地震動位相を模擬するための
非整数レヴィフライト確率過程の構成

佐藤　忠信[1]

[1]正会員　京都大学名誉教授　（〒606-8501京都市左京区吉田本町）
E-mail:satotdnbseu@yahoo.co.jp

地震動位相を確率過程として模擬するための数理を展開する．まず，確率過程のランダム性が独立同分布で生成される乱数列の無相関性に基づくものとし，媒介変数に関して連続で分散を有する独立同分布の確率過程は正規分布で規定され，最も単純な場合には，ウイナー過程になることを明示する．さらに，差分過程の分散が媒介変数間隔のベキ乗則に従い，確率特性が正規分布となる場合には，確率過程は非整数ブラウン運動過程となるが，地震動位相の模擬には使用できないことを示す．最後に，地震動位相差分の確率特性が非ガウス性を有することを誘導し，地震動位相が円振動数に関して微分不可能な過程となることを明確にする．非整数レヴィフライト運動と名付ける確率過程を構築し，地震動位相過程を模擬する．それらを用いて模擬した設計応答スペクトル準拠の加速度時系列を示す．

Key Words : *randomness, Wiener process, power law, fractal, fractional Brownian motion, non-Gaussian, fractional Levy-flight motion, Respose spectrum compatible earthquek motions*

1. まえがき

地震動は断層破壊過程に基づいて発震される震源時間関数が地殻や観測点近傍の表層地盤を透過した後に観測される時刻歴であるので，地震動は震源時間関数と，伝播経路の影響を表現する，P波・S波・表面波・表層地盤近傍の非線形波動伝播特性などから構成される，波動伝達時間関数との合成積となる．合成積をフーリエ変換するすることにより求まる地震動のフーリエ位相は，合成積の基になっている各種時間関数を規定するフーリエ位相の線形和として求めることができる．また，地震動位相は地震波動の主エネルギー到達時間や継続時間，さらには波形の全体的形状を規定するので，地震動位相をモデル化することの重要性は広く認識されている．

現段階では，地震動生成の各種物理過程を確定論的に決定することは困難であるので，各種物理過程に内在する不確定性を総合的に評価して，確率論的な観点から，地震動フーリエ位相を確率過程としてモデル化するための努力[1)~5)] を継続してきた．発表してきた内容は，単純なものから複雑なものへと進化しているが，系統的に記述したものではなかった．本研究では，これまで行ってきた研究内容を再整理し，位相過程を，円振動数に関して連続性を保持しながら，フラクタル特性と非ガウス確率特性とを分離できる確率過程としてモデル化する．

第2章では，確率過程の基本的概念を解説する．確率過程のランダム性が過程を規定する確率密度関数から独立(同)分布で生成される乱数列の無相関性に起因するものとし，それから導かれる幾つかの基本概念を解説する．

第3章では，地震動位相が，円振動数に関して，区分的連続関数で相関性を有することを明示し，その模擬法として非整数ブラウン運動過程の適用可能性を議論する．しかし，位相差分過程の確率特性が正規分布とはならないので，位相を，円振動数に関して区分的連続で相関性を有し，かつ非ガウス性を有する確率率過程としてモデル化しなけらばならないことを明らかにする．

第４章では，地震動位相差分が有しているベキ乗則と非ガウス確率特性とを，相乗積の形式で表現した上で，非整数レヴィフライト運動過程と名付ける，新しい確率過程を定義し，その模擬アルゴリズムを構築する．

2. 確率過程の基本的性質

(1) 確率過程の概念

確率過程は一般性を失うことなく，「有限な実数値区間(確率過程の定義領域)上に定義されたランダム性を有する標本過程の集合」と定義される．説明を簡単にするため，確率変数を大文字でYと表し，その実現値を小文字でyと表現したとき，完備な実数値である媒介変数ωの関数として$Y(\omega)$と表現すれば，それは確率過程となる．この場合，実現値は媒介変数の関数となり$y(\omega)$と表され，それは標本過程と呼ばれる．記号{　}で集合を

表現するものとすれば，確率過程は$Y(\omega)=\{y(\omega)\}$と記述される．注意しておかなければならないのは，集合の要素である$y(\omega)$が，ωの関数である以外に，ωを固定すると$y(\omega)$も完備な実数値として定義されるので，標本過程が無限(非加算)個存在することである．

媒介変数の区分的連続関数として標本過程が定義されている場合には，媒介変数を適切な離散間隔で離散化すれば，標本過程を離散過程として取り扱うことが可能である．また，確率過程では，それが定義される領域以外に，過程のランダム性を定義する確率分布特性が必要になる．したがって，個々の標本過程を規定する確率特性が把握できれば，確率過程が明確に定義できる．

問題は，「標本過程の一つから決定された確率特性を標本過程の集合(確率過程)の確率特性とすることができるのか?」と言う点である．これは，確率過程にエルゴード仮説の成立することを認めればよい．さらに，各標本過程に“定常性”を仮定できれば，一つの標本過程の全離散点上で定義される離散値数列からその確率特性を抽出し，それを確率過程(標本過程の集合)の確率特性とすることが可能となる．物理現象にエルゴード仮説の成立することを証明することは極めて困難であるが，この仮説を採用すると，現象の確率特性が極めてうまく説明できることに疑問を抱く研究者は少ないのが現状である．したがって，証明が必要な「仮定」と言う言葉を避け「仮説」と言う言葉が一般的に使われている．標本過程の“定常性”の成立条件は，本章(4)節で議論する．

(2) 標本過程のランダム性

標本過程のランダム性は，過程を規定する確率密度関数から独立(同)分布で生成した乱数列の無相関性に基づいているものとする．媒介変数に関して相関性を有する場合には，相関マトリックスを介して、独立同分布の乱数列から標本過程が構成されるものとする．相関マトリクスの次元が大きくなると、この方法論は現実的でなくなので，過程の確率特性が正規分布で規定されている場合であっても、非整数ブラウン運動過程[6]のような標本過程の模擬法が必要になる。また、近代確率過程論で広く用いられている確率微分方程式の解[7]として定義される標本過程は，標準正規分布から独立同分布で生成された乱数列で規定されるウイナー増分過程[8]を用いて構成されているので，標本過程のランダム性に対するこの概念は普遍的なものである．標本過程が非ガウス性を示す場合にも、過程のランダム性は同じ概念に基づくものとする。問題は、相関特性を評価する方法論である。

a) 独立同分布の乱数列で構成される標本過程

まず，平均値ゼロで分散σ^2を有する任意の確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$から独立同分布で生成した乱数列$\{Z_j\}$を用いて標本過程を定義し，そのランダム性から誘導される特性を議論する．このために，媒介変数を微小離散間隔$d_0\omega$で離散化した離散点$\{\omega_j\}, \omega_j = j\cdot d_0\omega$を考える．この離散点上で離散化された，離散標本過程$y_j=y(\omega_j)$を考える．まず，乱数列の特性を明確にする目的で，次式で離散標本過程を規定した場合を考察する．

$$y_j = Z_j \tag{1}$$

この場合には，標本過程のランダム性は乱数列の無相関性により直接規定される．さらに，ω_j点における，次式で与えられる，離散標本過程の後退差分を考える．

$$d_0y_j = Z_j - Z_{j-1} \tag{2}$$

Z_jとZ_{j-1}は$p(0,\sigma^2,Z)$から独立に生成した乱数であり互いに無相関であるので，$d_0\omega\to 0$の極限において，$d_0y_j=0$が満たされない．したがって，独立同分布の乱数列を用いて媒介変数に関して連続な標本過程を構成できないことが分かる．

b) 媒介変数に関し連続条件を満たせる標本過程

式(1)の形式で標本過程を定義すると，媒介変数に関する標本過程の連続性が満たされなくなる．ここでは，ランダム性を保持し、媒介変数に関して連続な標本過程が満たすべき条件を明確にする．そのために，差分標本過程d_0y_jが，確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$から独立同分布で生成した乱数列$\{Z_j\}$で表現できる，次式の場合を考える．

$$d_0y_j = Z_j \tag{3}$$

重要なのは式(1)と(3)の違いである．式(1)では標本過程そのものが乱数列であったのに対して，式(3)は差分標本過程が乱数列になっている点である．この場合，d_0y_jの分散$\sigma^2_{d_0y}$は次式で与えられる．

$$\sigma^2_{d_0y} = \sigma^2 \tag{4}$$

$y(\omega)$が媒介変数の連続関数である場合を考えると，d_0y_jをk個トバシにk個ずつ足し込んだ離散媒介変数間隔が$\Delta\omega = kd_0\omega$となるような，差分間隔の大きな差分標本過程は次式で与えられなければならない．

$$\Delta y_j = \sum_{l=1}^{k} d_0 y_{k(j-1)+l} \tag{5}$$

この場合，Z_jが確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$から独立同分布で生成した乱数であることを考慮すれば，Δy_jの分散$\sigma^2_{\Delta y}$は次式で与えられる．

$$\sigma^2_{\Delta y} = k\sigma^2_{d_0y} = k\sigma^2 \tag{6}$$

さらに，中心極限定理からkの値が大きくなれば，Δy_jの確率密度関数は正規分布に収束することになる．ここで問題になるのは，媒介変数は連続な実数値であるので，$d_0\omega$はいくらでも小さく取れることである．そこで，$d_0\omega$を$1/K$倍にした，さらに小さな微小離散媒介変数間隔$d_K\omega = d_0\omega/K$を考えてみる．この場合でも，$d_K\omega$間隔で求めた差分標本過程d_Kyの分散は$\sigma^2_{d_Ky}=\sigma^2$であるから，式(6)は次式のように書き変えられる．

$$\sigma^2_{\Delta y} = kK\sigma^2_{d_Ky} = kK\sigma^2 \tag{7}$$

式(6)と(7)を比較することにより，微小離散媒介変数間

隔の取り方が異なると，$\Delta\omega$間隔での差分標本過程の分散値が異なることが分かる．さらに，媒介変数は連続な実数値であるので実数値の完備性からKの値はいくらでも大きく取ることができるので，$\sigma_{\Delta y}^2$が媒介変数の至る所で無限大に発散することになる．これから差分標本過程を直接乱数列とする過程は連続な標本過程のモデルとして成立しないことが分かる．

この矛盾を無くすためには，$\sigma_{\Delta y}^2$が媒介変数ωに関して連続となる条件を導入すればよい．すなわち，任意の離散媒介変数間隔$\Delta\omega$に対して，$\Delta\omega \to 0$の極限で，$\sigma_{\Delta y}^2 \to 0$となるように分散の表現を修正する必要がある．この条件は，標準偏差$\sigma_{\Delta y}$が次式の関係を満たしており，

$$\sigma_{\Delta y} = a(\Delta\omega)\sigma_0 \quad (8)$$

$\Delta\omega \to 0$のときに，$a(\Delta\omega) \to 0$となればよい．σ_0は適当な定数である．式(8)は任意の離散媒介変数間隔に対して成立しなければならないので，次式の成立することも要求する．

$$\sigma_{d_0 y} = a(d_0\omega)\sigma_0 \quad (9)$$

式(6)の左辺を式(8)で置き換え，式(9)の関係を式(6)の右辺に代入すれば，次式が得られる．

$$a^2(\Delta\omega)\sigma_0^2 = ka^2(d_0\omega)\sigma_0^2 \quad (10)$$

$\Delta\omega = kd_0\omega$であったから，式(10)より関数$a(\ \ )$の拘束条件として次式が得られる．

$$a^2(kd_0\omega) = ka^2(d_0\omega) \quad (11)$$

$d_0\omega$は任意に選べるので，式(11)の関係を満たすことのできる一番単純な関数形式は，次式で与えられる．

$$a(d_0\omega) = \sqrt{d_0\omega} \quad (12)$$

この場合には，当然であるが次式の関係も成立する．

$$a(\Delta\omega) = \sqrt{\Delta\omega} \quad (13)$$

したがて，$\sigma_{\Delta y}^2 = \Delta\omega\sigma_0^2$と表現できる．一方，中心極限定理から，差分標本過程を規定する確率密度関数は確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$がどのようなものであれ，分散$\sigma_{\Delta y}^2$を有する正規分布とならなければならない．この結果，Δy_jの確率密度関数は次式で表現されることになる．

$$p(\Delta y_j) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta\omega}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\Delta y_j)^2}{2\Delta\omega\sigma_0^2}\right\} \quad (14)$$

この場合，離散化された標本過程$\{\Delta y_j\}$は，標準正規確率密度関数$N(0,1)$から独立同分布で生成した乱数列を$\{X_j\}$とすれば，次式で与えられる．

$$\Delta y_j = \sqrt{\Delta\omega}\sigma_0 X_j \quad (15)$$

これは，差分標本過程がウイナー増分(ブラウンノイズ)過程としてモデル化されなければならず，標本過程がウイナー過程[8]となるこを意味している．式(15)から標本過程$y(\omega)$の離散平均勾配過程が次式で定義できる．

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta\omega} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Delta\omega}}X_j \quad (16)$$

これは$\Delta\omega \to 0$の極限で標本過程の媒介変数に対する微係数が無限大に発散することを意味している．すなわち，標本過程が微分不可能な過程となっていることを意味しているが，ウイナー過程が微分不可能な確率過程[8]として定義されることからも容易に理解できる．

なお，$\Delta\omega \to 0$で$\Delta y_j \to 0$であるから，独立同分布の乱数列を用いて媒介変数に関して連続な標本過程を模擬するなら，ウイナー過程とするのが最も簡便で合理的であることが分かる．この場合の離散差分標本過程の確率特性は次式のように表現される．

$$\Delta y_j \sim \sqrt{\Delta\omega}\sigma_0 N(0,1) \quad (17)$$

ここで述べたことは，物理現象を確率過程としてモデル化する際の，かなり厳しい拘束条件となる．それは，媒介変数に関して連続な物理過程を計測し，それを有限個の成分からなる数値列として離散化すると，数値的分散値は必ず求まるので，物理過程を規定する確率密度関数は，分散を有する分布関数としてモデル化するのが合理的に見えるためである．さらに，独立同分布の仮説が成立するとして，物理過程を確率過程として模擬しようとすると，中心極限定理の要請から標本過程の確率密度関数の最も単純な形式が式(14)で表現されるので，物理過程が少なくともウイナー過程として表現されなければならなくなるためである．

(3) 媒介変数に関して相関性を有する標本過程

ここでは，フラクタル特性[9]や長期記憶特性[10]を有している物理過程において，普遍的に観察されている現象を議論する．それは，差分標本過程Δy_jの分散値$\sigma_{\Delta y}^2$が$\Delta\omega$のベキ乗則に従い，次式で表現される場合である．

$$\sigma_{\Delta y}^2 = \sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H} \quad (18)$$

まず，式(18)から誘導される標本過程の相関特性を議論する．そのため，$\Delta\omega = \omega_t - \omega_s$，$\Delta y = y_t - y_s$とおいて，式(18)を書き直すと次式を得る．

$$E[(y_t - y_s)^2] = \sigma_H^2(\omega_t - \omega_s)^{2H} \quad (19)$$

一般性を失うことなく，$\omega_s = 0$で$y_s = 0$と置いてもよいので，次式が成立すると考えても良い．

$$E[y_t^2] = \sigma_H^2\omega_t^{2H} \quad (20)$$

一方，y_tとy_sの自己共分散を$\gamma(y_t, y_s)$とすれば，

$$E[(y_t - y_s)^2] = E[y_t^2] + E[y_s^2] - 2\gamma(y_t, y_s)$$

であるから，次式を得る．

$$\gamma(y_t, y_s) = \frac{\sigma_H^2}{2}\{\omega_t^{2H} + \omega_s^{2H} - (\omega_t - \omega_s)^{2H}\} \quad (21)$$

この結果から，標本過程$y(\omega)$は相関性を有すること，$y(\omega)$の自己共分散が円振動数間隔のみの関数でないので，$y(\omega)$は定常過程でないことが判明する．標本過程の差分に関する自己共分散を計算してみる．$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$と$\Delta y_{t+k} = y_{t+k+1} - y_{t+k}$と置き，$\Delta y_t$と$\Delta y_{t+k}$の自己共分散を$\gamma_{\Delta y}(\Delta y_t, \Delta y_{t+k})$とすれば

$$\begin{aligned}\gamma_{\Delta y}(\Delta y_t, \Delta y_{t+k}) &= Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t+k}) \\ &= E[(y_{t+1}-y_t)(y_{t+k+1}-y_{t+k})] \\ &= \gamma(y_{t+1}, y_{t+k+1}) - \gamma(y_{t+1}, y_{t+k}) \\ &\quad -\gamma(y_t, y_{t+k+1}) + \gamma(y_t, y_{t+k})\end{aligned} \tag{22}$$

となるので，式(21)の関係を代入すれば，次式を得る．

$$\gamma_{\Delta y} = \frac{\sigma_H^2}{2}\{\omega_{k+1}^{2H} - 2\omega_k^{2H} + \omega_{k-1}^{2H}\} = \frac{1}{2}\sigma_H^2\Delta\omega^{2H}\{|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\} \tag{23}$$

これから，ベキ乗則に従う差分標本過程は媒介変数に対して相関性を有するが，定常過程であることが分かる．なお，$\rho_{\Delta y}(\omega_k) = \gamma_{\Delta y}(\omega_k)/\sigma_H^2\Delta\omega^{2H}$で定義される差分標本過程に関する自己共分散関数は離散媒介変数点を規定するステップ数kのみの関数になり，$\Delta\omega$に無関係になる．これから，ベキ乗則に従う標本過程はフラクタルな自己アフィン相似過程[9]になっていることが判明する．この場合に，差分標本過程Δy_jの確率特性が正規分布に従うものとすれば，それは次式で定義される．

$$p(\Delta y_j) = \frac{1}{2\pi(\Delta\omega)^H\sigma_H}\exp\left\{-\frac{(\Delta y_j)^2}{2(\Delta\omega)^{2H}\sigma_H^2}\right\} \tag{24}$$

なお，$\Delta y_j = y - y_j$とし，$\Delta\omega = \omega - \omega_j$と書き直して，$y_j \equiv 0$，$\omega_j \equiv 0$としても一般性を失うことは無いので，式(24)は次式のように書き変えられる．

$$p(\mathrm{y}) = \frac{1}{2\pi\omega^H\sigma_H}\exp\left\{-\frac{(\mathrm{y})^2}{2\omega^{2H}\sigma_H^2}\right\} \tag{25}$$

この確率密度関数に従う確率過程は，Mandelbrot[11]によりその理論が体系づけられ，非整数ブラウン運動過程と名付けられ，その標本過程yは次式で表現されている．

$$y(\omega) - y(0) = c\int_{-\infty}^{\omega} K(\omega,\tau)d\zeta(\tau) \tag{26}$$

ここに，$y(0)$はyの初期条件であり，cは等号を成立させるための係数，$d\zeta(\tau)$は円振動数τにおけるウイナー増分過程で，標準正規乱数Z_τを用いて，次式のように定義される積分関数である

$$d\zeta(\tau) = \sqrt{d\tau}\sigma_w Z_\tau \qquad Z_\tau \sim N(0,1) \tag{27}$$

なお，$K(\omega,\tau)$は積分核で次式で定義される関数である．

$$K(\omega,\tau) = \begin{cases}(\omega-\tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2} & (\tau < 0) \\ (\omega-\tau)^{H-1/2} & (0 \le \tau \le t)\end{cases}$$

したがって，差分標本過程を改めて$\Delta y_j = y(\omega_j) - y(\omega_j - \Delta\omega)$と定義しなおせば，次式を得る．

$$\Delta y_j = c\int_{-\infty}^{\omega} K(\omega,\tau)d\zeta(\tau) - c\int_{-\infty}^{\omega-\Delta\omega} K(\omega-\Delta\omega,\tau)d\zeta(\tau) \tag{28}$$

式(28)で$\Delta\omega \to 0$とすれば，$\Delta y_j \to 0$となるので，非整数ブラウン運動過程でモデル化される標本過程も円振動数に関する連続関数になっていることが分かる．

非整数ブラウン運動過程として模擬した差分標本過程の特性を把握するために，式(28)を離散化すると，次式が得られる[12]．

$$\Delta y_j = a(\Delta\omega)^H\sigma_w\sum_{l=-\infty}^{j} B_{jl}Z_l \tag{29}$$

ここに，$\{Z_l\}\sim N(0,1)$であり，B_{jl}は次式で表現される．

$$B_{jl} = \{(j+1-l)^{H-1/2} - (j-l)^{H-1/2}\} \tag{30}$$

式(29)と(30)を誘導するのに，$\omega_j = j\cdot\Delta\omega, \tau_l = l\cdot\Delta\omega = \omega_l, \psi_j = \psi(\omega_j), K_{jl} = K(\omega_j - \tau_l)$の関係と．$d\zeta(\tau)$の近似として次式を用いた．

$$\Delta\zeta_l = \sqrt{\Delta\omega}\sigma_w Z_l \quad Z_l \sim N(0,1) \tag{31}$$

さらに，$K_{j+1\,j} = K(\omega_j + \Delta\omega - \omega_j) = (\Delta\omega)^{H-1/2}$や次式の関係も考慮する必要がある．

$$\begin{aligned}K_{j+1\,l} - K_{jl} &= K(\omega_j + \Delta\omega - \tau_l) - K(\omega_j - \tau_l) \\ &= B_{jl}(\Delta\omega)^{H-1/2}\end{aligned} \tag{32}$$

なお，$\{Z_l\}$は標準正規分布関数から独立同分布で生成した乱数であるので，次式が成立する．

$$E[Z_kZ_l] = \begin{cases}1 & k = l \\ 0 & k \ne l\end{cases} \tag{33}$$

したがって，式(29)から次式が得られる．

$$E[\Delta y_j^2] = a^2(\Delta\omega)^{2H}\sigma_w^2\sum_{l=-\infty}^{j} B_{jl}^2 \tag{34}$$

式(34)に現れるB_{jl}^2のlに対する無限和は収束することが保障[11]されている．したがって，非整数ブラウン運動過程として模擬された差分標本過程の分散が離散媒介変数間隔のベキ乗則に従うことが明確になる．また，式(29)から明らかになるように，差分標本過程は標準正規乱数列の重み付き和として表現されているので，そのランダム性が保証されること，Δy_jの確率密度関数が正規分布になることも一目瞭然である．媒介変数に対して連続な標本過程は差分標本過程を足し合わせることによって求められるので，y_jの確率密度関数も正規分布になる．

(4) 確率微分方程式に基づく標本過程

標本過程を相関性を有する過程とするためには，確率微分方程式による表現を用いることもできる[7]．簡単のために，線形確率微分方程式を用いて，標本過程$y(\omega)$を書き下せば，次式となる．

$$dy = \{a_1(y,\zeta)\}d\omega + \{b_1(y,\zeta)\}d\zeta \tag{35}$$

ここに，$a_1(y,\zeta)$と$b_1(y,\zeta)$は微分方程式の係数関数であり，両者の最も簡単な表現は，$a_1(y,\zeta) = c_1(\omega)y + c_2(\omega)$と$b_1(y,\zeta) = \sigma_1(\omega)y + \sigma_2(\omega)$であり，$c_1, c_2, \sigma_1, \sigma_2$は微分方程式の係数であり媒介変数の関数として定義され，$d\zeta$は式(27)で定義されたウイナー増分過程である．この場合，平均過程 μ_yと分散過程σ_y^2は次式となる．

$$d\mu_y = \{\{c_1(\omega)\mu_y + c_2(\omega)\}d\omega\}$$

$$d\sigma_y^2 = \{\sigma_1^2(\omega)\sigma_y^2 + 2(c_2(\omega) + \sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega))\mu_y\}\mathrm{d}\omega$$

これらの式から，標本過程に相関性の有ることは明確で

あり，観測して求められる標本過程$y(\omega)$を基に，確率微分方程式の係数を同定できる可能性[13)]も見えてくる．

いま，オイラー近似[7)]を用いて，線形確率微分方程式を漸化式の形式に書き直せば，次式を得る．

$$y_{j+1} = y_j + a_1\left(y_j, \zeta_j\right)\Delta\omega + b_1\left(y_j, \zeta_j\right)\Delta\zeta_j \qquad (36)$$

ここに，$\Delta\zeta_j$は式(31)の形式で表されるウイナー増分過程である．式(36)を用いて，標本過程の初期条件を$y_1 = y_0$と置き，$j = 1,2,\cdots,N-1$と置いて，順次，標本過程をy_Nまで求めれば，標本過程が決定される．標本過程を決定する確率微分方程式の式(36)による近似解は，$\Delta\omega$を十分小さくしておけば，確率 1 で収束することが保障[7)]されているので，初期乱数値を変えることにより，多数の標本関数を生成すれば，確率過程$Y(\omega) = \{y(\omega)\}$が定義できる．差分標本過程は$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$と表されるので，$\Delta\omega \to 0$のときに，式(36)から$\Delta y_j \to 0$となり，標本過程$y(\omega)$の円振動数に関する連続性は保証される．一方$\Delta y_j$の駆動項はウイナー増分過程であるので，そのランダム性は保証されるが，Δy_jの確率密度関数は正規分布にならない．それは，式(36)の漸化式から分かるように，Δy_jには$1 \le l \le j$にわたる全ての$\Delta\zeta_l$が入れ子の状態で包含されているからである．

そこで，最も単純な場合として，c_0とσ_0を定数として，$a_1(y,\zeta) = c_0\phi$と$b_1(y,\zeta) = \sigma_0\phi$とおいた場合について，確率密度関数を計算してみる．この場合，確率微分方程式の解は幾何ブラウン運動[7)]となり，次式で与えられる．

$$y(\omega) = y(0)\exp\left((c_0 - 0.5\sigma_0^2)\omega + \sigma_0\sqrt{\omega}Z_\omega\right) \quad (37)$$

ここに，$y(0)$は$y(\omega)$の初期値であり，厳密な表記は媒介変数ωの初期値ω_0を用いて，$y(\omega_0)$とするべきであるが，$\omega_0 = 0$としたものである．Z_ωは媒介変数ωにおいて標準正規確率密度関数$N(0,1)$より独立同分布で生成された乱数値である．なお$\sqrt{\omega}$の平方根内の厳密な表記は媒介変数ωの初期値ω_0を用いて，$\omega - \omega_0$とするべきものであるが，$\omega_0 = 0$と簡略化している．Z_ωが標準正規確率密度関数に従う確率変数であること，ならびに，式(37)の関係を用いて，確率変数の変換を行えば，yの確率密度関数$p(y)$は次式で与えられる．

$$p(y) = \frac{y_0}{\sqrt{2\pi\omega}\sigma_0 y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\omega\sigma_0^2}\left\{\log\left(\frac{y}{y_0}\right) - (c_0 - 0.5\sigma_0^2)\omega\right\}^2\right) \quad (38)$$

これから，最も単純な確率微分方程式の解として得られる確率過程の確率密度関数であっても，ガウス系の確率密度関数では表現できないことが分かる．

3. 位相過程の基本的数理特性

(1) 位相を確率過程としてモデル化する動機

観測されている地震動の加速度時間関数を$f(t)$とする．各種地震動データベースとして提供されている加速度記録は，時間tに関してリーマン積分可能であることが前提となっている．この場合，$f(t)$のフーリエ変換の積分計算は可能で，次式で与えられる．

$$F(\omega) = R + iI = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt \qquad (39)$$

ここに，ωは円振動数であり，第2章での媒介変数に相当するものである．RとIはフーリエ変換の実数部と虚数部であり，次式で定義される．

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$
$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \qquad (40)$$

ここで，$f(t)$が震源関数$s(t)$とグリーン関数$g(t)$の合成積として次式のように表現できるものとする．

$$f(t) = g(t) * s(t) \qquad (41)$$

ここに，記号$*$は合成積を表す．式(41)の両辺をフーリエ変換すると，次式を得る．

$$F(\omega) = G(\omega)S(\omega)$$

ここに，$F(\omega)$と$G(\omega)$ならびに$S(\omega)$は各々時間関数$f(t)$と$g(t)$ならびに$s(t)$のフーリエ変換である．それらは次式で表現できる．

$$F(\omega) = A(\omega)\exp\left(i\phi(\omega)\right),$$
$$G(\omega) = A_g(\omega)\exp\left(i\phi_g(\omega)\right),$$
$$S(\omega) = A_s(\omega)\exp\left(i\phi_s(\omega)\right)$$

ここに，$A(\omega), A_g(\omega), A_s(\omega)$と$\phi(\omega), \phi_g(\omega), \phi_s(\omega)$は各々フーリエ振幅と位相である．この関係を用いれば，フーリエ振幅に関して次式の関係が得られる．

$$A(\omega) = A_g(\omega)A_s(\omega)$$

一方，フーリエ位相に関しては次式が得られる．

$$\phi(\omega) = \phi_g(\omega) + \phi_s(\omega) \qquad (42)$$

さらに，グリーン関数のフーリエ変換$G(\omega)$が，複数の波動伝達関数のフーリエ変換関数の積として分解可能であるとすれば，$G(\omega) = G_1 \cdot G_2 \cdots G_N$と表現できるので，$G_l(\omega) = A_l(\omega)\exp\left(i\phi_l(\omega)\right)$とすれば，次式の表現を得ることができる．

$$A_g(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdots A_N(\omega)$$
$$\phi_g(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \cdots + \phi_N(\omega)$$

したがって，地震動位相は複数の波動伝播過程に包含されている位相過程の線形和として分解可能になる．

これから，観測記録の位相過程を用いて，波動伝播過程の物理特性を把握できる可能性が見えてくるが，物理過程の不確定性により，震源過程や伝播過程が確定論的に決定できなくとも，地震動位相過程全体を対象として，その確率特性を明確にすることにより，位相過程全体を確率過程としてモデル化できる可能性も見えてくる．

(2) 位相過程は円振動数に関する区分的連続関数

式(40)から，時間関数$f(t)$がリーマン積分可能であれば，$R(\omega)$と$I(\omega)$が円振動数ωの連続関数になることは明白である．一方，地震動加速度記録のフーリエ振幅$A(\omega)$と位相$\phi(\omega)$は次式で定義される．

$$A(\omega) = \sqrt{R^2 + I^2} \tag{43}$$

$$\phi(\omega) = 偏角(F) = 偏角(R + iI) \tag{44}$$

これから，フーリエ振幅は円振動数の連続関数になることは明かであるが，式(44)から求まる位相は主値である$[-\pi, \pi]$内の値しか求まらない．したがって，見かけ上，πごとに不連続性が発生し，円振動数に関して連続な位相を求めるには，アンラップ操作が必要になる．このためには，円振動数ωにおいて複素数Fが乗っているRiman面の枚数を正確に求める必要がある．この煩雑さを避けるため，位相増分$d\phi(\omega)$の計算を次式で行い，

$$d\phi(\omega) = \frac{RdI - IdR}{R^2 + I^2} \tag{45}$$

$d\phi(\omega)$をωに関して積分することによって，$\phi(\omega)$を求める方法論を提案[12]した．この場合，フーリエ振幅が恒等的にゼロになる円振動数点では，位相増分が無限大に発散し，位相はその点で不連続になる．したがって，フーリエ振幅の値が恒等的にゼロになる円振動数点を含めて，式(45)で定義される，位相増分を積分して求められる位相$\phi(\omega)$は円振動数に関する区分的連続関数と扱うことが可能になる．フーリエ振幅が恒等的にゼロになる現象はめったに発生しない現象であることを，典型的な地震動加速度記録で検証した[5]上で，基本的には，位相過程が円振動数の連続過程であるとして，それを次式のように線形遅れ部とそこからの変動部に分解した．

$$\phi(\omega) = -\omega t_0 + \psi(\omega) \tag{46}$$

ここに，$-\omega t_0$は線形位相遅れ部，$\psi(\omega)$はそこからの変動部である．当然であるが，変動部の位相$\psi(\omega)$も基本的には円振動数の連続関数として取り扱うことが可能である．

以下本論文では，位相を確率過程として取り扱うために必要となる情報を総括するが，そのためには，$\phi(\omega)$の確率特性を議論する必要がある．ωt_0は円振動数の線形関数であるから，位相変動部$\psi(\omega)$の確率特性を評価することは位相$\phi(\omega)$の確率特性を評価することと同等になる．そこで本論文の議論では，特に断らない限り，位相変動部である$\psi(\omega)$を位相と呼び，その確率特性を議論する．

(3) 位相過程のフラクタル性

この節では，地震動位相が円振動数に関して相関性を有する過程であり，フラクタル特性を有していることを解説する．

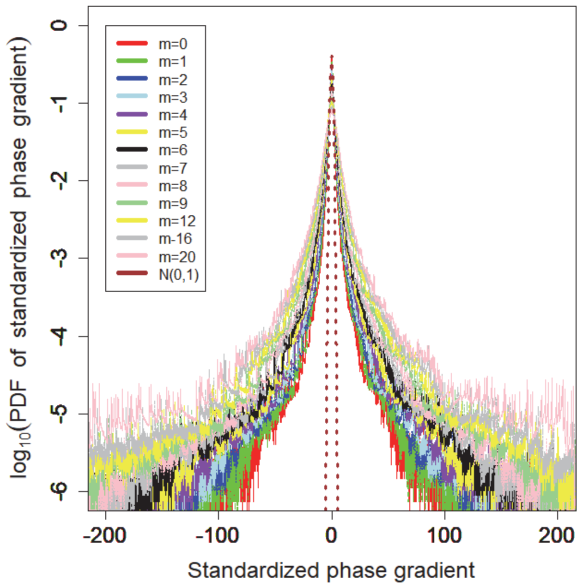

図-1 標準化位相差分$\Delta\psi/(\Delta\omega)^H$の$(m = 0,1,2,\cdots,9,12,16,20)$に対する確率密度関数を描描したもの．$m$値と各曲線に色との対応は凡例に記入．$m$値が大きくなると，裾野部での確率密度値が大きくなるが，いずれも尖り度が大きく，左右対称で，裾野の厚い分布特性を示している．褐色点線は$N(0,1)$であり，標準化位相差分の確率密度関数は正規分布では近似できないことが明白である．

位相差分過程$\{\Delta\psi_j\}$の分散$\sigma_{\Delta\psi}^2$と離散円振動数間隔$\Delta\omega$の間には次式の関係の有ることが，確認[4]されている．

$$E[(\Delta\psi)^2] = \sigma_{\Delta\psi}^2 = \sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H} \tag{47}$$

ここに，σ_Hは分散強度を規定するパラメータで，Hはハースト指数[9,14]と名付けられるれるパラメータであり，$0.5 < H < 1$の範囲の値になることが，わが国で観測されてきた加速度時刻歴を対象として，マグニチュードが5-8，震央距離が数キロから2百数十キロに渡る多数の記録で確認[15]されている．これから，位相差分過程では離散円振動数間隔に関してベキ乗則の成立することが分かる．したがって，第2章におけるyをψに置き換えれば，式(18)から式(23)の議論は，地震動位相に対してもそのまま成立し，位相差分過程の自己共分散関数が離散円振動数点を規定するステップ数のみの関数になり，離散円振動数間隔$\Delta\omega$とは無関係となる．これは，位相差分過程が定常過程であることを示しているのみならず，位相の円振動数に対するフラクタル特性(円振動数に対する局所的変動と大局的変動が相似になる特性)が，位相差分の形式で評価できることを示している．この事実から，位相過程は，相関性を有するフラクタル過程[9]としてモデル化されなければならないことが分かる．

(4) 位相の確率過程を規定する確率密度関数

式(47)に基づけば，位相差分の分散の表現形式を通し

て，その確率特性が見えてくるが，分散は確率密度関数の2次モーメントとして定義されるものであり，確率密度関数の情報が全て把握できるわけではないので，その確率密度関数を直接評価しておくことが必要になる．

微小円振動数間隔を$d_0\omega = 2\pi/dt/2^{29}$とし，式(45)で定義される位相増分の近似値$d_0\phi$を求め，それを足し合わせて$\phi(\omega)$を計算し，$\Delta\omega = 2^m d_0\omega$として，式(46)から$\psi(\omega)$を求め，差分間隔の大きな位相差分を$\Delta\psi_j = \psi(\omega_j) - \psi(\omega_j - \Delta\omega)$で計算し，位相差分$\Delta\psi_j$を$(\Delta\omega)^H$で標準化した$\{Y_m\} = \{\Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H\}$の確率密度関数を描画すると，$m$値のかなり広い範囲に渡って確率密度関数が，次式のように表現できることが判明[3]している．

$$\{Y_m\} = \left\{\frac{\Delta\psi_j}{(\Delta\omega)^H}\right\} \sim p(Y_m, \Delta\omega) \qquad (48)$$

その一例を**図-1**に示す．Y_mは確率変数で標準化位相差分である．これは1993年北海道南西沖地震(M=7.8)の際に寿都町新栄で観測されたEW成分[16](離散時間間隔0.02秒)を用いて，Y_mの確率密度関数を$m = 0,1,2,\cdots,9,12,16,20$に対して同時に描画したものである．凡例に示されている各色実線が，m値に対応している．m値が大きくなるにつれて，確率密度関数の尖り度が減少し，分布特性が扁平になるが，いずれの確率密度関数も確率変数の広い範囲に渡って裾野の厚い分布特性を示している．分布関数のピーク近傍を近似している正規分布$N(0,1)$が褐色点線で表現されているが，各色で識別された確率密度関数は褐色点線から大きく乖離しており，標準化位相差分の確率密度関数が正規確率密度関数で近似できないことが明らかである．

式(48)は，$\{\Delta\psi_j\} \sim (\Delta\omega)^H p(Y_m, \Delta\omega)$と書き直せるので，$\Delta\omega \to 0$の極限では，確率密度関数$p(Y_m, \Delta\omega)$がどのようなものであっても，$\{\Delta\psi_j\} \to \{0\}$となるので，位相の連続性は保持されている．なお，$p(Y_m, \Delta\omega)$が分散$\sigma_0^2(\Delta\omega)$を有する確率密度関数であれば，$d_0\psi_l$の分散は$\sigma_{d\psi}^2 = (d_0\omega)^{2H}\sigma_0^2(d_0\omega)$と表される．また，$\psi(\omega)$は$\omega$の区分連続関数であるので，$d_0\psi_l$を$k$個トバシに$k$個づつ足し合わせた差分間隔の大きな位相差分$\Delta\psi_j$を計算すると，それは式(5)と同じように，次式で表現できる．

$$\Delta\psi_j = \sum_{l=1}^{k} d\psi_{k(j-1)+l} \qquad (j = 1,2,\cdots,M) \qquad (49)$$

今，$d_0\psi_n$と$d_0\psi_m$が$n \neq m$のときに，互いに独立であると仮定できるならば，$\Delta\psi_j$の分散$\sigma_{\Delta\psi}^2$は，中心極限定理と式(49)から，$\sigma_{\Delta\psi}^2 = k\sigma_{d\psi}^2 = k(d_0\omega)^{2H}\sigma_0^2(d_0\omega)$と表現でき，かつ，$k$の値が大きくなれば，$\Delta\psi_j$の確率密度関数$(\Delta\omega)^H p(Y, \Delta\omega)$は正規分布に漸近する．$\Delta\omega$が一定に値に固定されていると，$\Delta\omega = kd_0\omega$における$d_0\omega$いくらでも小さく取ることができるから，$k$はいくらでも大きく取ることができる．これは，$p(Y_m, \Delta\omega)$が常に正

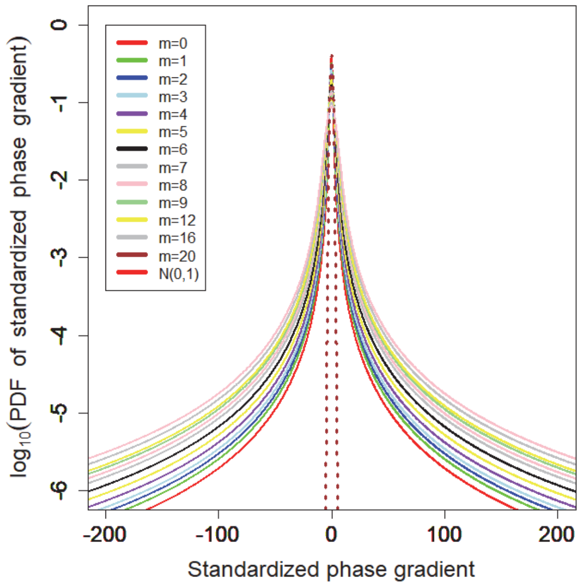

図-2　標準化位相差分の確率密度関数(図-1)から，レヴィフライト確率密度関数のパラメータを同定し，解析解を描画したもの．$\alpha = 1.50$と式(51)で与えられるγ_mを用いて$\Delta\psi/(\Delta\omega)^H = s(\alpha, \gamma_m, Y)$を描画した．$m$値と各曲線の色との対応は図-1の凡例に同じ

規分布になることを要請している．さらに，式(48)から，$\sigma_{\Delta\psi}^2 = (\Delta\omega)^{2H}\sigma_0^2(\Delta\omega) = k^{2H}(d_0\omega)^{2H}\sigma_0^2(\Delta\omega)$でなければならないので，中心極限定理から求められる分散とは一致しない．これら両者が一致するためには，$k^{2H-1}\sigma_0^2(kd_0\omega) = \sigma_0^2(d_0\omega)$となる，非常に特殊な条件が満たされなければならない．したがって，分散を有する任意の確率密度関数から独立同分布で生成された乱数列を用いて，位相差分過程$\{d_0\psi_j\}$を模擬することのできないことが分かる．

一方，**図-1**から明かなように，$p(Y_m, \Delta)$は正規分布では表現できない非ガウス性の分布特性に支配されている．したがって，位相過程を模擬するには，$p(Y_m, \Delta)$を非ガウス系の確率密度関数として表現した上で，式(48)を満たすような確率過程が構成されなければならない．

(5)　位相過程の相関性と確率特性の分離表現

中心極限定理の拘束に縛られず，非ガウス系の確率過程を構成するためには，$p(Y_m, \Delta\omega)$が分散を有しない確率密度関数であればよい．この条件を満たす確率密度関数は多数ある[17]が，用いる確率密度関数から独立同分布で生成される乱数列の和からなる確率変数の確率特性(確率密度関数の再生成)が議論できないと，$p(Y_m, \Delta\omega)$から生成された独立同分布の乱数列を用いて確率過程を構成することが困難になる．この要請に応えられる非ガウス系の確率密度関数の一つとして，レヴィフライト確

率密度関数[18]があるので，式(48)をレヴィフライト確率密度関数$s(\alpha,\gamma,Y)$を用いて次式のように書き直す．

$$\Delta\psi_j \sim (\Delta\omega)^H s(\alpha,\gamma,Y_m) \qquad (50)$$

ここに，αとγは平均値ゼロで原点対称のレヴィフライト確率密度関数（**付録A**を参照）を規定するパラメータで，Y_mは分布関数を規定する確率変数である．

式(50)の特徴は，位相差分の数理特性が，ベキ乗則と確率密度関数の項とに分離して表現されている点にある．これまでの研究成果[4]に基づけば，寿都記録を用いた場合には，最小2乗法で決定した式(47)のベキ乗則の係数として，$H = 0.8085$と$\sigma_H = 8.658$が与えられている．

また，確率密度関数を規定するパラメータであるαとγを，全てのmに対して同定すると，αは離散円振動数間隔$\Delta\omega = 2^m d_0\omega$によらず一定値$\alpha = 1.50$となるが，$\gamma$は$\Delta\omega = 2^m d_0\omega$の関数となる．$m$の異なる曲線群に対して，$\gamma_m = \gamma(\Delta\omega) = \gamma(2^m d_0\omega)$と置いて，**図-1**を用いて，$m = 0,1,2,\cdots,9$, $12,16,20$の13曲線群に対してγ_mを同定すると，m値の順に，次式を得る．

$$\gamma_m = \{0.75,0.90,1.00,1.10,1.25,1.45,1.70, 1.95,2.20,2.40,2.55,2.90,3.25\} \qquad (51)$$

$\alpha = 1.50$とγ_mを用いて，式(50)を次式の表現に書き直したうえで，確率密度関数群を描画したのが**図-2**である．

$$Y_m = \Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H \sim s(1.50,\gamma_m,Y_m) \qquad (52)$$

4. 位相の微分不可能性に関する議論

ここでは、地震動位相が円振動数に関して、微分可能な過程であるかどうかの議論を展開する。野津は位相が円振動数に関して微分可能な関数であるとの議論を展開しているが、この議論には飛躍がある。その点を以下に解説する。野津は、地震動を継続時間Tの時間関数$f(t)$として、そのフーリエ変換$F(\omega)$を次式で与えている。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

$$F(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$$

ここに、$A(\omega)$と$\phi(\omega)$はフーリエ振幅と位相である。

野津論文の最大の問題点は、上式の両辺を形式的にωで微分できるとして、無条件に次式が成立していると考えている点にある。

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_0^T (-it)f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}dt$$

野津論文では、この式の右辺の積分値がωの連続関数として計算できるので、$dF(\omega)/d\omega$はωの連続関数になり、振幅$A(\omega)$がωの連続関数で微分可能な関数なら、「位相$\phi(\omega)$はωの連続関数で微分可能な関数となる」と結論付けている。

しかし、$F(\omega)$がωで微分不可能な関数のときは、上式の演算の成立しないことは、右辺がωの連続関数になるのに、左辺がωの不連続（微分不可能）な関数であるので、一目瞭然である。本章では、「地震動の位相は円振動数に関して微分可能かどうかは簡単に結論付けることはできないので、奥の深い議論が必要である。」との立場に立って、位相の微分可能性を議論する。

(1) 位相の微分不可能性と位相差分過程のベキ乗則

まず，式(52)から，位相平均勾配$\Delta\psi/\Delta\omega$の表現として，次式を得る．

$$\Delta\psi_j/\Delta\omega \sim (\Delta\omega)^{H-1}s(1.50,\gamma_m,Y_m) \qquad (53)$$

$H = 0.8085$であったから，式(53)から，$s(1.5,\gamma_m,Y_m)$の形式にによらず，$\Delta\omega \to 0$の極限で，位相平均勾配の発散することが分かる．したがって，式(46)から，$\Delta\omega \to 0$の極限で群遅延時間$d\phi/d\omega$がωの至る所で発散する．これから位相過程は円振動数ωに関して連続であるが，その微係数がωの至る所で不連続になることが分かる．

なお，レヴィフライト確率密度関数は，分散の定義できない分布関数(**付録A**参照)であるので，位相差分の分散が離散円振動数間隔のベキ乗則に従うという，式(47)のような関係式を，式(50)から直接誘導することはできない．しかし，レヴィフライト確率密度関数では裾野を少しでも切り落とせば，必ず分散値が求まることが明らかになっている[19),20)]．さらに，観測された地震動から求められる位相差分は有限の数値データ列から構成される離散標本過程であり，切り落としが行われた数値データ列と考えることができる．この数値データ列の最小値と最大値を$\Delta\eta_{min}$と$\Delta\eta_{max}$と置き，位相差分の切り落とし値とする．この値に対応するY_mの最小値と最大値をζ_{min}とζ_{max}と置けば，分散の定義できないレヴィフライ確率密度関数であっても，次式で定義される積分値σ_m^2は有限値として求めることが可能である．

$$\sigma_m^2 = \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} Y_m^2\, s(1.50,\gamma_m,Y_m)dY_m \qquad (54)$$

この値を用いれば式(50)，(52)と(54)から次式が得られる

$$E\left[\left(\Delta\psi_j\right)^2\right] = \sigma_{\Delta\psi}^2 = (\Delta\omega)^{2H}\sigma_m^2 \qquad (55)$$

$\sigma_{\Delta\psi}^2$の値は，離散数値列として与えられる$\{\Delta\psi_j\}$から，直接計算可能である．したがって，$m = 0,1,2,\cdots,9,12,16,20$に対して計算される$\sigma_{\Delta\psi}^2$を用いれば，式(55)を用いて$\sigma_m$値を逆算でき，$m$値の順に，次式を得る．

$$\sigma_m = \{3.683,4.025,4.800,5.472,6.212,6.967, 7.672,8.358,9.130,10.03,12.71,13.00,8.502\} \qquad (56)$$

これらの値は，式(47)の係数を最小二乗法によって決めた$\sigma_H = 8.658$には一致せず，かなり広範囲にばらついている．これは，$Y_m = \{\Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H\}$の確率密度関数がレヴィフライト分布に従い，分散の定義できないことに起因している．式(54)で$\zeta_{min} \to -\infty$と$\zeta_{max} \to \infty$とすれば，σ_m^2は無限大に発散するので，σ_m^2の値がζ_{min}とζ_{max}

の値に大きく依存するためである．当然であるが，$\{\Delta\psi_j\}$はサンプル離散標本過程の一つである$\{d_0\psi_l\}$の成分を足し合わせて求められており，m値により，$\Delta\eta_{min}$と$\Delta\eta_{max}$の値が異なるので，ζ_{min}とζ_{max}の値が変動し，σ_m値が異なることになる．注意してほしいのは，式(55)の表現が，位相差分過程の離散円振動数間隔に関する，ベキ乗則の成立することを保証していることである．

(2) 群遅延時間で評価する位相の微分不可能性

式(52)では確率密度関数$s(1.50,\gamma_m,Y_m)$のパラメータγに相当するγ_mが、$\Delta\omega$値が大きくなるとともに、式(51)のように増加する。この増加の割合と$\Delta\omega$値の変化との関係を**図-3** に示した。横軸は$\Delta\omega/d_0\omega=2^m(m=0,1,2,\cdots,9,12,16,20)$の値であり、縦軸は$\gamma_m/\gamma_0$の比である。両軸とも底10の対数値で表示している。○印が観測記録から計算される値である。○印のデータ特性は2つのグループに分けられる。最初の9点である$m=0,1,2,\cdots,8$に属するグループと、後半の4点である$m=9,12,16,20$にに属するグループである。それぞれ、赤色と青色の回帰直線でグループ分けができている。赤色の回帰曲線から、次式が得られる

$$\frac{\gamma_m}{\gamma_0}=\left(\frac{\Delta\omega}{d_0\omega}\right)^{H_r} \tag{57}$$

ここに、$H_r=0.191441$である。一方、**付録A**の式(a3)より、$s(1.50,1,Y)$を満たす確率変数をZ_sとすれば、次式のような確率変数の変換が成立する。

$$Y_0=\frac{d_0\psi}{(d_0\omega)^H}=\gamma_0 Z_s, Y_m=\frac{\Delta\psi}{(\Delta\omega)^H}=\gamma_m Z_s \tag{58}$$

式(57)と(58)から次式が得られる。

$$\frac{d_0\psi}{(d_0\omega)^{H+H_r}}=\frac{\Delta\psi}{(\Delta\omega)^{H+H_r}} \tag{59}$$

なお、寿都記録に対しては、次式が成立する。

$$H+H_r=0.8085+0.1914\cong 1 \tag{60}$$

1993年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された加速度記録の NS 成分にも同様な関係式の成立することに着目し、m値が0~9の範囲($\Delta\omega$がゼロより大きいかなり広範囲)にわたって、次式の成立することを数種の観測記録で確認した[2]。

$$X=\frac{\Delta\psi}{\Delta\omega}\sim s(\alpha_0,\gamma_0,X) \tag{61}$$

図-4 はそれを寿都記録で再確認したものである。この図は、$\Delta\omega$のゼロ近傍では、$\Delta\omega>0$のかなり広範囲に渡り、$\Delta\psi/\Delta\omega$の確率測度がレヴィフライト分布関数で測れることを意味している。一方、レヴィフライ確率密度関数の分散は存在しないので、式(61)から、位相平均勾配の分散が定義できないことも分かる。これは、$\Delta\omega\to 0$の極限として定義されるψの微係数が分散値で測ると存在できないこと、すなわち、位相の微係数(群遅延時間)を分散値で測ると、存在できないことを意味している。

ここで問題になるのは、媒介変数に関して連続な物理現象を観測し、サンプリングすると、そのデータ量は必ず有限量となるので、数値的に分散値を計算することが可能になる点である。すなわち、有限量のデータを用いて、その確率特性を分散の存在しない確率密度関数として評価できるのかと言う点に集約される。一般に、有限量の

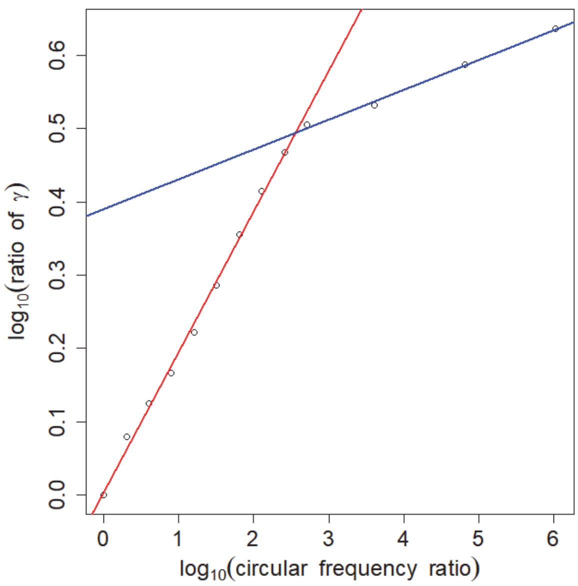

図-3 標準化位相差分$\Delta\psi/(\Delta\omega)^H$の確率密度関数を規定するレヴィフライト分布関数のパラメータ比γ_m/γ_0と離散円振動数比$\Delta\omega/d_0\omega$との関係。赤線の勾配は$H_r=0.191441$となる。

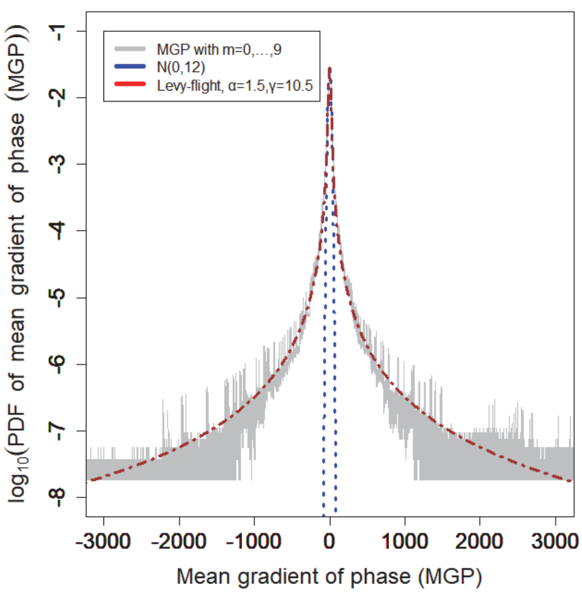

図-4 位相平均勾配の確率密度関数。$d_0\omega=2\pi/dt/2^{29}$間隔での位相差分$d_0\psi$を計算し、それを足し合わせてψを求め、ω点での差分間隔の大きな位相差分を$\Delta\psi=\psi(\omega)-\psi(\omega-\Delta\omega)$として、$\Delta\omega=2^m d_0\omega$ $(m=0,1,2,\cdots,9)$の場合に対して、$\Delta\psi/\Delta\omega$を灰色細実線で描画した。全てが重なっており、褐色一点鎖線のレヴィフライト分布関数$s(1.5,10.5,Y)$で統一的に表現できている。

観測データしか得られないときに、データそのものから分散値が発散することを証明することは困難である。一方、物理や工学現象の確率密度関数をモデル化する場合、そのサポートが無限大になる分布関数(正規分布や対数正規分布のサポートは無限大)を用いることは良く行われている。この場合、分布関数のサポートが無限であることを意識して、データ収集を行うことはほとんど行われていない。普通は、有限区間上で収集されたデータから確率密度関数をなんらかの形式(ヒストグラムが多い)で推定し、設定された分布関数との一致度を、有限区間のデータで、検証しているだけである。データ収集の区間(サポート)は大きければ大きいほど良心的であるが、それを決める合理的方法は提案されていない。

ここでは、位相平均勾配を確率変数とし、それをXと表現すると、Xを計算する$\Delta\omega$値がゼロの近傍で、$X \in [-3000,3000]$となるような広範囲のサポート上で、Xがレヴィフライト分布関数で表現されることを確認している。一方、Xの確率密度値は、10^7のオーダまでレヴィフライト分布関数で表現できていた。この確率密度値をヒストグラムとして表現できるためには、1億回に数回しか発生しない現象が捉えられていることになる。ちなみに、X の確率密度関数がレヴィフライト分布関数$s(1.5, 10.5, X)$で完全に表現できているものとすれば、Xの絶対値が3000より大きくなる確率は6.86×10^{-62}になる。統計的検定の概念によれば、レヴィフライト分布に従うデータの場合、この確率で、$|X| > 3000$ |になる可能性が棄却されることになる。しかし、$X \in [-3000,3000]$上では、Xの確率密度関数が 、$m = 0,1,2,\cdots,9$の範囲では、$\Delta\omega$値によらず、$s(1.5, 10.5, X)$と表現できていたので、$|X| > 3000$の部分でXが$s(1.5, 10.5, X)$から外れるため、Xの確率密度関数がレヴィフライト分布$s(1.5, 10.5, X)$に従わなくなる確率が6.9×10^{-62}であると言い換えることも可能である。これらのことを勘案すると、**図-4**のみから、位相平均勾配の確率尺度が、$\Delta\omega$値がゼロ近傍では、レヴィフライト分布関数で$s(1.5, 10.5, X)$で計測できると考えて良い。

無限のサポートを有し、分散の定義できない確率密度関数を用いて、サンプルデータの確率密度関数を推定する場合には、確率密度関数の一致度のみでなく、そのサポートが無限大になることににも十分な注意を払って置くことが肝要[5]である。

5. 非ガウス確率過程の模擬アルゴリズム

第2章(4)節で議論した，非整数ブラウン運動の差分過程を考えると，その分散特性が離散円振動数間隔のベキ乗則に従うことが，式(34)から明らかになるので，式(26)で定義された，非整数ブラウン運動過程で位相過程が模擬できそうであるが，問題は，位相が円振動数の奇関数であり，原点逆対称の確率過程として次式の関係を満たさなければならないことである．

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \qquad (62)$$

当然であるが，$\psi(\omega) = -\psi(-\omega)$も満たされていなければならない．したがって，$\psi(\omega)$の定義域は$[0, \infty)$でなければならない．この範囲の位相が決まると，$(-\infty, 0)$の範囲の位相は自動的に決まることになる．一方，式(26)の定義域は$(-\infty, \omega]$であるので，当然のことであるが，$\psi(\omega) = y(\omega)$として位相過程を模擬すると，$\psi(\omega) = -\psi(-\omega)$の関係は満たされないことになる．非整数ブラウン運動過程を用いて位相を模擬する場合には，こうした問題点を解消する必要性がある．そこで，式(57)の条件を満たす非整数ブラウン運動過程を修正非整数ブラウン運動過程と命名[21]し，地震動位相を模擬した．

また，第3章(7)節で解説した，地震動の位相平均勾配が従う非ガウス確率特性に基づいて，位相を非ガウス確率過程として模擬するする最初の試み[3]を行った．しかし，確率密度関数が単峰性の場合に限定されていたので，多峰性の場合にも準用できるように，アルゴリズムを修正した[4]．けれども，位相差分が有している円振動数依存性を陽な形式で包含したアルゴリズムにはなっていなかった．そこで，第3章(4)と(5)節で展開した，離散円振動数間隔に関するベキ乗則と非ガウス確率特性との分離表現を満たせる位相差分過程を，非整数レヴィフライト運動過程と命名し，その模擬法を以下に展開する．

非ガウス系の確率過程を構成するためには，設定した非ガウス系の確率密度関数から独立同分布で生成した乱数列から構成される確率過程が，媒介変数(円振動数)の連続関数になり，さらにその増分を足し合わせて求まる確率変数の確率密度関数が，設定した確率密度関数に収束する(再生成の保証される)ような確率過程が必要になる．この条件を満たす非ガウス系の確率密度関数として，レヴィフライト分布関数[18),19),20]を採用し，ウイナー増分過程と同様な性質を持つ確率過程を構成し，それをレヴィフライトノイズ過程と名付けた[3]．まず，その内容を概説する

(1) レヴィフライトノイズ過程の概説

円振動数ωにおいて，標準レヴィフライト確率密度関数$s(\alpha, 1, Z)$から独立同分布で生成された乱数をZ_ωとすれば，円振動数に関して連続なレヴィフライトノイズ過程$d\zeta(\omega)$は次式で定義される．

$$d\zeta(\omega) = (d\omega)^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_b Z_\omega \qquad (63)$$

ここに，γ_bレヴィフライトノイズ過程の振幅を規定するパラメータで，その決定法は後ほど解説する．いま，$d\zeta(\omega)$を微小離散円振動数間隔$d_0\omega$で近似したものを

$d_0\zeta(\omega_l)=d_0\zeta_l$とすれば，式(58)は次式で近似できる．

$$d_0\zeta_l=(d_0\omega)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma_b Z_l \tag{64}$$

ここに，Z_lは$s(\alpha,1,Z)$から独立同分布で生成された乱数値である．なお，$d_0\zeta_l$をk個トバシにk個ずつ足し合わせ，離散円振動数間隔が$\Delta\omega=kd_0\omega$となる，離散間隔の大きなレヴィフライトノイズ過程$\Delta\zeta_j$は次式で与えられる．

$$\Delta\zeta_j=\sum_{l=1}^{k}(d\omega)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma_b Z_{k(j-1)+l} \tag{65}$$

付録Aの式(a3)から，$\Delta\zeta_j=\gamma_{\Delta\zeta}Z_j$と表現でき，$\gamma_{\Delta\zeta}$は式(a5)を用いて，次式のように決定できる．

$$\gamma_{\Delta\zeta}^{\alpha}=k\left((d_0\omega)^{1/\alpha}\gamma_b\right)^{\alpha}=kd_0\omega\gamma_b^{\alpha}=\Delta\omega\gamma_b^{\alpha} \tag{66}$$

したがって，次式が得られる．

$$\Delta\zeta_j=(\Delta\omega)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma_b Z_j \tag{67}$$

式(59)と(62)は同じ形式であるので，式(58)で定義された，レヴィフライトノイズ過程はフラクタル性を有し，かつ再生性の有る確率過程となっている．

(2) 非整数レヴィフライト運動過程の構成と位相の模擬

位相過程は，式(57)の拘束条件を満たさなければならない．また，位相差分が有する離散円振動数依存性と確率密度関数の特性は，式(50)で定義されるので，数理特性が式(50)に従い，式(57)の拘束条件満たように，式(25)から(29)で展開した非整数ブラウン運動過程のアルゴリズムを修正し，非整数レヴィフライト運動過程と名付ける新しい確率過程を定義し，位相過程を模擬する．まず，位相過程は円振動数ωを中心にして，2つの関数の和から構成されるものと考える．それらは，円振動数ゼロからωまでの貢献関数$\psi_1(\omega)$と円振動数∞からωまでの貢献関数$\psi_2(\omega)$であり，次式となる．

$$\psi(\omega)=\psi_1(\omega)+\psi_2(\omega) \tag{68}$$

両関数は，Lebesgue-Stieltjes積分で，次式で表現される．

$$\psi_1(\omega)=c\int_0^{\omega}K_1(\omega-\tau)\,d\zeta(\tau) \tag{69}$$

$$\psi_2(\omega)=c\int_{\omega}^{\infty}K_2(\tau-\omega)\,d\zeta(\tau) \tag{70}$$

ここに，cは次元を合わせるための定数，$d\zeta(\tau)$は式(58)で定義されたレヴィフライトノイズ過程である．$K_1(\omega-\tau)$と$K_2(\tau-\omega)$は積分核で次式で与えられる．

$$\begin{aligned}K_1(\omega-\tau)&=(\omega-\tau)^{\beta}\\K_2(\tau-\omega)&=(\tau-\omega)^{\beta}\end{aligned} \tag{71}$$

βは次式で定義される定数である．

$$\beta=H-1/\alpha \tag{72}$$

注意してほしいのは，式(25)から(29)で展開した非整数ブラウン運動過程の場合には，$\alpha=2$となっていたので，すでに発表済みの修正非整数ブラウン運動過程のアルゴリズム[19]も，$\alpha=2$と置き，$d\zeta(\tau)$をブラウンノイズ(ウイナー増分)過程に置き換えれば，ここで展開するアルゴリズムが，そのまま修正非整数ブラウン運動過程の構成アルゴリズム[21]になることである．なお，$H=1$と置いた場合には，すでに発表済みの位相平均勾配の確率密度関数を用いた位相模擬アルゴリズム[3),4)]に一致する．

式(63)に基づいて，位相差分の計算をする．まず後退差分の計算を行うが，$\psi_1(\omega)$に関しては${}_b\Delta\psi_1(\omega)=\psi_1(\omega)-\psi_1(\omega-\Delta\omega)$で計算できるが，$\psi_1(\omega)$に関しては${}_b\Delta\psi_2(\omega)=\psi_2(\omega)-\psi_2(\omega+\Delta\omega)$にならなければならない．これは，位相の計算基点が$\psi_1(\omega)$では円振動数ゼロであり，$\psi_1(\omega)$では∞になっているためである．したがって，後退差分は両者の和として次式となる．

$$\begin{aligned}{}_b\Delta\psi(\omega)=&\{\psi_1(\omega)-\psi_1(\omega-\Delta\omega)\}\\&+\{\psi_2(\omega)-\psi_2(\omega+\Delta\omega)\}\end{aligned} \tag{73}$$

同様な考察に基づけば，前進差分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}{}_f\Delta\psi(\omega)=&\{\psi_1(\omega+\Delta\omega)-\psi_1(\omega)\}\\&+\{\psi_2(\omega-\Delta\omega)-\psi_2(\omega)\}\end{aligned} \tag{74}$$

式(68)と(69)の平均を取ることにより，位相差分$\Delta\psi(\omega)$は次式で計算できる．

$$\Delta\psi(\omega)=\frac{1}{2}\left\{{}_b\Delta\psi(\omega)+{}_f\Delta\psi(\omega)\right\} \tag{75}$$

式(70)の離散表現を誘導するため，円振動数を離散円振動数間隔$\Delta\omega$で離散化し$\omega_j=j\cdot\Delta\omega$とし，$\omega_j$点における位相差分を$\Delta\psi_j=\Delta\psi(\omega_j)$と表すことにする．この位相差分を用いて，式(52)で定義されている確率変数Y_mの離散点ω_jにおける値を$Y_j(\gamma_m)$と書き直せば，式(52)は次式のようになる．

$$Y_j(\gamma_m)=\Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H\sim s(1.50,\gamma_m,Y_m) \tag{76}$$

いま，nを正整数として，次式の重み係数を考えると，

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{(n+1)^{\beta}-(n-1)^{\beta}\right\} \tag{77}$$

式(70)の関係と参考文献2)の第7章における式展開を参照すれば，式(71)の$Y_j(\gamma_m)$は次式で模擬できることになる．

$$Y_j=c\gamma_b\left\{\sum_{n=1}^{j}a_nZ_{j-n}+Z_j+\sum_{n=1}^{\infty}a_nZ_{j+n}\right\} \tag{78}$$

ここに，$\{Z_l\}$は標準レヴィフライト確率密度関数から独立同分布で生成された乱数列であり，$c\gamma_b$はγ_mを用いて，付録Aに述べた拡張型中心極限定理を用いて，式(76)のように決定される．以下にその誘導過程を記述する．

式(71)と(73)ならびに付録Aの式(a5)の関係を用いると，次式の等式が成立しなければならない．

$$\gamma_m^{\alpha}=c^{\alpha}\gamma_b^{\alpha}\left\{\sum_{n=1}^{j}a_n^{\alpha}+1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}\right\} \tag{79}$$

式(74)の等式が成立するためには，式(74)の右辺第3項が有限値に収束しなければならない．その証明は付録Bに与えられている．一方，$\varepsilon=0.002$となるような値を設定し，式(b6)からLの値を決めれば，$L\le j$となるjに関し

ては，式(73)は次式のように書き変えられ，$\Delta\psi_j$はj点に関して対称で定常な過程として模擬できることになる．

$$\frac{Y_j(\gamma_m)}{c\gamma_b} = \left\{\sum_{n=1}^{L} a_n Z_{j-n} + Z_j + \sum_{n=1}^{L} a_n Z_{j+n}\right\} \quad (80)$$

なお，$c\gamma_b$は式(74)の関係から，次式で与えられる．

$$c\gamma_b = \gamma_m \Big/ \left(\sqrt[\alpha]{\left\{\sum_{n=1}^{L} a_n^\alpha + 1 + \sum_{n=1}^{L} a_n^\alpha\right\}}\right) \quad (81)$$

式(75)に基づいて，$Y_j(\gamma_m)$が模擬できれば，$\Delta\psi_j = Y_j(\gamma_m)(\Delta\omega)^H$として位相差分を計算し，それを足し合わせて$\psi(\omega)$が求まるので，適切な線形位相遅れを足し込むことにより，式(46)に基づいて地震動位相の標本過程が計算できることになる．**図-5** は初期乱数を任意に8個設定して，模擬した$\psi(\omega)$を描画したものである．時刻歴の離散時間間隔が0.02秒であるので，ナイキスト円振動数である$\omega_N = 50\pi$までを描画した．また，離散円振動数間隔を$\Delta\omega = 100\pi/2^{26}$に設定したので，式(51)で与えれれている$\gamma_m = 1.25$と$\alpha = 1.50$を用いて，$Y_j(\gamma_m)$を模擬し$\psi(\omega)$を求めた．なお，$\varepsilon = 0.002$として求めた$L$の値は，7120146である．図中にはピンク・緑・水・黄・灰・紫・赤・青色の8本の曲線が描かれているが，それぞれ初期乱数の違いに対応している．なお，ナイキスト円振動数ω_Nでの，各曲線の値はゼロになっているが，$\Delta\psi_j$を足し込んだ値は自動的にゼロにはならないので，この影響を線形位相遅れ部に組み込むことにして，強制的にゼロとした．褐色の曲線は寿都観測記録から求まる$\psi(\omega)$である．この値がω_N点でゼロになるのは言うまでもない．観測記録から求まる$\psi(\omega)$を含めた9本の曲線群は位相の不確定性を具現化しているので，かなりばらついている．しかし，当然のことであるが，ピンク・緑・水・黄・灰・紫・赤・青色の8本の曲線ならびに褐色曲線で与えられる$\psi(\omega)$から，$\Delta\omega$間隔での位相差分$\Delta\psi$を計算し，$\{Y\} = \{\Delta\psi/(\Delta\omega)^H\}$と標準化した過程の確率密度関数は，全て$s(1.50, 1.25, Y)$に一致する．

図-6は**図-5**に描画した位相変動部に$t_0 = 103\mathrm{s}$となる線形位相遅れを足し込み、位相$\phi(\omega)$を求め、設計応答スペクトル準拠の地震動加速度を模擬した結果である。時刻歴を描画した色の違いは、位相変動部の色に対応している。応答スペクトル準拠地震動を模擬するためには、初期フーリエ振幅スペクトルの設定法やその修正回数などについての考察が必要になるが、すでに発表済みの成果[23]を利用して，初期フーリエ振幅には寿都記録のフーリエ振幅を用い，フーリエ振幅スペクトルの修正回数は26回とした．

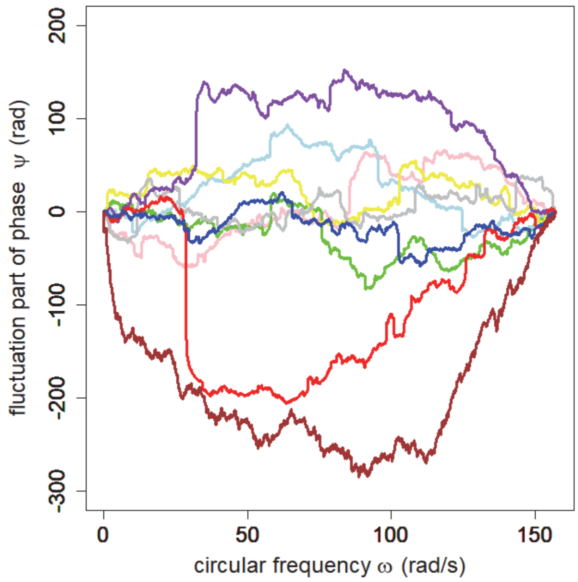

図-5　標準化位相差分$Y_j(\gamma_m) = \Delta\psi_j/(\Delta\omega)^H$を模擬した上で，位相差分$\Delta\psi_j$を求め，それを足し込んで求めた位相$\psi(\omega)$．ピンク・緑・水・黄・灰・紫・赤・青の8色は初期乱数の違いに対応している．時刻歴の離散時間間隔が0.02秒であるので，$\Delta\omega = 100\pi/2^{25}$とした場合である．描画はナイキスト円振動数$\omega_N = 50\pi$までである．褐色線は観測記録から求めた$\psi(\omega)$である．

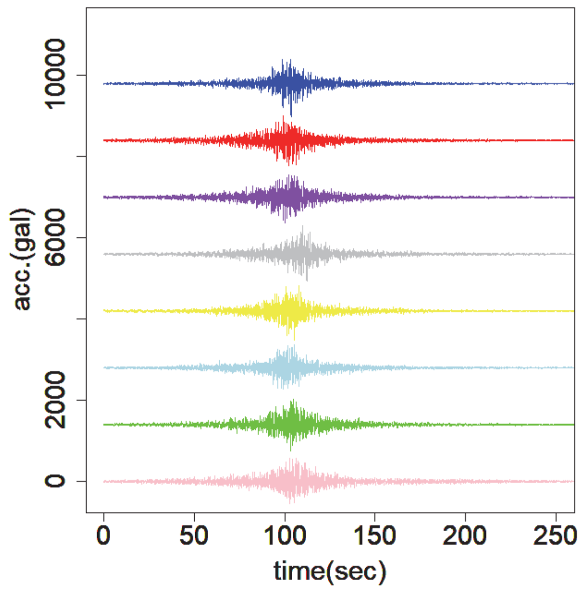

図-6　上図の位相変動部$\psi(\omega)$に$t_0 = 103\mathrm{s}$となる線形位相遅れ部を足し込んで、式(46)で位相を求め、鉄道標準の設計応答加速度スペクトルIIに準拠した加速度時刻歴．ピンク・緑・水・黄・灰・紫・赤・青の8色は**図-3**の初期乱数の違いに対応している．応答スペクトル準拠の地震動は、フーリエ位相スペクトルを固定し、設定した初期フーリエ振幅スペクトルの振幅を補正することによって計算される。フーリエ振幅スペクトルの補正は、補正されたフーリエ振幅スペクトルと固定されたフーリエ位相ペクトルから応答スペクトルを再計算し、それが設計用スペクトルを適切に近似できるまで行われる。補正回数は26回である。

7. むすび

本研究は，地震動位相を模擬する目的でこれまでに行ってきた，研究成果を整理し直し数理展開を系統化するとともに，未解決であった問題点の解決法を議論したものである．

最初に，確率過程のランダム性が過程の確率特性を規定する確率密度関数から，独立同分布で生成される乱数列の無相関性に起因することに着目し，独立同分布の乱数列を用いて生成される，媒介変数に関して連続な確率過程を中心極限定理と連続性の条件のみを用いて展開し，最も単純な場合には，それがウイナー過程になることを明確にした．ウイナー過程は，確率特性が正規分布で，かつ独立同分布の仮定が成立する確率過程として規定されている．

次に，位相過程が円振動数の区分的連続関数であり，円振動数に関して相関性を有していることを明確にした．その上で，その確率特性が正規分布と仮定できる場合には，非整数ブラウン運動過程を，位相の拘束条件を満たすように，修正することにより，位相過程を模擬できる可能性のあることを解説した．

最後に，地震動位相差分の確率分布特性が非ガウス系になることを示し，地震動位相を模擬するためには中心極限定理に拘束されない確率過程が必要になることを明確にした．その上で，位相差分過程を規定する確率密度関数として，分散を有しないレヴィフライト分布関数を用いると，位相が有している確率特性を合理的に評価できることを解説した．さらに，位相差分の円振動数に関する相関性(離散円振動数間隔に対するベキ乗則と同等)と非ガウス性の確率特性とを分離して表現できる関係式を誘導し，それに基づいて非整数レヴィフライト運動過程と命名した，新しい確率過程の模擬アルゴリズムを構成し，地震動位相過程を模擬できることを示した．

この結果，位相平均勾配過程の模擬アルゴリズムで必要であった，位相差分過程の円振動数に関する相関性に起因する，長期記憶に基づく減衰関数の設定が不必要になり，位相差分の模擬アルゴリズムが単純化された．

謝辞：使用した加速度記録は気象庁のデータベース[16]として公開されているものである．なお研究推進には，科学研究費補助金(#18K04334)の補助を受けた．併せて謝意を表す．

付録A　レヴィフライト確率密度関数の概説

レヴィフライト(Nolanは安定分布と命名)確率密度関数[18), 19), 20)]は，平均値ゼロで原点対称の場合，2つのパラメータで定義でき，$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$と表わされる．$\alpha$は確率密度関数の裾野の厚さを制御するパラメータであり，特性指数と呼ばれ，$0<\alpha\leq 2$の範囲で定義される．$\gamma>0$は確率密度関数の広がりを制御するパラメータであり，規模母数と呼ばれ，Xは確率変数である．$s(\alpha,\gamma,X)$の陽な表現形式はないが，その特性関数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\varphi(2\pi\xi,\alpha,\gamma)&=E[\exp(-i2\pi\xi X)]\\&=\exp(-\gamma^{\alpha}|2\pi\xi|^{\alpha})\end{aligned}\tag{a1}$$

Xと$2\pi\xi$はフーリエ変換に用いられる変数の対であり，$E[\ \ ]$は期待値計算を表現する関数である．$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$はこの特性関数のフーリエ逆変換として次式で定義される．

$$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi\xi,\alpha,\gamma)e^{i2\pi\xi X}d(2\pi\xi)\tag{a2}$$

Xのサポートは$[-\infty,\infty]$となる．

なお，$\gamma=1$の場合の$\mathrm{s}(\alpha,1,Z)$は標準レヴィフライト確率密度関数と呼ばれ，確率変数Zと，$s(\alpha,\gamma,X)$からの確率変数Xとの間には，次式の変換関係が成立する．

$$X=\gamma\mathrm{Z}\tag{a3}$$

さらに，$\mathrm{s}(\alpha,\gamma_l,X)$からの確率変数を$X_l$としたときに，$X_l$と$X_j(l\neq j)$が互いに独立であるとして，次式のような重み付き和からなる確率変数X_wを考える．

$$X_w=\sum_{l=1}^{n}w_lX_l\tag{a4}$$

この場合，確率変数X_wの分布特性は再生性を有し，同じパラメータαを有するレヴィフライト分布関数に従い，その確率密度関数は$\mathrm{s}(\alpha,\gamma_w,X)$と表現される．なお，$\gamma_w$は次式で規定される．

$$\gamma_w^{\alpha}=\sum_{l=1}^{n}w_l^{\alpha}\gamma_l^{\alpha}\tag{a5}$$

式(a4)と(a5)は確率密度関数$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$から独立同分布で生成された確率変数の和を取り扱うときの中心極限定理に相当する役割を果たす式に成っている．分散が存在しない$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$から生成された乱数列の和を取り扱うときに重要な役割を果たすので，拡張型中心極限定理[22)]と位置づけられる．

$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$に分散値が存在しないことは以下のように証明される．$\mathrm{s}(\alpha,\gamma,X)$の分散は式(a1)で与えられる特性関数を$(2\pi\xi)$で2階微分し，$-1$を乗じた上で$2\pi\xi\rightarrow 0$とすれば求まる．いま，分散値を$\sigma_X^2$と表せば，そのオーダーは次式で評価できる．

$$O(\sigma_X^2)=O\left(\lim_{\xi\rightarrow 0}(|2\pi\xi|^{\alpha-2})\right)\tag{a6}$$

分布関数が正規分布に一致する場合を除けば，αの値は2未満なので，$2\pi\xi\rightarrow 0$の極限でσ_X^2は∞に発散する．

付録B　式(79)の収束性

式(79)の右辺第3項をγ_Σ^2とすれば，それは次式で与えられる．

$$\gamma_\Sigma^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \tag{b1}$$

いま，nを十分大きな整数Lに置き換えれば，次式の近似が成立する．

$$\begin{aligned} a_L^\alpha &= \left\{\left|\frac{1}{2}\left((L+1)^\beta - (L-1)^\beta\right)\right|\right\}^\alpha \\ &\cong \left(\beta L^{\beta-1}\right)^\alpha = \beta^\alpha L^{\alpha H-1-\alpha} \end{aligned} \tag{b2}$$

γ_Σ^2を$L-1$までとL以上の和に分けると，次式を得る．

$$\begin{aligned} \gamma_\Sigma^\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha = \sum_{n=1}^{L-1} a_n^\alpha + \sum_{n=L}^{\infty} a_n^\alpha \\ &\cong \sum_{n=1}^{L-1} a_n^\alpha + \sum_{n=L}^{\infty} \beta^\alpha n^{\alpha(H-1)-1} \end{aligned} \tag{b3}$$

式(b3)の最後の第2項は次式で近似される．

$$\begin{aligned} \sum_{n=L}^{\infty} \beta^\alpha n^{\alpha(H-1)-1} &= \beta^\alpha \int_L^\infty x^{\alpha(H-1)-1}\, dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\alpha(H-1)} L^{\alpha(H-1)} = \varepsilon \end{aligned} \tag{a4}$$

ハート指数Hの値は$0.5 < H < 1.0$,の範囲にあるので，式(b3)の最後の式の第2項はゼロに収束する．したがって，十分大きなLを取れば，γ_Σ^2は次式で与えられる．

$$\gamma_\Sigma^2 \cong \sum_{n=1}^{L} a_n^2 \tag{b5}$$

この場合，Lの値は十分小さなεを設定(例えば0.002)し，次式に基づいて決定すればよい．

$$\frac{\beta^\alpha}{\alpha(1-H)} L^{\alpha(H-1)} = \varepsilon \tag{b6}$$

参考文献

1) 佐藤忠信：地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈，土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol.70, No.2, pp.295-305, 2014.
2) 佐藤忠信：自己相似仮説から導出される地震動位相の確率特性と地震動振幅の減衰，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol. 70，No.3，pp.463-473，2014.
3) 佐藤忠信：地震動位相差分の特異な確率特性と確率過程 - 分散の定義できない群遅延時間のモデル化 - ，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.73, No.2, pp.344-363, 2017.
4) 佐藤忠信，室野剛隆：地震動観測記録に見る位相平均勾配の特異な確率特性とそのモデル化，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.74，No.2，pp.229-240，2018.
5) 佐藤忠信：地震動加速度時刻歴のフーリエ変換に内在する微分不可能性の本質を探る，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol,7，No,4(地震工学論文集第 37 巻)，pp.I_452-I_463，2018.
6) Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B. and Zhang, T. : *Stochastic Clculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.
7) Mikosch, T. : *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co.,1998.
8) Karatzas, I. and Shreve S.E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.
9) Kenneth Falconer : *Fractal Geometry; Mathematical Foundation and Application,* 2nd ed. John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2003.
10) 松葉育雄：長期記憶過程の統計，自己相似な時系列の理論と方法，共立出版社，2007.
11) Mandelbrot, B. B. and Van, J. W. : Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, Vol.10 (4), pp.422-437, 1968.
12) 佐藤忠信：確率過程として見た地震動位相の不可解性，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vo..72,，No.4(地震工学論文集第 35 巻)，pp.I_831-I_841，2016.
13) Zhang, C., Sato, T. and Lu, L. : A phase of earthquake motions based on stochastic differential equation, *KSCE Joournal of Civil Engineering*, Vol.15, No.1, pp.161-166, 2011.
14) Hurst,H. E., Black, R.P. and Simaika, Y. M.: *Long-term strage: an experimental study,* London, Constable, 1965.
15) Tanaka, K. & Sato T. : Evaluation of inhomogeneous structures in seismic propagation path in Japan based on the fractal characteristic of observed earthquake motion phase, *Proceedings of 16th WCEE*, Paper No.1420, 2017.
16) 国土交通省気象庁，主な地震の強震観測データ，http://www.data.jma.go.jp/svd/eqev/data/kyoshin/jishin/index.html，2017 年 8 月 12 日閲覧.
17) 四辻哲章：計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法，プレアデス出版，第 2 版，2013.
18) Nolan, J. P. : *Stable Distribution: Models for Heavy Tailed Data*, http://academic2.american.edu/~jpnolan/stble/chap1.pdf, 2015 年 11 月 13 日閲覧.
19) Mantegna, R. N. and Stanley : *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexty in Finace,* Cambridge University Prrss, Cambridge, 2000.
20) Voit, J. : *The Statistical Mechanics of Finantial Market*, Third Edition, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, p.120-p.129, 2010.
21) Abdelrahman, A. A., Sato, T., Wan, C. and Wu, Z. : Definition of yield seismic coefficient spectrum for nonlinear seismic design of structural system, *Proceedings of 16th European Conference on Earthquake Engineering,* ID11256, Greece, 2018.
22) Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. : *Limit Distribution for Sums of Independent Random Variables,* English translation by K.L. Chung, revised 1968, Addison- Wesley, 1968.
23) 佐藤忠信・田中浩平・室野剛隆・西村隆義：地震動位相の不確定性が構造物の非線形応答特性に及ぼす影響評価，土木学会論文集 A2(応用力学)，Vol. 74, No.2 (応用力学論文集 Vol.21)，I_213-I_224，2018.

(2019. 9. 10 受付)

FRACTIONAL LEVY-FLIGHT STOCHASTIC PROCESS TO SIMULATE EARTHQUAKE MOTION PHASE

Tadanobu SATO

We discuss several mathematical features of a stochastic process to simulate the earthquake motion phase. First we express that the random nature of the stochastic process is defined by an independent and identically distributed random number property generated from a certain probability density function. If it has the variance we derived that the continuous stochastic process with respect to the circular frequency becomes the Wiener process. Second we derive that the phase process is continuous and correlated process with respect to the circular frequency because the phase difference possesses the power low with respect to the circular frequency interval. Moreover considering the case that its stochastic characteristic obeys the Gaussian nature we discuss the possibly being able to simulate phase process by the fractional Brownian motion process. Finally focusing on the power low of the phase difference with respect to the circular frequency interval and the non-Gaussian distribution characteristic of the standardized phase difference, we developed a new stochastic process named as the fractional Levy-flight motion process to simulate the earthquake motion phase.