3次元テンソル形式コンクリート構成則の 2次元厚板要素への実装と検証

堀田　渉[1]・鈴木　俊一[2]・堀　宗朗[3]

[1]正会員　大成建設株式会社　原子力本部（〒163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1）
E-mail: ht-wtr00@pub.taisei.co.jp

[2]正会員　大成建設株式会社　原子力本部（〒163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1）
[3]フェロー会員海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門(〒236-0001 神奈川県横浜市金沢区昭和町 3173-25)

大規模構造物の 3 次元有限要素解析では，ソリッド要素の他，厚板要素が用いられるが，面内変形と面外変形の構成則を独立に扱う通常の厚板要素には，面内変形と面外変形が連成する鉄筋コンクリートの非線形構成則を適用できない．本論文では，3 次元テンソル形式のコンクリート構成則を使う非線形厚板要素の定式化を行った．2 次元厚板要素でありながら，連続体力学との整合性を保つため，歪と応力の 6 成分を扱い，汎用性を高めた定式化としている．定式化に基づき，3 次元テンソル形式コンクリート構成則を汎用の厚板要素に実装した．ソリッド要素および従前の厚板要素と比較することで，開発した厚板要素の有効性を検証するとともに，実験の再現解析を行い厚板要素の妥当性を確認した．

Key Words: *plate theory, non-linear constitutive relation, reinforced concrete, seismic response analysis*

1. はじめに

重要構造物の耐震評価において，3 次元有限要素法モデルを用いた非線形地震応答解析を行う機会が増えてきている．連続体力学の観点からは，梁・板要素に比べ，適用範囲の広いソリッド要素を使用することが望まれる．著者ら[1),2)]は，コンクリートや地盤に対し，非線形の 3 次元テンソル形式構成則をソリッド要素に実装し，高性能計算[3)]を利用できる並列有限要素法（以下，HPC-FEM）を実用化している．

原子力発電所のような大規模構造物に対して，鉄筋コンクリートの床や壁を全てソリッド要素でモデル化することは困難である．計算効率の点から考えても全ソリッド要素モデルは実用的ではない．一部に厚板要素を使うハイブリッド解析モデルを用いることが代替である．ソリッド要素との整合性を保つためには，3 次元テンソル形式構成則を厚板要素に実装することが必要である．

厚板理論は3次元弾性論に基づくが，面内変形と面外変形の構成則を分離するものが主流である．面外変形の取り扱いについて数多くの研究が行われており[4)-6)]，基本，両者は独立して計算されている．事実，高性能と言われ，厚板に適用可能な MITC シェル要素[7)-9)]でも，面内変形と面外変形の構成則は独立である．ソリッド要素との整合性を考え，コンクリートや地盤などの 3次元テンソル形式構成則を使う厚板理論はなく，当然，これらの 3次元テンソル形式構成則を実装した厚板要素はない．

本論文では，3 次元テンソル形式のコンクリート構成則[10),11)]を 2次元厚板要素に実装することを目的とする．連続体力学との整合性を保つため，歪と応力の 6成分を使う 3 次元テンソル構成則から，2 次元厚板要素のための歪と応力の 5成分の構成則を定式化することになる．開発した厚板要素の有効性と妥当性を数値実験により検証・確認する．

本論文の構成は以下のとおりである．まず 2章では，提案する非線形板要素の基本となる厚板理論を整理する．次に 3 章では，3 次元テンソル形式からなるコンクリート構成則から導出された非線形の厚板要素の定式化を示す．4 章では，要素シミュレーションおよび鉄筋コンクリート（RC）梁のせん断試験を模擬した数値実験を行い，ソリッド要素，面内変形と面外変形の構成則を独立とした従前の厚板要素，および提案する厚板要素の挙動を比較し，提案する厚板要素の有効性を示す．最後に 5 章では，RC 耐震壁の動的実験の再現解析を行い，提案する厚板要素の妥当性を確認する．

2. 厚板理論の概要

(1) 厚板理論

線形厚板理論を以下に示す．図-1 に示す直交座標系(x,y,z)を取り，変位関数(u,v,w)を併進(U,V,W)と回転(Θ,Φ)を使って下式のように表す．

$$\begin{aligned} u &= U(x,y) - z\,\Theta(x,y), \\ v &= V(x,y) - z\,\Phi(x,y), \\ w &= W(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

面内 3 成分および面外 2 成分の工学歪成分を以下に示す．

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\end{bmatrix} - z\begin{bmatrix}\frac{\partial \Theta}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}\\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial W}{\partial y}-\Phi\\ \frac{\partial W}{\partial x}-\Theta\end{bmatrix}. \tag{2}$$

等方弾性の場合，応力と歪の関係である構成則は，次の面内変形と面外変形の構成則に分離することができる．

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}, \tag{3}$$

面内 3 成分と面外 2 成分の応力と歪が独立に計算されることが重要である．

準静的状態と物体力不在を仮定し，厚板要素に対する次の汎関数Πを考える．

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C_b}\boldsymbol{\kappa}\, d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C_s}\boldsymbol{\gamma}\, d\Omega. \tag{4}$$

ここで，Ωは厚板の領域であり，

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{C_b} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}, \boldsymbol{C_s} = \frac{Ek}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{5}$$

Eはヤング率，νはポアソン比，kは面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数である．節点変位(U_i,V_i,W_i)とたわみ角(Θ_y^i,Φ_y^i)，形状関数h_iを用いて変位関数を次のように離散化する．

$$\begin{aligned} (u,v,w) &= \textstyle\sum_{i=1}^{I}(h_iU_i, h_iV_i, h_iW_i), \\ (\Theta,\Phi) &= \textstyle\sum_{i=1}^{I}(-h_i\Theta_y^i, -h_i\Phi_y^i). \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，添え字iは節点 ID，Iは節点数である．式(6)の離散化された変位関数を式(4)のΠに代入することで，板厚要素が定式化される．

(2) 連続体力学との整合

等方弾性体を仮定した厚板理論に基づく厚板要素では，面内変形と面外変形は独立して扱われる．事実，式(1)に示す変位関数を考えると，式(2)に示すように，歪は面内と面外の歪成分に分離できる．分離された歪成分が，それぞれ，応力の面内成分と面外成分に関係するのは，式(3)に示す構成則が等方性であるからである．

異方性の構成則はもちろん，異方性を示す非線形構成則を持つ材料では，構成則を面内変形と面外変形に分離することはできない．後述するように，厚板理論では，面外の直歪ε_{zz}の取り扱いが必要となる．式(1)の変位関数からは$\varepsilon_{zz}=0$であるが，このε_{zz}を使わない限り，厚板の面外方向の直応力σ_{zz}を 0 とすることができなくなるからである．本論文では，$\sigma_{zz}=0$の条件を満たすよう（変位関数からは計算されないものの），非 0 となるε_{zz}を導入する．

ハイブリッド解析モデルでは，ソリッド要素と厚板要素が共存するため，ソリッド要素で使われる 3 次元テンソル形式の構成則が，2 次元厚板要素でも使えることが望ましい．本論文では，変位関数を使うと 0 となるε_{zz}を利用して，コンクリートのテンソル形式構成則を厚板要素に適用する．

3. コンクリート厚板要素

(1) 平面応力状態における塑性問題

3 次元テンソル形式構成則は，本来，6 成分の歪と応力の関係である．弾塑性の場合，歪と応力の増分が使われる．前述のように，通常の面内変形と面外変形に分離した構成則では，ε_{zz}とσ_{zz}が無視されている．本論文ではこの成分を面内変形の構成則に加えた次式を考える．

$$\begin{bmatrix}d\sigma_{xx}\\ d\sigma_{yy}\\ d\sigma_{zz}\\ d\tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}\\ & D_{22} & D_{23} & D_{24}\\ & & D_{33} & D_{34}\\ \mathit{Sym.} & & & D_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\varepsilon_{xx}\\ d\varepsilon_{yy}\\ d\varepsilon_{zz}\\ d\gamma_{xy}\end{bmatrix}. \tag{7}$$

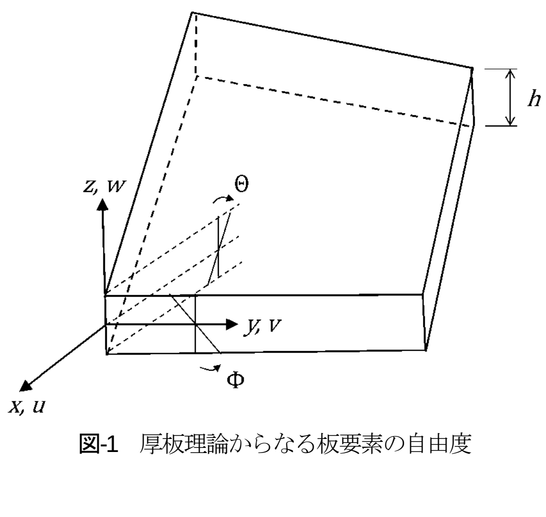


図-1 厚板理論からなる板要素の自由度

$\sigma_{zz} = 0$の条件が課せられているため，$d\sigma_{zz} = 0$であり，この結果,

$$d\varepsilon_{zz} = -(D_{31}d\varepsilon_{xx} + D_{32}d\varepsilon_{yy} + D_{34}d\gamma_{xy})/D_{33} \tag{8}$$

が導かれる．式(8)を式(7)に代入して整理すると，式(3)に示すような，面内の歪成分と応力成分の関係を与える3×3 のマトリクス$\boldsymbol{D}$が得られる．最終的に，厚板要素の増分応力-増分歪関係は以下のとおり表される．

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{yy} \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & kG & 0 \\ \boldsymbol{0}^T & 0 & kG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{0} = [0 \quad 0 \quad 0]^{\boldsymbol{T}}$であり，上添え字$T$は転置，$G = E/2(1+\nu)$はせん断弾性係数である．なお，式(3)の面外変形の構成則を使っているため，式(9)のマトリクスでも，せん断成分に関わる項は対角項のみである．

(2) コンクリート構成則

本論文で用いるコンクリート構成則 [12]は，ひび割れ前の応力-歪関係は**図-2** に示す弾塑性破壊モデル，ひび割れ後の応力-歪関係はひび割れ方向の一軸モデル，として与える．図中のE_0は初期弾性係数，K_0は弾性歪から応力を求めるために補正するパラメータである．前者の弾塑性破壊モデルは下式で表される．

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^E : \boldsymbol{\varepsilon}^E, \qquad d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{l} : d\boldsymbol{\varepsilon}^E. \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{C^E}$は弾性テンソル，$\boldsymbol{\sigma}$は応力テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}^E$と$\boldsymbol{\varepsilon}^P$は弾性と塑性の歪テンソル，$\boldsymbol{l}$はコンクリートの構成関係から求まるテンソル，そして:は 2 階の縮約を表す．応力テンソル増分$d\boldsymbol{\sigma}$と歪テンソル増分$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon^E} + d\boldsymbol{\varepsilon^P}$の関係を$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^{EP} : d\boldsymbol{\varepsilon}$として与える弾塑性テンソル$\boldsymbol{C}^{EP}$は

$$\boldsymbol{C}^{EP} = \boldsymbol{C}^E : (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{l})^{-1} \tag{11}$$

となる．ここで$\boldsymbol{I}$は単位テンソルである．

HPC-FEM では，各ステップにおいて，変位増分$d\boldsymbol{u}$を使って計算された歪増分テンソル$d\boldsymbol{\varepsilon}$から弾性歪増分テンソル$d\boldsymbol{\varepsilon}^E$を計算し，弾性歪テンソル$\boldsymbol{\varepsilon^E}$を更新する．そして式(10)を使って応力$\boldsymbol{\sigma}$を算定する．これに加えて，HPC-FEM では，山下ら [10]の方法を採用しており，式(11)の$\boldsymbol{C}^{EP}$も算定した上で非線形計算を行っている．

(3) コンクリート板要素の定式化

式(11)の$\boldsymbol{C}^{EP}$は 6 成分の歪増分テンソルと応力増分テンソルの関係を与える．マトリクス表示すると次の 6×6のマトリクスとなる．

$$\boldsymbol{C^{EP}} = \begin{bmatrix} c_{11}^{EP} & c_{12}^{EP} & c_{13}^{EP} & c_{14}^{EP} & c_{15}^{EP} & c_{16}^{EP} \\ c_{21}^{EP} & c_{22}^{EP} & c_{23}^{EP} & c_{24}^{EP} & c_{25}^{EP} & c_{26}^{EP} \\ c_{31}^{EP} & c_{32}^{EP} & c_{33}^{EP} & c_{34}^{EP} & c_{35}^{EP} & c_{36}^{EP} \\ c_{41}^{EP} & c_{42}^{EP} & c_{43}^{EP} & c_{44}^{EP} & c_{45}^{EP} & c_{46}^{EP} \\ c_{51}^{EP} & c_{52}^{EP} & c_{53}^{EP} & c_{54}^{EP} & c_{55}^{EP} & c_{56}^{EP} \\ c_{61}^{EP} & c_{62}^{EP} & c_{63}^{EP} & c_{64}^{EP} & c_{65}^{EP} & c_{66}^{EP} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

このマトリクスには恒等的に 0 となる成分はない．したがって，面外せん断歪増分と面外せん断応力増分の関係は，式(9)のような簡単な関係とはならない．

前節で示した$\sigma_{zz} = 0$の条件の取り扱いに倣い，式(12)の$\boldsymbol{C}^{EP}$を使って，5 成分の歪増分と応力増分の関係式を導く．$d\sigma_{zz} = 0$より，

$$d\varepsilon_{zz} = -(c_{31}^{EP}d\varepsilon'_{xx} + c_{32}^{EP}d\varepsilon'_{yy} + c_{34}^{EP}d\gamma'_{xy} + c_{35}^{EP}d\gamma'_{yz} + c_{36}^{EP}d\gamma'_{zx})/c_{33}^{EP} \tag{13}$$

が導かれる．式(13)から歪増分と応力増分の関係式が

$$\begin{bmatrix} d\sigma'_{xx} \\ d\sigma'_{yy} \\ d\tau'_{xy} \\ d\tau'_{yz} \\ d\tau'_{zx} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} c_{11}^{EP} & c_{12}^{EP} & c_{14}^{EP} & c_{15}^{EP} & c_{16}^{EP} \\ c_{21}^{EP} & c_{22}^{EP} & c_{24}^{EP} & c_{25}^{EP} & c_{26}^{EP} \\ c_{41}^{EP} & c_{42}^{EP} & c_{44}^{EP} & c_{45}^{EP} & c_{46}^{EP} \\ c_{51}^{EP} & c_{52}^{EP} & c_{54}^{EP} & c_{55}^{EP} & c_{56}^{EP} \\ c_{61}^{EP} & c_{62}^{EP} & c_{64}^{EP} & c_{65}^{EP} & c_{66}^{EP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{13}^{EP} \\ c_{23}^{EP} \\ c_{43}^{EP} \\ c_{53}^{EP} \\ c_{63}^{EP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{31}^{EP}/c_{33}^{EP} \\ c_{32}^{EP}/c_{33}^{EP} \\ c_{34}^{EP}/c_{33}^{EP} \\ c_{35}^{EP}/c_{33}^{EP} \\ c_{36}^{EP}/c_{33}^{EP} \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} d\varepsilon'_{xx} \\ d\varepsilon'_{yy} \\ d\gamma'_{xy} \\ d\gamma'_{yz} \\ d\gamma'_{zx} \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．式(14)の 5×5 のマトリクスを$\boldsymbol{C}_{5\times5}^{\mathrm{EP}\prime}$とする．式(14)と同様の計算方法で，弾性テンソル$\boldsymbol{C^E}$に対応した 5×5のマトリクスを$\boldsymbol{C}_{5\times5}^{\mathrm{E}\prime}$と置く．

HPC-FEM では，全体剛性マトリクスを使うマトリクス方程式を解く際，共役勾配法を使う．全体剛性マトリクスの次元の二乗に比例して計算量が増える通常のガウス法と異なり，共役勾配法は計算量は全体剛性マトリクスの次元に比例する．したがって，全体剛性マトリクスの次元が大きくなればなるほど，共役勾配法の計算効率が上がる．なお，$\boldsymbol{C}_{5\times5}^{\mathrm{EP}\prime}$をそのまま用いると負勾配となり，共役勾配法を適用できない [2]．そのため，非線形計算時に用いる増分応力-増分歪マトリクスは下記のとおりとした．

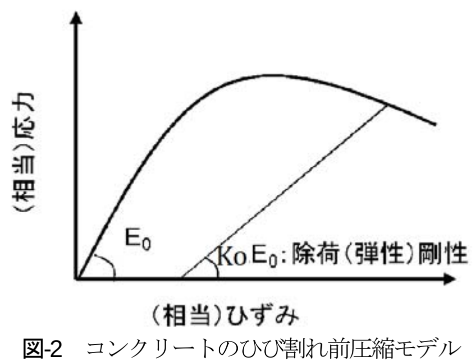


図-2 コンクリートのひび割れ前圧縮モデル

$$\boldsymbol{C}_{5\times5} = w^E\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{E}\prime}_{5\times5} + w^{EP}\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{EP}\prime}_{5\times5}. \tag{15}$$

ここで，w^Eとw^{EP}は$w^E + w^{EP} = 1$を満たす重みで，解析を安定させるため，本論文では$w^E = 0.2$と$w^{EP} = 0.8$としている（同様の値であれば，概ね解析は安定である）．前述のように，この$\boldsymbol{C}_{5\times5}$を使って$d\boldsymbol{u}$を計算し，その後，$d\boldsymbol{\varepsilon}$，$d\boldsymbol{\varepsilon}^E$，$\boldsymbol{\varepsilon}^E$を順に計算し，最後に式(10)を使って応力$\boldsymbol{\sigma}$を算定する．

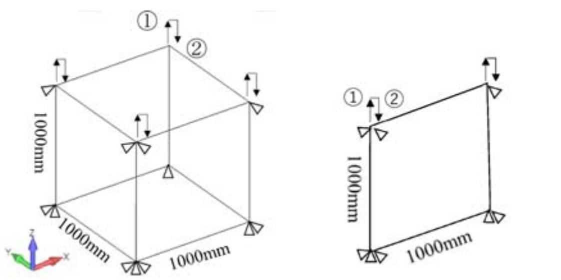
4. 提案する板要素の検証

(1) 要素シミュレーション

1 要素の FEM モデルを用いて要素シミュレーションを行う．ソリッド要素，板要素の解析モデルを**図-3** に示す．板要素については，従前の板要素と提案する板要素の 2 種類により検証する．ここで，従前の板要素とは，板要素の面内方向のみにコンクリート構成則を適用するものであり，面外については従前の厚板理論に倣う要素とする（面外せん断は線形を仮定）．両要素ともに上面の節点に対し，(a)引張から圧縮への変位載荷，(b)面内せん断方向に変位交番載荷，および(c)面外せん断方向に変位交番載荷を与える．コンクリートの材料条件は**表-1** のとおりである．

引張から圧縮，面内せん断，および面外せん断方向載荷時の歪応力関係を**図-4** に示す．引張から圧縮，および面内せん断方向載荷については，3 要素とも同様の挙動を示すことが分かる．コンクリートの特有の非線形挙動であり，提案する板要素においても十分な適用性が確認できる．面外せん断方向載荷については，ソリッド要素と提案する板要素の解析結果は一致する．他方，従前の板要素では面外せん断剛性は線形を仮定しているため，ソリッド要素の結果とは一致しない．

提案する板要素は，面外せん断挙動に対しソリッド要素と同様のコンクリートの剛性低下が確認できる．これは，本要素が連続体と整合したソリッド要素と等価な解析結果を算定可能であることを示しており，原子炉建屋の床や地中構造物の頂部など，鉛直地震動に伴う面外挙動の評価が重要となる場合において，従前の板要素と比較して，提案する板要素の優位性を示したものと言える．

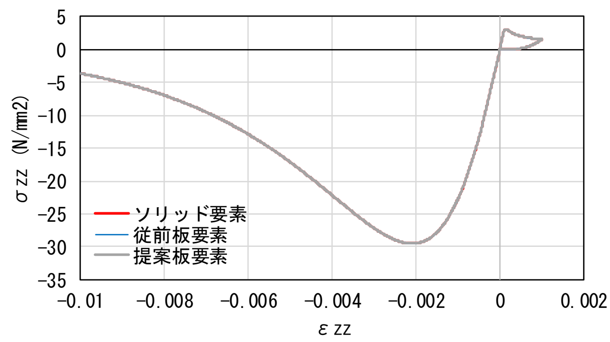


(a) ソリッド要素　　(b) 板要素（厚さ 1,000mm）

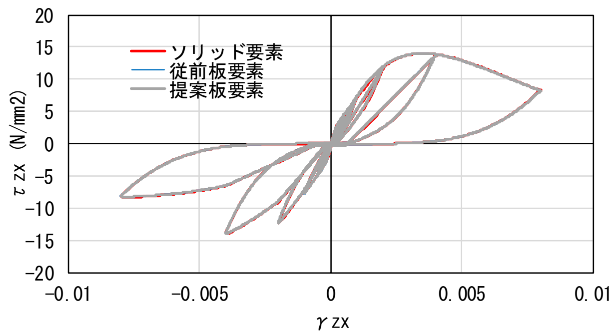
図-3 要素シミュレーションに用いた解析モデル
（引張から圧縮載荷の場合）

表-1 要素シミュレーションに用いた入力物性値

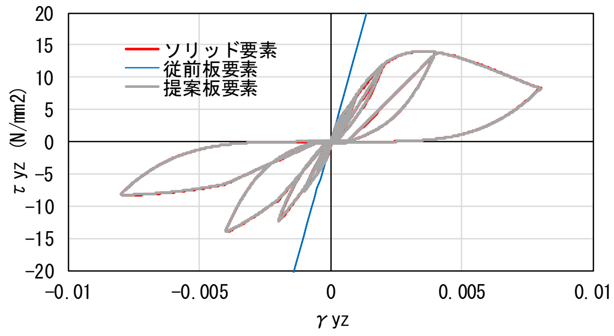
ヤング係数 (N/mm²)	ポアソン比	圧縮強度 (N/mm²)	引張強度 (N/mm²)	破壊パラメータ	圧縮強度に対する歪
2.94×10⁴	0.18	29.4	2.94	0.4	0.002



(a) 引張から圧縮載荷



(b) 面内せん断交番載荷



(c) 面外せん断交番載荷

図-4 要素シミュレーション結果

(2) RC 梁モデルによる検証

次に，**図-5** に示す 100mm×70mm×700mm の簡易な RC 梁を想定した数値実験モデルを用いて，変位載荷による検証を行う．引張鉄筋は D10 を 2 本とした．想定されるせん断ひび割れに対し，数値実験で発生の有無について確認する．

解析モデルを**図-6** に示す．提案する板要素を用いて鉛直に配置したモデルと水平に配置したモデルの 2 ケー

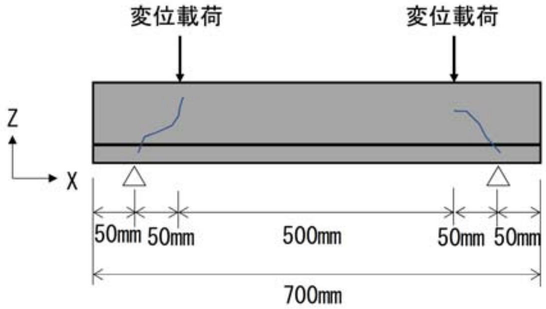
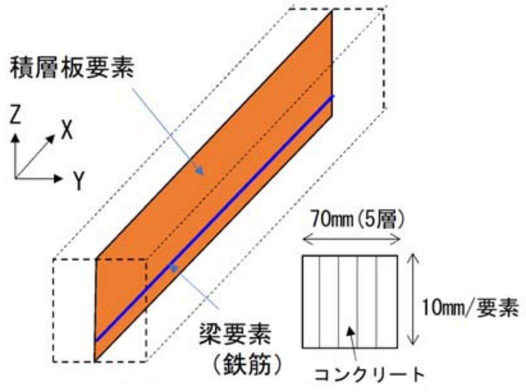
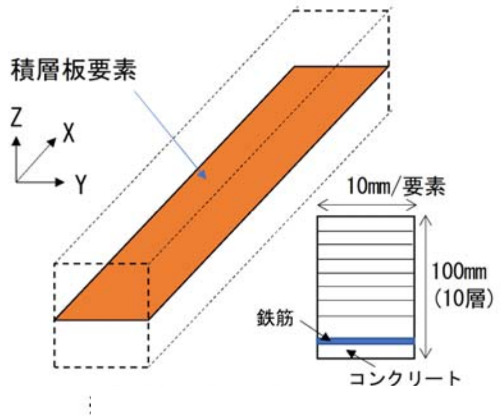


図-5　RC 梁を想定した数値実験モデル



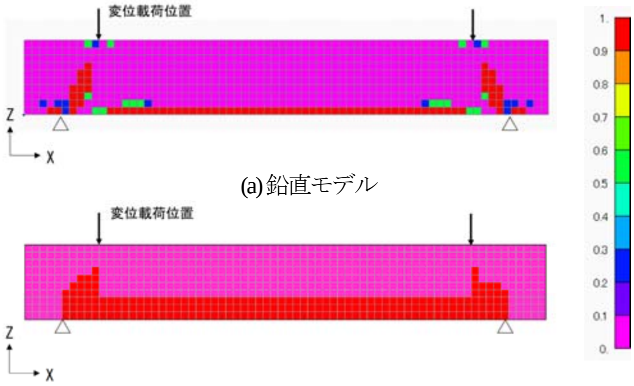
(a) 鉛直モデル



(b) 水平モデル
図-6　RC 梁の解析モデル

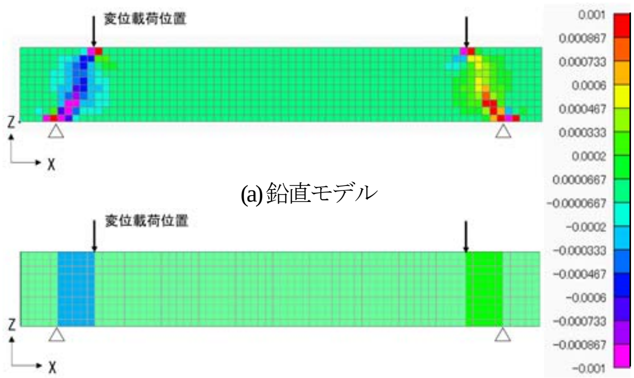
スとする．面外方向については積層構造[12)]を採用し，コンクリートおよび鉄筋を模擬する．コンクリート部分ついては非線形を考慮し，鉄筋については線形材料とする．材料条件は要素シミュレーションと同様とする．

両モデルにおけるひび割れ個数の分布を**図-7** に示す．水平モデルは，各層のひび割れ個数を模式的に ZX 方向に記載している．なお，本図はガウス積分点 4 でひび割れ個数を評価している（4 つともひび割れと判定された場合 1 となる）．鉛直および水平モデルともに，斜め方向のせん断ひび割れが発生していることが確認できる．本要素を用いることで，水平モデルのように扱った場合



(a) 鉛直モデル

(b) 水平モデル
図-7　ひび割れ個数



(a) 鉛直モデル

(b) 水平モデル
図-8　ZX 方向せん断歪分布

でも，面外せん断歪による剛性低下を評価可能なことを示した．

両モデルにおける ZX 方向のせん断歪分布を**図-8** に示す．水平モデルは，各層の面外せん断歪を模式的に ZX 方向に記載している．鉛直モデルでは斜め方向のせん断歪が発生しており，複数要素により面内せん断を考慮可能であることが分かる．当然，ソリッド要素により RC 梁をモデル化した場合においても同様の結果となる．他方，水平モデルでは面外せん断歪は一定となる．これは，面外方向に対し積層構造を採用しているため，式(2)から分かるように，変位関数から求まる面外せん断歪は面外に対し一律となるためである．連続体力学の基本となるソリッド要素によるモデル化とは，この点に関して異なることには留意する必要がある．

5. 動的実験の再現解析

(1) 解析条件

原子力発電技術機構（NUPEC）の多度津試験所で実施された耐震壁による動的破壊試験を対象とした FEM 解析を実施する[14)]．対象となる耐震壁の解析モデルを**図-9** に示す．提案するコンクリート板要素と鉄筋を積層

構造とし耐震壁をモデル化し，上部スラブ，基礎スラブ，Additional Weight ついては，線形ソリッド要素とする．

コンクリートの材料条件を**表-2** に示す．破壊パラメータ，および圧縮強度に対する歪は，参考文献 12)を基に設定する．減衰については，初期剛性比例型減衰を使用する．剛性比例型減衰の係数βは，試験結果 [14]である減衰定数および固有振動数から算定する（$\beta = 2.65 \times 10^{-4}$）．

境界条件は，基礎スラブ底面を加振方向以外固定（YZ 方向）とする．上部および基礎スラブと耐震壁の接合部については節点を共有しており，当該部位の板要素の回転自由度は考慮されない．本試験では，**図-10** に示す入力波形を，対象とする歪レベルに合わせ 5 段階の入力倍率で順に加振している．解析手順としては，実験に合わせ，自重解析後に RUN-1 から RUN-5 まで順に X 方向に加振する．

動的解析手法として積分手法は Newmark-β法（$\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$）とする．動的ステップは 0.001 秒/step とし，RUN ごとに 16,000step となる（総ステップ数は 80,000step）．非線形計算が収束しなかった場合は，次ステップに残差力を持ち越す．

本論文では，0.2%の歪を目標とした RUN-4 と，コンクリートの終局荷重までを対象とした RUN-5 についてその再現性を確認する．

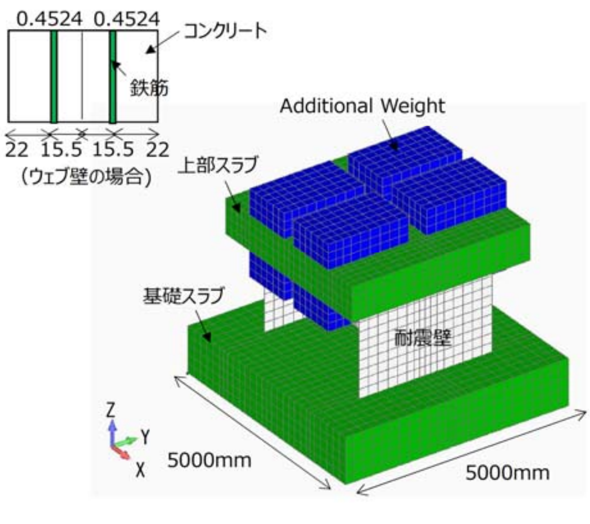


図-9　動的実験の再現解析モデル

表-2　コンクリートの入力物性値

ヤング係数 (N/mm²)	ポアソン比	圧縮強度 (N/mm²)	引張強度 (N/mm²)	破壊パラメータ	圧縮強度に対する歪
2.2948×10^4	0.155	28.6	2.15	1.4	0.00249

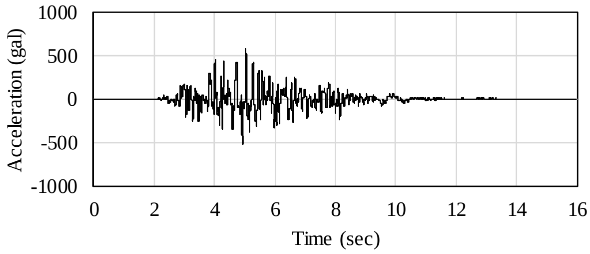
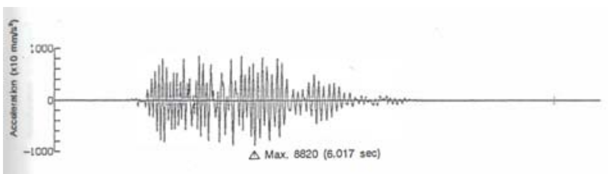


図-10　入力波形（RUN-4 の場合）

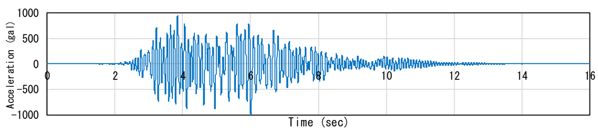
(2)　解析結果

RUN-4 の解析結果を**図-11**，**図-12** に示す．本ケースはせん断変形角 2/1,000 までを想定したケースであり，概ね設計レベルの入力である．繰返し載荷条件で安定して解析が実施できていることが分かる．加速度時刻歴の解析結果は実験結果と一致している．また，変位-慣性力関係においても，履歴形状は原点付近ですぼまる形状であり，実験と整合している．

RUN-5 の解析結果を**図-13**，**図-14** に示す．本ケースは原子力発電所の場合，設計範囲を超えた外力による構造物のフラジリティ評価において必要な応力-歪レベルである．加速度時刻歴の解析結果は，6 秒以降の加速度が緩やかとなる箇所も再現されており実験結果と一致している．コンクリートは終局荷重状態にあり，破壊を模擬する実験結果であるが，せん断変形角 10/1,000 を超える変位-慣性力関係においても概ね再現できることを確認した．

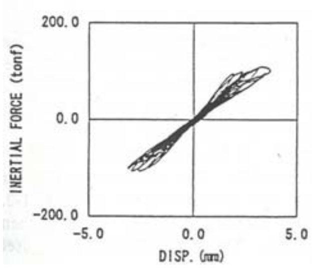


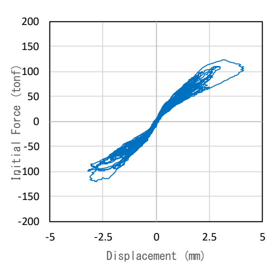
(a) 実験結果



(b) 解析結果

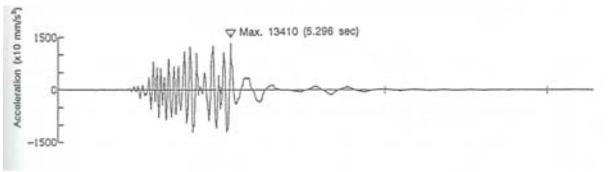
図-11　RUN-4 の加速度時刻歴



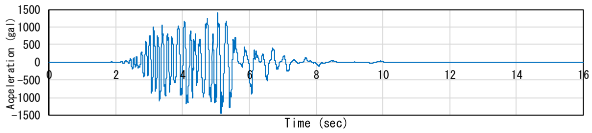


(a) 実験結果　　(b) 解析結果

図-12　RUN-4 の変位-慣性力関係

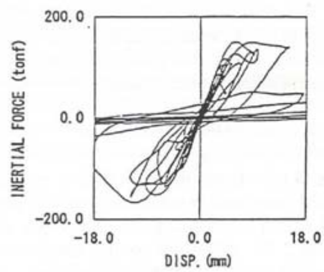


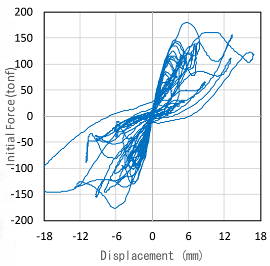
(a) 実験結果



(b) 解析結果

図-13　RUN-5 の加速度時刻歴





(a) 実験結果　　　　　(b) 解析結果

図-14　RUN-5 の変位-慣性力関係

以上の結果より，提案するコンクリート板要素を利用した実験の再現解析において，実験結果を再現することを示し，本要素の妥当性を確認した．

6. おわりに

本論文では，3 次元のテンソル形式のコンクリート構成則からなる厚板要素の定式化を行い，従前の厚板理論からなる要素では再現不可能なコンクリートの面外せん断方向の非線形挙動を再現した．要素レベルから実験レベルまでの数値実験により，ソリッド要素，従前の板要素，提案する板要素の解析結果を比較した結果，従前の板要素に比べ，ソリッド要素の解析結果の再現性を確認し，鉛直地震動に伴う面外挙動の評価が重要となるような問題設定に対して，提案する板要素の優位性を示した．また，連続体の観点から，提案する板要素の数理的な優位性も併せて示した．さらに，せん断歪 1%を超えた動的実験の再現解析においても実験結果を再現できることを示し，本要素の妥当性を確認した．

他方，RC 梁モデルによる数値実験で示したように，面外方向のせん断歪およびせん断応力の再現については，積層構造を採用しても，ソリッド要素のような複雑な分布の再現は構造要素である板要素では十分な再現が困難であることが分かった．連続体とより整合するような構造要素の構築については今後の課題である．

参考文献

1) 堀田渉，鈴木俊一，堀宗朗：大規模 3 次元有限要素解析に適した多重せん断ばねモデルの縮約化と検証，土木学会論文集 A2，Vol.75, No.1, pp.12-22, 2019.
2) 本山紘希，園部秀明，堀田渉，鈴木俊一，堀宗朗：大規模鉄筋コンクリート構造物の詳細モデルを用いた地震応答解析手法の開発とその妥当性確認に関する基礎検討，日本地震工学会論文集，Vol.19，No.5，pp.5_345-5_355，2019.
3) Yoshimura, S., Hori, M. and Ohsaki, M.: High-Performance Computing for Structural Mechanics and Earthquake/Tsunami Engineering, *Springer Tracts in Mechanical Engineering*, 2016.
4) Braun, M., Bischoff, M. and Ramm, E.: Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates, *Computational Mechanics*, No.15, pp.1-18, 1994.
5) 田中真人，野口裕久：ひずみ仮定を用いた非圧縮超弾性シェル要素の開発とその評価，Transactions of JSCES, No.20070002, 2007.
6) 山本剛大，山田貴博，松井和己：板厚変化を考慮したシェル要素の開発，Transactions of JSCES, No.20150004, 2015.
7) Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N.: A formulation of general shell elements -the use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, No.22, pp.697-722, 1986.
8) Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1995.
9) Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J.: A Continuum Mechanics Based, Four-node Shell Element for General Non-linear Analysis, *Engineering Computations*, Vol.1, pp.77-88, 1984.
10) 山下拓三，堀宗朗，小國健二，岡澤重信，牧剛史，高橋良和：大規模有限要素法解析のためのコンクリートの非線形構成則の再定式化，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.67，No.1，pp.145-154，2011.
11) 本山紘希，堀宗朗，秋葉博，田中聖三：コンクリート構成則を用いた大規模有限要素解析のスケーラビリティの観点からの実用性検証，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.73，No.2，pp.211-221，2017.
12) Maekawa, K., Okamura, H. and Pimanmas, A.: *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete*, Taylor & Francis, 2003.
13) Reddy, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, CRC Press, 2004.
14) NEA: Seismic Shear Wall ISP NUPEC's Seismic Ultimate Dynamic Response Test, Comparison Report, NEA/CSNI/R(96)10, 1996.

(Received ?)
(Accepted ?)

IMPLEMENTATION AND VERIFICATION OF THREE-DIMENSIONAL TENSORIAL CONCRETE CONSTITUTIVE RELATION ON TWO-DIMENSIONAL THICK PLATE ELEMENT

Wataru HOTTA, Shunichi SUZUKI and Muneo HORI

Thick plate elements are used in addition to solid elements in large scale three-dimensional finite element method analyses. The nonlinear constitutive relation for reinforced concrete that couples in-plane and out-of-plane deformation could not be applied to ordinary thick plate elements that treat in-plane and out-of-plane constitutive relation separately. In this paper, the nonlinear thick plate element was formulated using the three-dimensional tensorial concrete constitutive relation. Although it was the two-dimensional thick plate element, a more general formulation was performed by processing the six components of strain and stress in order to maintain consistency with continuum mechanics. Based on the formulation, a three-dimensional tensorial constitutive relation for concrete was implemented in a general-purpose thick plate element. The effectiveness of the developed thick plate element was verified by comparing it with the solid element and the conventional thick plate element, and the validation was confirmed by performing the reproduction analysis of the experiment.