデメリットと回避策について考察する．

まず，高次振動法においてモード次数を入力しないことは，式(12)を制約式として用いることに相当する．次に，高次振動法における固有振動数の算定式を次のように書き換える．

$$
\begin{aligned}
f_i^2 &= \frac{\pi^2 EI}{4\rho AL^4} i^4 + \frac{T}{4\rho AL^2} i^2 \\
&= \frac{\pi^2 (EI/16)}{4\rho AL^4} (2i)^4 + \frac{T/4}{4\rho AL^2} (2i)^2
\end{aligned}
\tag{73}
$$

これは，仮にモード次数 $i\ (i = 1, \cdots, n)$ を $2i\ (2i = 2, \cdots, 2n)$ と入力した場合，張力Tを実際の 0.25 倍の値（$T/4$），曲げ剛性EIを実際の 0.0625 倍の値（$EI/16$）として推定してしまうことを意味する．モード次数を入力しない場合は，式(73)の第 2 項と第 3 項を区別できないため，$[T, EI]$だけでなく$[T/4, EI/16]$も解を満たし，一般化すれば$[T/4^M, EI/16^M]$（M は 0 以上の整数）も解を満たす．このように，解が無数に存在することがモード次数を入力しないことのデメリットである．しかしこのデメリットは，解の探索範囲を設定することにより回避することができる．上記の例では，張力の探索範囲を真値の 0.25 倍を上回る範囲，例えば真値の 0.26 倍以上に設定すれば回避できる．本研究の提案手法でも，解の探索範囲を設定することで，モード次数を入力しないデメリットを回避し，メリットのみを享受することを狙う．

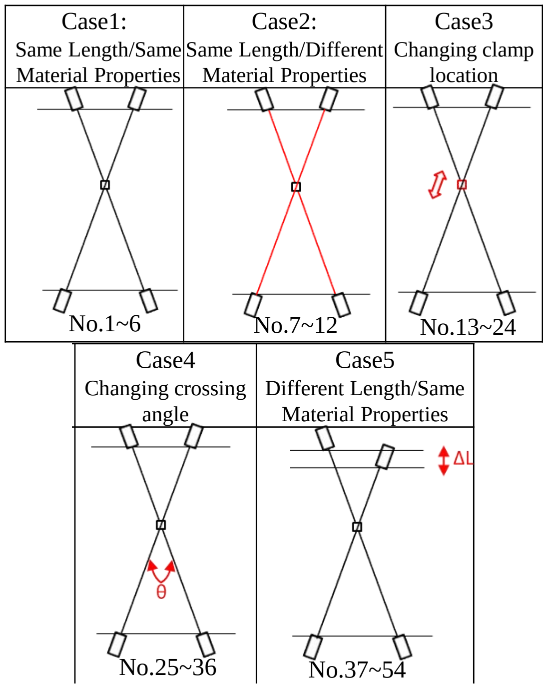
(5) 非線形最適化問題の解法

提案手法は，G_1^iやG_2^iの二乗和を目的関数とし，目的関数を最小化する非線形最適化問題を解く．本研究では，局所的最適解に陥ることを防ぐために MultiStart 法[13]を採用した． MultiStart 法では，推定したいパラメータの初期値（本研究では，未知数である 2 本のケーブルの張力，曲げ剛性等から構成されるベクトル）を複数個発生させる．それぞれの初期値に対する最適解を求め，それらの最適解の中でG_1^iやG_2^iの二乗和が最も小さくなる最適解を大域的最適解とみなすという方法である． MultiStart 法が常に大域的最適解を与える保証はないが，初期値の数を増やすことで，局所解に陥ること防止するものである．

表-1 ケーブル諸元

ケーブル名	張力	曲げ剛性	軸剛性	単位長さあたりの質量
	T [kN]	EI [kN·m^2]	EA [kN]	ρA [ton/m]
A	280.5	12.56	233240	0.0102
B	661.5	68.99	550760	0.0242
C	336.0	17.62	278320	0.0122
D	771.0	92.51	640920	0.0281

表-2 検討ケースの概要



4. 数値実験による提案手法の妥当性検証

(1) 概説

本節では，数値実験により 3 節で提案した張力推定手法の妥当性を検証する．様々なモデルを対象に，有限要素法の固有値解析により求めた固有振動数を提案手法に代入し，張力を推定できるかどうかを検証した．提案手法は，張力と同時に曲げ剛性や軸剛性も推定されるため，それらの推定精度についても検証を行う．

(2) 交点クランプ付き 2 ケーブルモデルのケース

実在するニールセンローゼ橋のケーブルを広くカバーするために，様々な交点クランプ付き 2 ケーブルモデルを対象とする．ケーブルの材質として表-1 に示す 4 種類のケーブル A，B，C，D を設定した．

検討ケースの概要を表-2 に示す．Case1 は 2 本のケーブルの長さと材質が同じケースである．Case 2 は 2 本のケーブルの長さは同じだが材質が異なるケースである．

表-3　交点クランプを有する 2 ケーブルモデル

(a)　Case 1（交点クランプ位置は，L_{11}/L_1 の比で示す）

モデル番号	ケーブル名 ケーブル 1	ケーブル名 ケーブル 2	ケーブル 1 の長さ L_1 [m]	交点クランプ位置	交差角 θ [°]	ケーブル長さの比 L_2/L_1
1	A	A	10	0.6	60	1
2	A	A	20	0.6	60	1
3	A	A	40	0.6	60	1
4	B	B	10	0.6	60	1
5	B	B	20	0.6	60	1
6	B	B	40	0.6	60	1

(b)　Case 2（交点クランプ位置は，L_{11}/L_1 の比で示す）

モデル番号	ケーブル名 ケーブル 1	ケーブル名 ケーブル 2	ケーブル 1 の長さ L_1 [m]	交点クランプ位置	交差角 θ [°]	ケーブル長さの比 L_2/L_1
7	A	C	10	0.6	60	1
8	A	C	20	0.6	60	1
9	A	C	40	0.6	60	1
10	B	D	10	0.6	60	1
11	B	D	20	0.6	60	1
12	B	D	40	0.6	60	1

(c)　Case 3（交点クランプ位置は，L_{11}/L_1 の比で示す）

モデル番号	ケーブル名 ケーブル 1	ケーブル名 ケーブル 2	ケーブル 1 の長さ L_1 [m]	交点クランプ位置	交差角 θ [°]	ケーブル長さの比 L_2/L_1
13	A	A	10	0.3	60	1
14	A	A	10	0.9	60	1
15	A	A	20	0.3	60	1
16	A	A	20	0.9	60	1
17	A	A	40	0.3	60	1
18	A	A	40	0.9	60	1
19	B	B	10	0.3	60	1
20	B	B	10	0.9	60	1
21	B	B	20	0.3	60	1
22	B	B	20	0.9	60	1
23	B	B	40	0.3	60	1
24	B	B	40	0.9	60	1

(d)　Case 4（交点クランプ位置は，L_{11}/L_1 の比で示す）

モデル番号	ケーブル名 ケーブル 1	ケーブル名 ケーブル 2	ケーブル 1 の長さ L_1 [m]	交点クランプ位置	交差角 θ [°]	ケーブル長さの比 L_2/L_1
25	A	A	10	0.6	50	1
26	A	A	10	0.6	70	1
27	A	A	20	0.6	50	1
28	A	A	20	0.6	70	1
29	A	A	40	0.6	50	1
30	A	A	40	0.6	70	1
31	B	B	10	0.6	50	1
32	B	B	10	0.6	70	1
33	B	B	20	0.6	50	1
34	B	B	20	0.6	70	1
35	B	B	40	0.6	50	1
36	B	B	40	0.6	70	1

(e)　Case 5（交点クランプ位置は，L_{11}/L_1 の比で示す）

モデル番号	ケーブル名 ケーブル 1	ケーブル名 ケーブル 2	ケーブル 1 の長さ L_1 [m]	交点クランプ位置	交差角 θ [°]	ケーブル長さの比 L_2/L_1
37	A	A	10	0.6	60	0.75
38	A	A	10	0.6	60	0.85
39	A	A	10	0.6	60	0.95
40	A	A	20	0.6	60	0.75
41	A	A	20	0.6	60	0.85
42	A	A	20	0.6	60	0.95
43	A	A	40	0.6	60	0.75
44	A	A	40	0.6	60	0.85
45	A	A	40	0.6	60	0.95
46	B	B	10	0.6	60	0.75
47	B	B	10	0.6	60	0.85
48	B	B	10	0.6	60	0.95
49	B	B	20	0.6	60	0.75
50	B	B	20	0.6	60	0.85
51	B	B	20	0.6	60	0.95
52	B	B	40	0.6	60	0.75
53	B	B	40	0.6	60	0.85
54	B	B	40	0.6	60	0.95

表-4　推定パラメータの探索範囲

パラメータ	タイプ 1		タイプ 2		タイプ 3	
	下限値	上限値	下限値	上限値	下限値	上限値
張力	1 kN	真値の 2 倍	真値の 0.26 倍	真値の 2 倍	真値の 0.26 倍	真値の 2 倍
曲げ剛性	1 kN·m^2	真値の 2 倍	真値の 0.26 倍	真値の 2 倍	1 kN·m^2	真値の 10 倍
軸剛性	1 kN	真値の 2 倍	真値の 0.26 倍	真値の 2 倍	1 kN	真値の 10 倍

Case3 は 2 本のケーブルの長さと材質は同じで交点クランプ位置を様々に変えたケースである．Case4 は 2 本のケーブルの長さと材質は同じでケーブル交差角を様々に変えたケースである．Case5 は 2 本のケーブルの材質は同じであるが長さが異なるケースである．2 本のケーブルをケーブル 1，ケーブル 2 とすると，ケーブル 1 の条長は 10m，20m，40m の 3 通り，ケーブル 1 と 2 の材質の組み合わせについて 4 通り（A-A，B-B，A-C，B-D），交点クランプの位置を 3 通り（端部から 30%，50%，90%），ケーブルの交差角を 3 通り（50，60，70 度），2 本のケーブル長さの比を 4 通り（1.0，0.95，0.85，0.75）など，表-3 に示す計 54 ケースに対して張力推定を行った．

(3) 有限要素法による固有振動数の算出

有限要素法の固有値解析により 54 通りの解析モデルの固有振動数を算出した．解析は 2 次元とし，面外方向と面内方向それぞれの解析モデルを作成した．要素サイズは 0.1m とした．両端の境界条件はピン支持とし，交点クランプ位置において両ケーブルの変位の自由度番号を同一とすることで，2 ケーブルが同じ変位となるように設置した．

(4) 提案手法の検証

a) 検証方法

面外方向と面内方向の固有振動数をそれぞれ 7 次モードまで算出し，検証に用いた．7 次モードまでの固有振動数を検証に用いた理由は，後述の模型実験や，既往の現場計測において，明瞭に固有振動数を読み取れる範囲が 7 次モード付近までであったためである．

面外方向の 7 つの固有振動数を式(44)に代入し，2 本のケーブルの張力と曲げ剛性の計 4 つのパラメータを推定した．同様に，面内方向の 7 つの固有振動数を式(72)に代入し，2 本のケーブルの張力と曲げ剛性と軸剛性の計 6 つのパラメータを推定した．

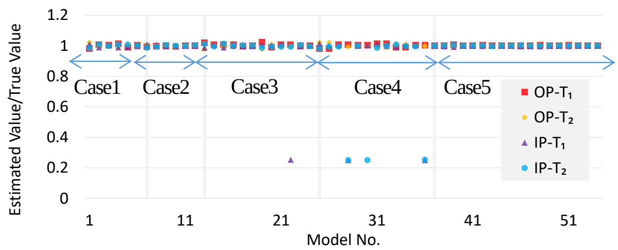
推定パラメータの下限値と上限値について，ここでは表-4 に示すタイプ 1 とタイプ 2 を比較する．タイプ 1 は下限値をできるだけ小さい値に設定したものである．下限値を 0 としなかった理由は，式(42)(43)(71)においてこれらのパラメータが分母に来るためである．タイプ 2 は下限値を真値の 0.26 倍に設定したものである．上限値はタイプ 1，タイプ 2 ともに同じで真値の 2 倍とした．原田ら [14]による既往研究において，供用後 30 年を経過したニールセンローゼ橋の張力を調査したところ，設計値からの平均的な張力のずれは+10%であり，設計値に対する張力の比の最小値は 0.76 で，最大値で 1.4 であったと報告されている．このことから，張力の探索範囲の下限値を設計の 0.26 倍に，上限値を設計値の 2 倍に設定することは妥当であると考えられる．曲げ剛性や軸剛性の調査結果はないため，タイプ 2 の下限値は張力と同じ真値の 0.26 倍とし，上限値はタイプ 1，タイプ 2 ともに張力と同じ真値の 2 倍とした．

Multistart 法の初期値は 100 通りとし，探索範囲の中で 100 通りの初期値を乱数により発生させた．一般に，多くの初期値を使用した方が局所的最適解を防止できるが，計算時間も増えてしまう．本検討では 100 通りでも張力を精度よく推定できたため，100 を用いた．

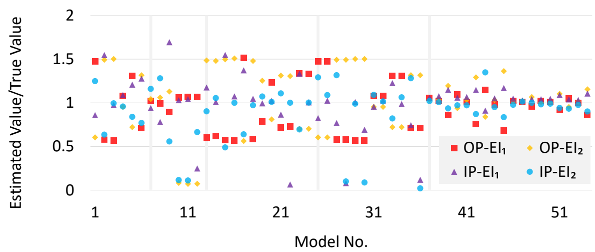
b) 探索範囲がタイプ1のときの推定結果

面外方向と面内方向それぞれの固有振動数を用いた張力の推定結果を**図-3(a)**に，曲げ剛性の推定結果を**図-3(b)**に示す．面内方向の固有振動数を用いた軸剛性の推定結果を**図-3(c)**に示す．横軸がモデル番号で，縦軸は推定値と真値の比をとっている．縦方向のグリッド線はケースの区切りを表しており，**図-3(a)**に示すように Case 1 から Case 5 までの各ケースに属するモデル番号の範囲を示している．また，縦軸の値が 1 に近いほど推定値が真値に近いことを示している．

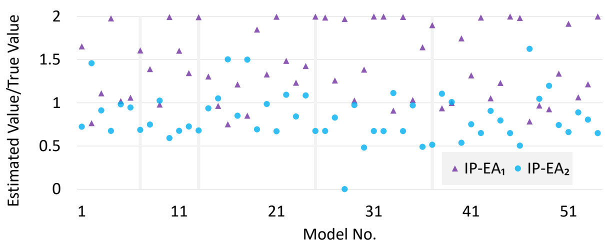
まず，**図-3(a)**の張力の推定精度に関して考察する．面外方向の手法では全モデルの推定誤差が 2.3%未満と非常に良い精度であることがわかる．面内方向の手法では



(a) 張力（OP：面外方向，IP：面内方向）

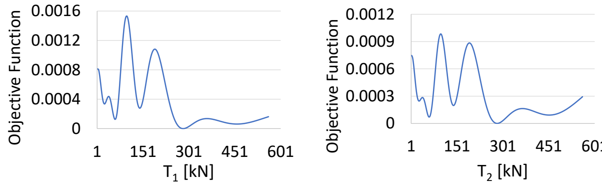


(b) 曲げ剛性（OP：面外方向，IP：面内方向）

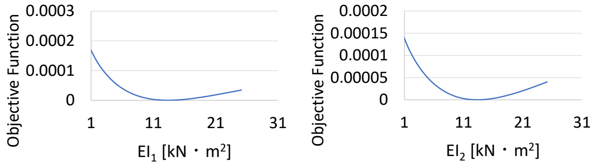


(c) 軸剛性（面内方向）

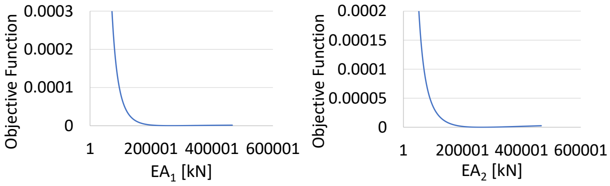
図-3 推定結果（タイプ 1）



(a)張力を変動させた場合（左：ケーブル 1，右：ケーブル 2）

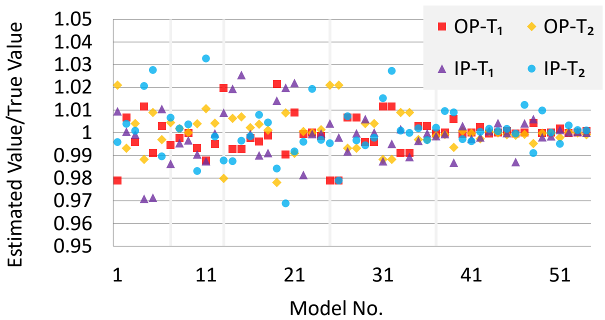


(b)曲げ剛性を変動させた場合（左：ケーブル 1，右：ケーブル 2）

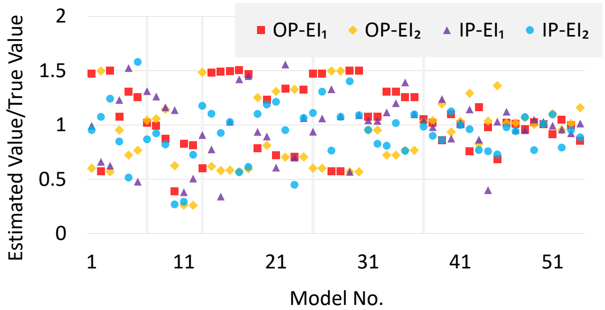


(c)軸剛性を変動させた場合（左：ケーブル 1，右：ケーブル 2）

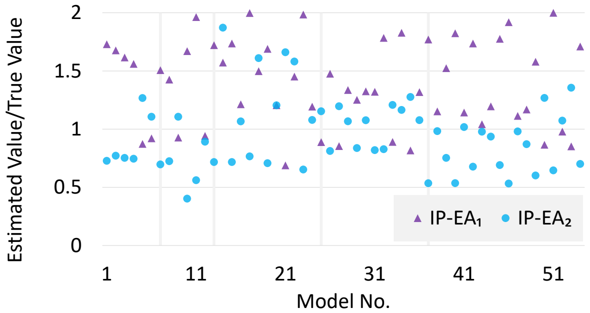
図-4　面内方向の手法の目的関数に対する張力，曲げ剛性，軸剛性の感度（モデル No.13）



(a) 張力（OP：面外方向，IP：面内方向）



(b) 曲げ剛性（OP：面外方向，IP：面内方向）



(c) 軸剛性（面内方向）

図-5　推定結果（タイプ 2）

No.22，No.28，No.30，No.36 は推定値が真値の約 0.25 倍となり精度が悪いが，それ以外は誤差が 2.0%未満に収まった．なお，No.22，No.28，No.30，No.36 の推定誤差が悪い理由は，推定値が真値の 0.25 倍となっていることからも，モード次数を入力しないことに起因していると推察される．また，面外方向，面内方向の手法ともに，2 本のケーブルの長さと材質が同じ Case 1，Case 3，Case 4 よりも，2 本の材質が異なる Case 2 や，2 本の長さの異なる Case 5 のほうが推定精度の高いことがわかった．すなわち，2 本のケーブルが異なる特性を持つほど，推定精度が高いことがわかる．

次に，**図-3(b)**の曲げ剛性と**図-3(c)**の軸剛性の推定精度に関して考察する．曲げ剛性と軸剛性のいずれも，張力に比べて推定精度が悪い．曲げ剛性と軸剛性の推定精度が悪い理由は，本研究が対象としたモデルでは，張力に比べて曲げ剛性や軸剛性の目的関数に対する感度が低いためである．

図-4 に，面内方向の手法にモデル No.13 を適用したときの感度解析結果を示す．ケーブル 1，2 の張力と曲げ剛性および軸剛性の 6 パラメータのうち，1 つのパラメータだけを変動させた場合に，式(44)の目的関数の値がどの程度変化するかを示している．横軸の変動の範囲は，タイプ 1 の下限値から上限値までと設定した．張力も曲げ剛性も，横軸の値が真値に一致するときに目的関数が下に凸となっており，最小値をとっている．張力については，真値（280.5 kN）の 0.25 倍の値でも下に凸となっているが，これはモード次数を入力しないことによる弊害である．No.22，No.28，No.30，No.36 において張力の推定値が真値の約 0.25 倍と判定されたのは，モード次数を入力しないことが原因であると考えられる．

張力に比べて曲げ剛性や軸剛性の値が変動しても目的関数の値は大きく変動しないことがわかる．特に，軸剛性の感度が低いことがわかる．図は省略するが，面外方向の手法においても張力に比べて曲げ剛性の感度が低いことが確認された．このように，目的関数に対して感度の高い張力の推定精度は高いが，感度の低い曲げ剛性と軸剛性の推定精度は低いことがわかった．これは提案手法に限った性質ではなく，高次振動法でも本研究のように低次モードの固有振動数を用いる場合に同様の傾向を示すことが確認されている [2]．なお**図-3(c)**より，軸剛性の推定結果が探索範囲の上限値（真値の 2 倍）となっているケースが複数ある．軸剛性の探索範囲の上限値を大きくして再度最適化問題を解くと，真値の 2 倍以上の値が解として得られるが，張力の推定範囲にはほとんど影響がないことがわかった．これは，**図-4** から明らかなとおり，目的関数に対する張力の感度が高く，軸剛性の感度が低いためである．

c)　探索範囲がタイプ 2 のときの推定結果

面外方向と面内方向それぞれの固有振動数を用いた張力の推定結果を**図-5(a)**に，曲げ剛性の推定結果を**図-5(b)**に示す．面内方向の固有振動数を用いた軸剛性の推定結果を**図-5(c)**に示す．

図-5(a)の張力の推定精度に関して，面外方向の手法ではタイプ 1 のときとほぼ同様の結果であり，全モデルで推定誤差が 2.2%未満に収まった．面内方向の手法ではタイプ 2 としたことで全てのモデルで推定誤差が 3.3 %未満に収まった．面内方向の No.22，No.28，No.30，No.36 にタイプ 1 の探索範囲を用いたときは，モード次数を入力しないことに起因して真値の約 0.25 倍の張力が得られたが，解の探索範囲を絞ったタイプ 2 を用いることでほぼ真値に近い解が得られたと推察される．

図-5(b)(c)より，曲げ剛性と軸剛性の推定精度は下限値タイプ 2 を採用しても改善されていない．この理由は，有限要素法で求めた固有振動数には，近似に伴う誤差や数値誤差が僅かに含まれているため，感度の低い曲げ剛性や軸剛性の推定精度が悪くなるものと考えられる．なお，推定パラメータの探索範囲として，**表-4** に示すタイプ 3 も検討した．タイプ 2 のときに曲げ剛性または軸剛性の推定結果が探索範囲の下限値または上限値となった計 5 モデルにおいて，タイプ 3 では曲げ剛性または軸剛性の推定結果が変更となったが，張力の推定結果はタイプ 2 とタイプ 3 で同程度であることを確認した．以上のことから，また原田の調査結果（30 年経過したニールセンローゼ橋のケーブルの張力は設計値の 0.76 倍から 1.4 倍の範囲）[14]に余裕を持たせ，張力の探索範囲を設計値の 0.26 倍から 2 倍程度の間に設定することがよいと考えた．曲げ剛性と軸剛性は目的関数に対する感度が低いことから，固有振動数に含まれる誤差が大きくなるほど真値から大きく離れると予想されるので，固有振動数に含まれる計測誤差が小さい場合はタイプ 2 のように範囲を絞ってもよいが，計測誤差が大きい場合は探索範囲を広げるのがよいと考えられる．

(5)　固有振動数の計測誤差の影響

a)　検証方法

次に，固有振動数の計測誤差が推定精度に及ぼす影響を検証する．有限要素法で求めた固有振動数には，近似に伴う誤差や数値誤差が僅かに含まれているが，これに加えて人為的な計測誤差を加えた．本研究では，一様乱数を発生させ，有限要素法で算出したi次モードの固有振動数f_i^{FEM}に数値誤差を与えた．

$$f_i^{noise} = f_i^{FEM}(1 + \varepsilon\, rand) \tag{74}$$

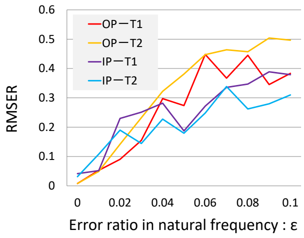
ここに，f_i^{noise}が数値誤差を与えたi次モードの固有振動数，$rand$は–1～1 の間の一様乱数，εが誤差割合である．1～7 次の固有振動数それぞれに対して異なる乱数を発生させた．誤差割合εは，0.0 から 0.1 まで 0.01 間隔で設定した．

54 通りのケーブルモデルに対し，面外方向と面内方向それぞれの手法により 2 本のケーブルの張力を推定し，次式により平均平方二乗誤差割合（RMSER：Root Mean Square Error Ratio）を求めた．

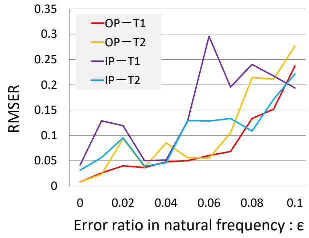
$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{I=1}^{N}\left(\frac{T_I^{noise}}{T_I^{true}} - 1\right)^2} \tag{75}$$

ここで，Nはモデル総数の 54 であり，T_I^{true}はケーブル 1 または 2 の張力の真値，T_I^{noise}は固有振動数に数値誤差を加えたときのケーブル 1 または 2 の張力推定値，Iはモデル番号である．

なお，解の探索範囲としては**表-4** に示すタイプ 3 を用いた．最初タイプ 2 を用いて推定を行ったところ，計測誤差の影響により多くのモデルで曲げ剛性と軸剛性の推定結果が上限値または下限値に一致したため，曲げ剛性と軸剛性の探索範囲を広く設定した．探索範囲が広くなったため，Multistart 法の初期値を 200 通りとした．



(a) 1 セットの固有振動数を用いた場合



(b) 10 セットの固有振動数の平均を用いた場合

図-6　計測誤差が張力推定精度に及ぼす影響（タイプ 3）

b)　検証結果

推定結果を**図-6** に示す．横軸が誤差割合，縦軸が RMSER である．**図-6(a)**は 1～7 次の計測誤差を含んだ固有振動数を 1 セット発生させて，張力を推定した場合の結果である．**図-6(b)**は 1～7 次の計測誤差を含んだ固有振動数を 10 セット発生させて，10 セットの固有振動数の平均値を用いて張力を推定した場合の結果である．

1 セットの固有振動数を用いた場合，張力の RMSER を 0.1 以下に抑えるには，固有振動数の計測誤差が 1.5%以下（面外方向），0.8%以下（面内方向）である必要のあることがわかる．10 セットの固有振動数の平均を用いた場合，張力の RMSER を 0.1 以下に抑えるには，固有振動数の計測誤差が 7%以下（面外方向），0.6%以下（面内方向）である必要のあることがわかる．以上から，張力の RMSER を 0.1 以下に抑えるのに，面外方向の手法のほうが大きな計測誤差を許容できることがわかった．

1 セットの固有振動数を用いた場合は，誤差割合が

5%程度までは両方向のRMSERは同程度であるのに対し，誤差割合 5%以上では面外方向の RMSER のほうが大きい傾向が見らえる．10 セットの平均の固有振動数を用いた場合は，面外方向の手法のほうが RMSER が小さい傾向にあり，面外方向の手法では誤差割合の増加に伴い RMSER が滑らかに増加しているのに対して，面内方向の手法の RMSER は増減を繰り返している．また，面外方向の手法では 1 セットよりも 10 セット平均の固有振動数を用いたほうが RMSER が格段に減少しているのに対して，面内方向の手法では誤差割合によっては必ずしも減少していない．これらのことから，面内方向の手法は固有振動数に含まれる計測誤差の組み合わせによって推定精度がばらつくことが読み取れる．また，面外方向の手法のほうが計測を複数回行い推定された固有振動数の平均値を用いることにより，推定精度が向上する可能性のあることを示唆している．未知数の少ない面外方向の手法のほうが，計測誤差に対して良い性質を持つためではないかと推察する．

(6) 考察

材質，ケーブル長，交点クランプ位置，交差角，2 ケーブルの長さ比の異なる 54 モデルを対象に提案手法の妥当性を検証した．解の探索範囲を適切に設定することで，モード次数を入力しないことによるデメリットを回避でき，面外方向の手法では 2.5%以内，面外方向の手法では 4%以内の精度で張力を推定できた．一方で，曲げ剛性と軸剛性は感度が低いため精度よく推定することができなかった．以上から，提案手法を用いて曲げ剛性と軸剛性を推定することは難しいが，張力を精度よく推定できることを確認することができた．

固有振動数に含まれる計測誤差の影響についても検討したところ，面外方向の手法のほうが張力の RMSER を 0.1 以下に抑えるのに大きい計測誤差を許容できることがわかった．また，面外方向の手法のほうが，複数回計測して固有振動数の平均をとることにより張力推定精度を向上できる効果の高いことが確認された．

以上より，面外方向の手法のほうが張力推定精度が高く，計測誤差に対しても良い性質を持つため，ケーブルを面外方向にも面内方向にも振動させることが可能な場合は，面外方向の固有振動数を計測し，面外方向の手法を採用するのがよいと考える．

5. 模型実験による提案手法の妥当性検証

(1) 実験概要

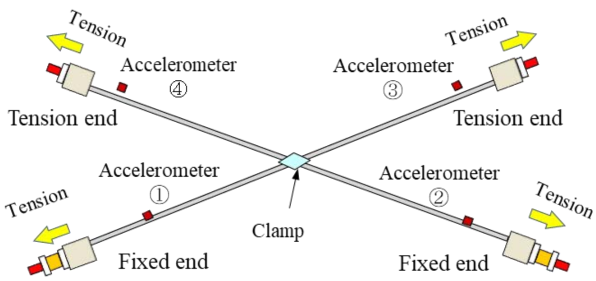
提案手法の妥当性を検証するため模型実験を行った．試験体の模式図と写真を図-7 に示す．

図-7(a)(b)に示すように，2 本のケーブルが交点クランプで連結されており，両端が支持されている．それぞれのケーブルの片方の端部にロードセルが設置されており，そこで測定された張力をケーブルの張力の真値とした．加速度計は端から交点クランプ間にそれぞれ 1 つずつ計 4 つ設置した．加速度計は，面外方向と，面内の軸方向と軸直角方向の，計 3 方向に設置した．図-7(c)に示すようにケーブルは PC 鋼線を 19 本より合わせたものを使用し，図-7(d)に示すような交点クランプを使用した．

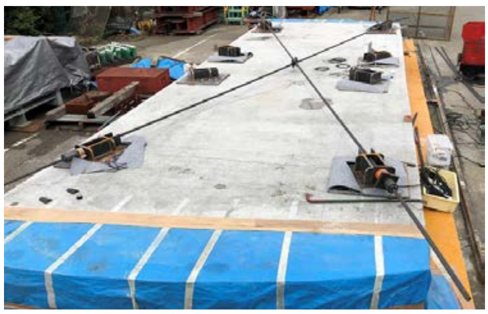
試験体の構造諸元を表-5 に示す．張力はロードセルで計測した値であり，単位長さ当たりの質量は，実際のケーブルの質量を長さで除して求めた．曲げ剛性と軸剛性はヤング率と断面諸元の設計値を乗じて求めた．

表-5 模型ケーブルの構造諸元

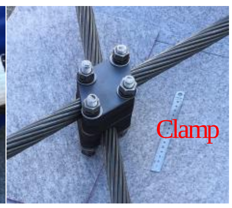
ケーブル名	張力 [kN]	曲げ剛性 [kN·m²]	軸剛性 [kN]	単位長さあたりの質量 [ton/m]	長さ [m]	交点クランプ位置 [-]	交差角 θ[°]
1	T_1 150.4	E_1I_1 2.26	E_1A_1 1.04×10^5	ρ_1A_1 0.0043	L_1 7.836	L_{11}/L_1 0.5	40
2	T_2 103.6	E_2I_2 2.26	E_2A_2 1.04×10^5	ρ_2A_2 0.0043	L_2 7.835	L_{22}/L_2 0.5	



(a) 試験体模式図


(b) 試験体全体の写真


(c) ケーブル断面



(d) 交点クランプとケーブル

図-7 模型実験の概要

表-6　固有振動数一覧（Hz）

面外	11.33	24.41	25.90	35.08	51.76	78.16	82.58
面内	11.25	25.59	34.77	52.46	61.21	81.80	111.48

表-7　推定パラメータの探索範囲

ケーブル	張力[kN]	曲げ剛性[kN·m^2]	軸剛性[kN]
1	[0.26, 2]×150.4	[1, 10×2.26]	[1, 10×1.04×10^5]
2	[0.26, 2]×103.6	[1, 10×2.26]	[1, 10×1.04×10^5]

表-8　推定結果

(a)　張力

面外方向の手法（推定値/真値）		面内方向の手法（推定値/真値）	
T_1 [kN]	T_2 [kN]	T_1 [kN]	T_2 [kN]
165.4 (1.100)	103.7 (1.001)	169.0 (1.124)	73.2 (0.707)

(b)　曲げ剛性

面外方向の手法（推定値/設定値）		面内方向の手法（推定値/設定値）	
E_1I_1 [kN·m^2]	E_2I_2 [kN·m^2]	E_1I_1 [kN·m^2]	E_2I_2 [kN·m^2]
4.12 (1.820)	6.56 (2.897)	3.33 (1.473)	3.52 (1.555)

(c)　軸剛性

面内方向の手法（推定値/設定値）	
E_1A_1 [kN]	E_2A_2 [kN]
1.04×10^6 (10.0)	5.00 (4.79×10^{-5})

(2)　固有振動数

実験では，ケーブルをハンマーで打撃して振動させた．打撃は**図-7(a)**に示す加速度計①が設置された区間で行った．その後，4 つの加速度計で得られた加速度波形をフーリエ変換し，フーリエスペクトルの卓越振動数を読み取ることで固有振動数を求めた．面外方向の固有振動数は面外方向に設置した加速度センサの応答から読み取った．面内方向の固有振動数は面内の軸方向と軸直角方向の 2 方向に設置した加速度センサの応答から読み取った．

面外方向と面内方向の固有振動数一覧を**表-6** に示す．低い振動数から順に並べている．

(3)　張力推定結果

表-6 に示した固有振動数を提案手法に適用し，張力，曲げ剛性，軸剛性の推定を行った．推定パラメータの探索範囲は，**表-7** に示すとおり設定した．これは前節におけるタイプ 3 と同じである．Multistart 法の初期値は 1000 通りとした．

結果を**表-8** に示す．**表-8(a)**は張力の推定結果である．面外方向の手法の推定誤差はケーブル 1 が 10%，ケーブル 2 が 0.1%であり，良い精度である．面内方向の手法の推定誤差はケーブル 1 が 12.4%，ケーブル 2 が 29.3%であり，面外方向の推定精度のほうが高い結果となった．この傾向は数値実験による検証結果と調和的である．

表-8(b)は曲げ剛性の推定結果，**表-8(c)**は軸剛性の推定結果である．いずれも推定誤差が大きく，数値実験と同様の結果が得られた．

(4)　考察

本節では，模型実験により提案手法の妥当性を検証した．面外方向の手法の方が張力推定精度が高く，推定誤差は最大で 10%であった．単体ケーブルを対象とした高次振動法の張力推定誤差は 5%以内と報告されているので，提案手法は高次振動法に比べると精度は劣る．5%以内の精度で張力を推定したいのであれば，交点クランプを取り外した上で高次振動法により張力を推定し，再び交点クランプを取り付ければよい．しかし，交点クランプの取り外しと再取り付けの作業は，多くの時間も労力を要する．10%の誤差を許容するのであれば，面外方向の提案手法は交点クランプを取り外すことなく 10%の誤差で 2 本のケーブル張力を同時に推定することが可能であるため，時間と労力を大幅に節約することが可能で，効果的な手法であると言える．

一方，面内方向の手法の推定誤差は最大で約 30%と，面外方向の手法の約 3 倍となった．この理由として，提案手法では交点クランプの質量や剛性の影響を無視していることがあると考える．面外方向に比べて面内方向では交点クランプの質量や剛性の影響が大きく，モデル化誤差により推定誤差が大きくなったのではないかと考える．しかし，推察の域を出ないため，より多くの実験を行い検証をする必要がある．

以上，数値実験と模型実験による検証を通して，面外方向の手法の方が面外方向の手法より優れていることが明らかとなった．しかし，模型実験による推定誤差は最大で 10%で，高次振動法の 5%には劣る．今後は，模型実験や現場計測を行い，交点クランプのモデル化方法を改良をするなどして，推定精度を向上させたい．

6.　結論

本研究では，交点クランプで連結された 2 本のケーブルの張力を同時推定する手法を提案した．2 本のケーブルで構成される平面を考え，その平面に垂直な方向を面外方向，その平面内の方向を面内方向と定義し，面外方向の固有振動数を用いた手法と，面内方向の固有振動数を用いた手法の，2 通りの手法を提案した．提案手法の妥当性は，数値実験と模型実験により検証した．本研究で得られた知見を以下に示す．

1) ケーブルを張力のかかった梁とみなし，交点クランプで連結された 2 本のケーブルの固有振動数が満たすべき制約式を面外方向と面内方向それぞれ導出した．これらの制約式の誤差二乗和を最小化する最適問題を解くことにより，2 本のケーブルの張力を推

定する手法を提案した．面外方向の手法では曲げ剛性が同時に推定され，面内方向の手法では曲げ剛性と軸剛性が同時に推定される．提案手法では，固有振動数の値のみ入力すればよく，固有振動数が何次モードであるかを入力する必要がない．

2) 有限要素法により算出した固有振動数を提案手法に入力し，張力，曲げ剛性，軸剛性を推定できるかどうか検証した．解の探索範囲を適切に設定することによって，張力を良い精度で推定できること，曲げ剛性と軸剛性の推定精度は悪いことが明らかになった．面外方向の手法の方が面内方向の手法よりも推定精度が高く，計測誤差に対しても良い性質を示すことを確認した．

3) 模型実験を行い，提案手法で張力を推定できるかどうか検証した．面外方向の手法では張力推定誤差が最大で10%となり，有効性を確認することができた．面内方向の手法の張力推定誤差は最大で約30%となった．数値実験と模型実験を通して，面外方向の手法の方が優れていることが明らかとなった．

今後の課題として，模型実験のケースを増やすとともに実橋梁による検証実験も行い，推定精度を向上させる方策を検討したい．

参考文献

1) 新家徹，広中邦汎，頭井洋，西村春久：振動法によるケーブル張力実用算定式について，土木学会論文報告集，第294号，pp.25-32，1980年2月
2) 山極伊知郎，宇津野秀夫，遠藤浩司，杉井謙一：高次の固有振動数を利用した線材の張力と曲げ剛性の同定法，日本機械学会論文集（C編），66巻，649号，pp.2905-2911，2000年9月
3) Chen, C.C., Wu, W.H., Leu, M.R., Lai, G.: Tension determination of stay cable or external tendon with complicated constraints using multiple vibration measurements. Measurement 86, pp.182-195, 2016.
4) Chen, C.C., Wu, W.H., Leu, M.R., Lai, G.: A novel tension estimation approach for elastic cables by elimination of complex boundary condition effects employing mode shape functions. Engineering Structures 166, pp.152-166, 2018.
5) Yan, B., Chen., W., Yu, J., Jiang, X.: Mode shape-aided tension force estimation of cable with arbitrary boundary conditions. Journal of Sound and Vibration 440, pp.315-331, 2019.
6) Ma, L.: A highly precise frequency-based method for estimating the tension of an inclined cable with unknown boundary conditions. Journal of Sound and Vibration 409, pp.65-80, 2017.
7) Zarbaf, S.E.H.A.M., Norouzi, M., Allemang, R., Hunt, V., Helmicki, A., Venkatesh, C.: Vibration-based cable condition assessment: A novel application of neural networks. Engineering Structures 177, pp.291-305, 2018.
8) 北田俊行，中井博，吉川紀，阪野雅則：ニールセンローゼ橋アーチリブの座屈に対する合理的設計法について，土木学会構造工学論文集，Vol.34A，pp.315-326，1988.
9) 米田昌弘：ニールセン型ローゼ桁橋の構造減衰特性に及ぼす吊材の影響，土木学会論文集，No.651，VI-47，pp.157-162, 2000.
10) 阪野雅則，北田俊行，鳥野晃督：ニールセンローゼ橋の力学的特性とその耐荷力，土木学会構造工学論文集，Vol.49A，pp.93-104，2003.
11) 栗山尚志，鞆一，堀内博：ニールセン橋のクランプ付ケーブルの張力測定法の一案，土木学会第49回年次学術講演会，I-176，pp.350-351，1994.
12) Shinko Wire Company, Ltd. : Tension measuring technique for outer cables. http://www.shinko-wire.co.jp/products/vibration.html （2020年7月15日閲覧）．
13) MathWorks. : MATLAB Documentation, MultiStart, https://jp.mathworks.com/help/gads/multistart.html （2020年7月15日閲覧）．
14) 原田政彦，梶川康男，深田宰史：30年を経過したニールセンローゼ橋の調査，土木学会第57回年次学術講演会，I-290，pp.579-580，2002年9月

（2020.9.1受付）

PROPOSAL OF TENSION ESTIMATION METHOD FOR TWO CABLES CONNECTED BY INTERSECTION CLAMP

Satoshi YAMADA, Aiko FURUKAWA and Junji KIYONO

Neilsen Rose Bridge is an arch bridge in which the stiffening girder is elastically supported by bracing cables suspended from the arch members. The braced cables cross each other and are connected by intersection clamps to prevent noise and damage due to contact caused by wind-induced vibrations. In practice,

a tension estimation method for a single cable using natural frequencies is used to estimate cable tension for maintenance purposes. That is, the intersection clamps are removed and the tension estimation method for a single cable is applied to each cable, and then the intersection clamps are reinstalled. However, removal and reinstallation of the intersection clamps require labor and traffic control, so if the tension can be estimated without removing the intersection clamps, it will improve the efficiency of inspection work. This paper proposes a method for estimating the tension of two cables connected by intersection clamps from their natural frequencies. The usefulness of the proposed method was verified by numerical simulation and experiments. The method using the out-of-plane natural frequencies was more accurate than the method using the in-plane natural frequencies, with a maximum error of 10% in the experiment.