骨格曲線に負勾配を有する構造物の 動的応答安定性に関する理論的検討

渡邊　康介[1]・植村　佳大[2]・高橋　良和[3]

[1]学生会員　京都大学大学院　工学研究科（〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂）
E-mail: watanabe.kousuke.75e@st.kyoto-u.ac.jp

[2]学生会員　京都大学大学院　工学研究科（〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂）
E-mail: uemura.keita.35a@st.kyoto-u.ac.jp

[3]正会員　京都大学　教授　工学研究科（〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂）
E-mail: takahashi.yoshikazu.4v@kyoto-u.ac.jp

本研究では、骨格曲線にある程度の靭性と負勾配を有する構造物に関して、終局後の荷重低下領域での動的安定性について、理論的な検討を行う。理論的検討にあたり Caughey により導出された方法を用いる。これは運動方程式に関して、定常応答を仮定して入力と応答の関係式である周波数応答関数を導出し、更に非線形振動特有の運動方程式の解が不安定となる条件を 2 つ導出する方法である。検討の結果、構造物が荷重低下領域で安定した定常応答をする範囲は、骨格曲線の靭性と荷重低下時の剛性により決定されることが分かった。また靭性と荷重低下時の剛性に関して、パラメトリックスタディを行ったところ、靭性が過大の場合，荷重低下領域での動的安定性が確保できない可能性が示唆された。

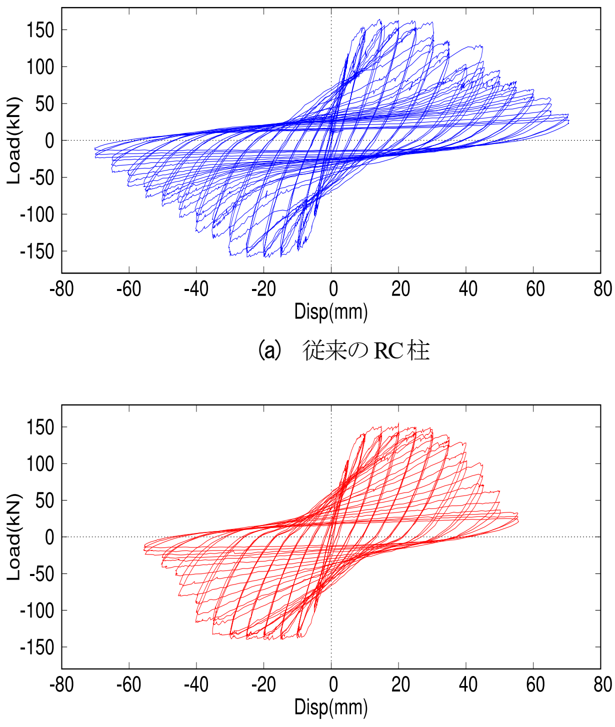
Key Words: *Frequency Response Function, Nonlinearity, Dynamic Stability, Negative Stiffness, Ductility*

1. 背景

東北地方太平洋沖地震の発生を機に，「設計段階で想定していなかった事象においても，構造物が単体またはシステムとして，破滅的な状況に陥らないようにするべき」という危機耐性の概念が提案された．そのため，この危機耐性の実現に向けて，今までの耐震設計の枠組における議論に加えて，耐震設計で制御してきた範囲を超えた不測の事態に対処するための配慮が必要となっている．

このような背景のもと，筆者らは終局後の荷重低下が緩やかである構造が危機耐性に資する構造であると考え，RC 柱における技術開発を行っている．例えば，筆者らが提案した埋め込みメナーゼヒンジ RC 柱 [1]では，従来の塑性ヒンジ形成とは別の新たなメカニズムによって構造ヒンジ機能を保証することで，従来の RC 柱と比べて設計上の終局後の荷重低下が緩やかになることが明らかとなった(図-1)．しかしながら，これは正負交番載荷実験により得られた結果であり，荷重低下領域での動的応答特性に関してさらなる検討が必要であるといえる．

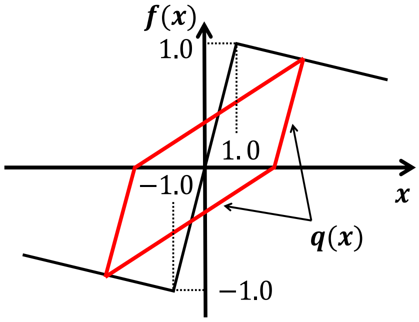
現在，構造物の動的応答特性は数値解析を用いて検討



(a)　従来の RC 柱

(b)　五島らによる提案構造

図-1　荷重変位関係



図–2　復元力特性

されるのが一般的である．しかし，数値解析では結果が入力特性に依存するため，一般性のある議論が行えないという側面がある．そのような中，数値解析が盛んでなかった時代において，Caughey[2]は一質点系の非線形動的振動に対して定常振動を仮定した理論的検討を行っている．その際，Caughey[2]は入力と応答の関係式として非線形振動における周波数応答関数を導出することで，構造システムの最大応答値や動的安定性に関する理論的検討を可能としている．またCapecchi[3), 4]らは，骨格曲線に負勾配を有する構造システムに対してCaughey[2]の方法を適用することで，骨格曲線に負勾配が存在する場合の周波数応答関数の特徴および動的安定性について検討している．しかし，その検討は降伏後直ちに骨格曲線が負勾配となる復元力モデルに対してのみ実施されている．そのため，Caughey[2]が提案した非線形の周波数応答関数を用いた理論的検討をRC構造物の動的応答に適用するためには，RC部材のように降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる復元力モデルを対象とした検討が必要であるといえる．

そこで本研究では，RC 柱の荷重低下領域における動的安定性の検討に向けて，非線形構造システムにおける周波数応答関数を求める Caughey[2]の方法に着目し，降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる構造システムの動的応答に関する検討を理論的に行った．

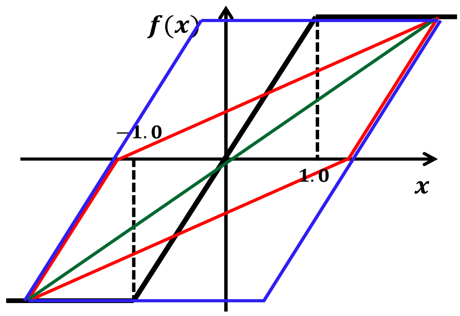
2.　非線形構造システムでの周波数応答関数

(1)　非線形構造システムに対する変位の周波数応答関数

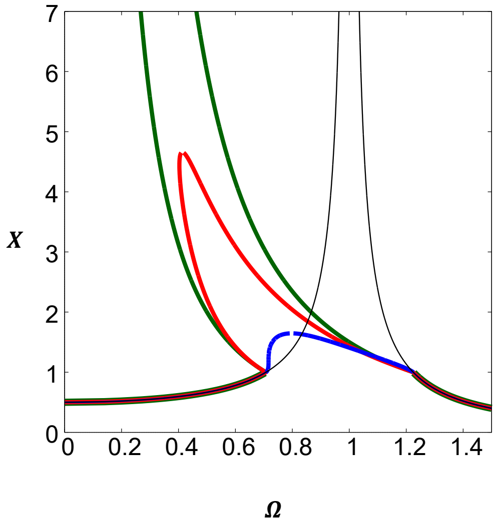
Caughey[2]は1自由度系の運動方程式である式(1)に対し，式(2)に示す定常振動解を仮定することで，非線形構造システムに対する変位の周波数応答関数である式(6)を導いた．

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 f(x) - \frac{{\omega_0}^2}{\gamma} cos\omega t = 0 \tag{1}$$

$$x = Xcos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$



(a)　履歴モデル



(b)　周波数応答関数(γ=2.0)

図–3　履歴による周波数応答関数の違い

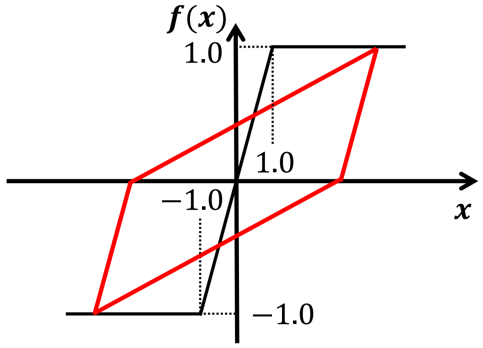
$$\theta = \omega t + \varphi \tag{3}$$

$$C(X) = \frac{1}{X}\int_0^{2\pi} q(Xcos\theta)cos\theta d\theta \tag{4}$$

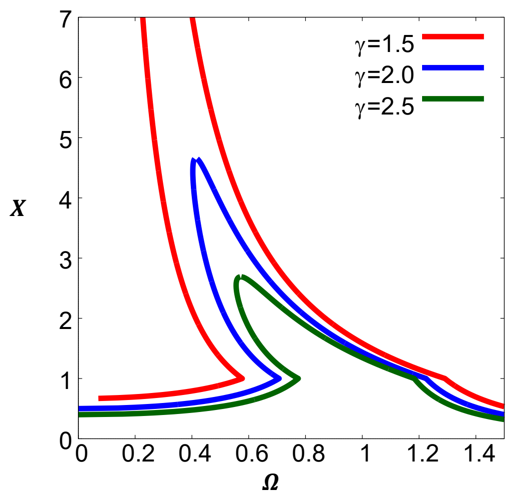
$$S(X) = \frac{1}{X}\int_0^{2\pi} q(Xcos\theta)sin\theta d\theta \tag{5}$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{X}\left\{C(X) \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - S(X)^2}\right\} \tag{6}$$

ここに，x，$f(x)$は変位および復元力をそれぞれ降伏値で除したもの，ω_0は固有周波数，γは降伏荷重を外力の振幅で除したもの，ωは外力周波数，Ωはω_0をωで徐したもの，Xは応答振幅，φは外力と変位の位相差，tは時刻である.また$q(x)$は履歴曲線を表す関数である(図–2).ここで，式(6)に示す周波数応答関数には，外力のパラメータであるγや骨格曲線の形状に関する関数である$C(X)$，$S(X)$が含まれている．そこで次項にて，外力の影響や復元力モデルに関するパラメータが周波数応答関数の形状に与える影響について示す.

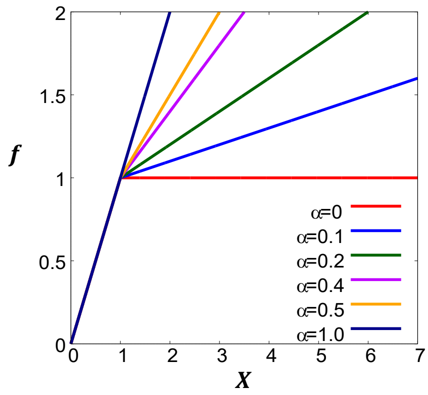


(a) 骨格曲線

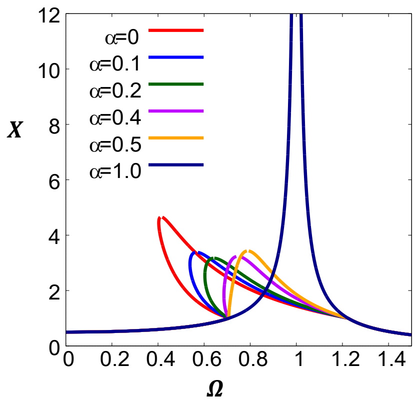


(b) 周波数応答関数(γ=2.0)

図-4　外力による周波数応答関数の違い



(a)　骨格曲線



(b) 周波数応答関数(γ=2.0)

図-5　二次剛性を正の範囲で変化させた場合の周波数応答関数の違い

(2)　周波数応答関数のグラフ

a)　履歴形状による周波数応答関数の違い

一般に非線形構造物システムにおける動的応答特性は，その復元力モデルの履歴曲線の特性によって変化することが知られている．そのため，骨格曲線が同一の構造であっても，その履歴形状が異なれば，構造システムは異なった応答を示す．ここで，**図-3**にエネルギー吸収量の異なる3つの履歴モデルに対する周波数応答関数を示す．なお，その際の骨格曲線はすべて完全弾塑性であり，外力のパラメータは$\gamma = 2.0$とした．**図-3**を見ると，履歴吸収エネルギーが増加するほど，応答振幅Xが減少することが分かる．また全ての履歴形状において，線形の場合と比較して，応答値が低周波数側に移行していることがわかる．これは，非線形構造物では変位が増大するに従って，固有周期が長周期化するためである．

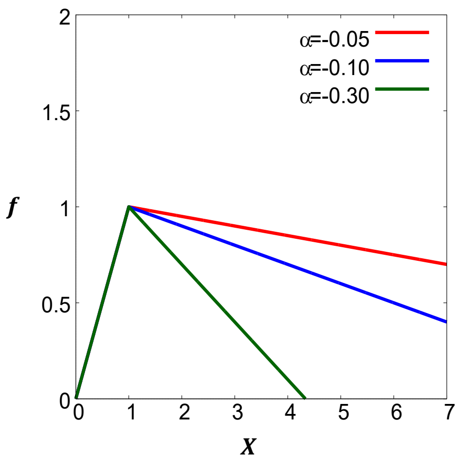
なお本論文における以降の検討では，RC部材の履歴形状に近いCase2の履歴曲線を有する復元力モデルに関して検討を行うものとする．

b)　外力の大きさによる周波数応答関数の違い

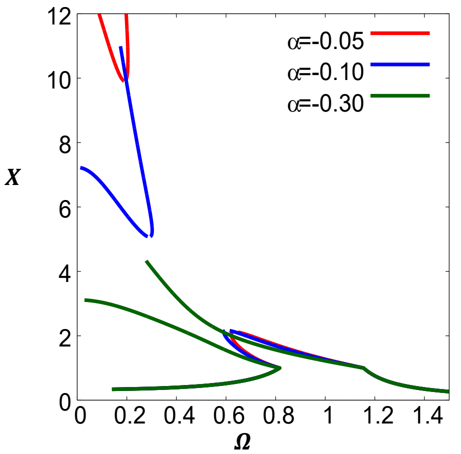
図-4に外力の大小による周波数応答関数の違いを示す．ここでγは降伏荷重を外力の振幅で除したものであり，外力が増加するほどγが減少することに注意されたい．**図-4** (b) より，外力が増加するほど，応答振幅Xは増加することがわかる．しかし非線形の周波数応答関数では，線形の場合のように外力の大きさと応答振幅の大きさが比例しないため，周波数応答関数の重ね合わせができないという側面がある．

c)　二次剛性による周波数応答関数の違い

本項では，骨格曲線の二次剛性が周波数応答関数の形状に与える影響について述べる．**図-5** に骨格曲線の二次剛性の値をゼロから 1 までの正の範囲で変化させた場合の周波数応答関数を示す．**図-5** (b) を見ると，二次剛性の値が増加するに従い，応答のピークが高周波数比側に移行していくことが分かる．これは構造システムが非線形化した際の固有周期の長周期化が軽減されることで，固有周波数が高周波数側にとどまることが原因である．また二次剛性が増加するにつれ，ピーク時の応答振幅 X は減少し，その後 α = -0.4 の値を境に，再び増加するこ



(a)　骨格曲線



(b) 周波数応答関数(γ=3.0)

図-6　二次剛性を負の範囲で変化させた場合の周波数応答関数の違い

とが分かる．これは，二次剛性が増加すると，変形に対する抵抗力が増加する一方で，履歴形状が線形に近づくと履歴減衰の減少による影響が顕著になるためである．

次に，骨格曲線の二次剛性の値を負の範囲で変化させた場合の周波数応答関数を**図-6**(b)に示す．**図-6**(b)より，二次剛性を正の範囲で変化させた時と同様に，負勾配が緩やかになるにつれて，応答のピークが高周波数側に移行していくことが分かる．また二次剛性の値によっては，周波数応答関数が2つに分離することがわかる．これは，二次剛性がゼロ以上の場合では見られない現象であり，二次剛性が負となる場合の周波数応答関数の特徴であるといえる．また，**図-6**(b)を見ると，ある応答振幅で周波数応答関数が途切れていることがわかる．これは，荷重低下領域において，変位に対する復元力の値がゼロとなる点が存在するため，その点を超えた応答値が算出できないことが原因である．

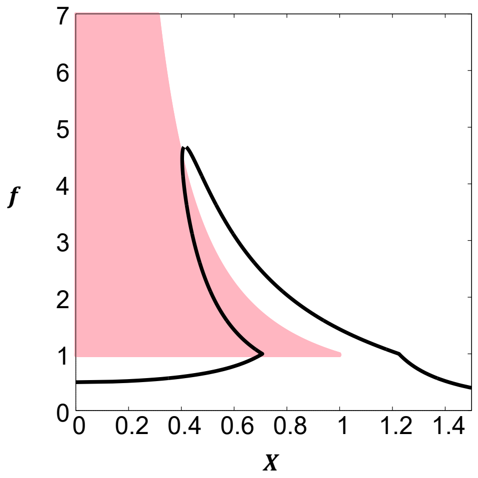


図-7　式(7)による不安定領域(γ=2.0)

(3) 不安定条件の導出

先述したように，Caughey[2]は非線形構造システムの動的応答に対し，定常振動を仮定することで変位の周波数応答関数を導出した．その際，その定常振動の振幅Xと位相差φにわずかな変化を与えたとしても，その振動が一定時間経過後に元の定常振動に戻るかを検討することで，構造システムの動的安定性について議論している．その結果，以下の式(7)，式(8)に示す構造システムの不安定条件を導出した．

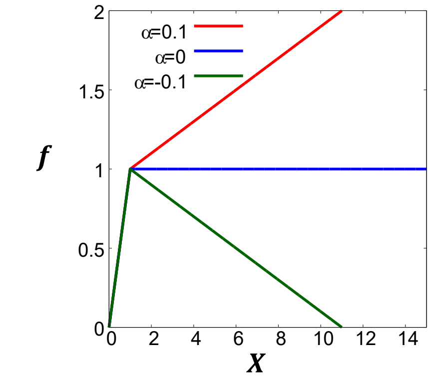
$$\frac{dS}{dX}S(X)+\{C(X)-\Omega^2X\}\left(\frac{dC}{dX}-\Omega^2\right)\leq 0 \tag{7}$$

$$\frac{dS}{dX}+\frac{S(X)}{X}\leq 0 \tag{8}$$

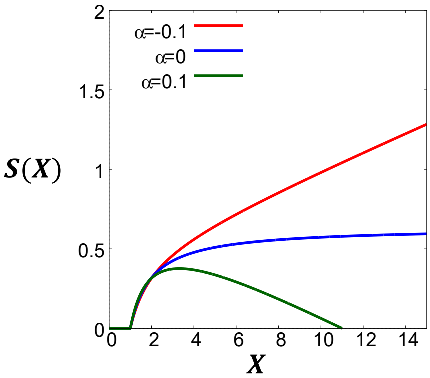
この式(7)，式(8)の一方でも満たした場合，構造システムが示す定常振動解は不安定となり，現実には現れない解となる．なお，この議論における不安定とは，構造システムの定常振動が発散するという意味ではなく，振動が定常でなくなることを意味する．また，式(7)，式(8)中には，外力のパラメータであるγが含まれていないため，不安定領域は外力の大きさには依存せず，構造システムに関するパラメータのみで導出できる．以降，式(7)および式(8)が示す不安定領域の詳細について述べる．

a)　式(7)による不安定領域

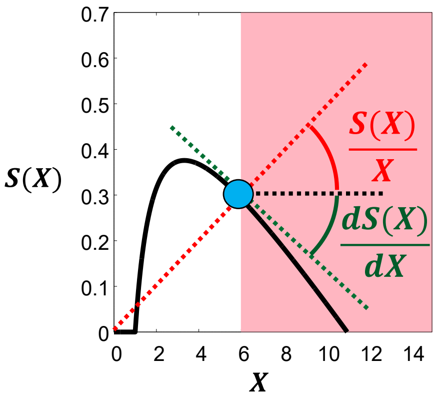
図-4(a)のような骨格曲線が完全弾塑性であるモデルを例に，式(7)による不安定領域について述べる．**図-7**を見ると，式(7)による不安定領域は，ある周波数比Ωに対して応答振幅Xが複数存在する領域に現れていることがわかる．そして不安定領域に入る解は，小振幅のものから数えて2番目のものに対応しており，最大振幅を持つ解と最小振幅を持つ解の間に挟まれている解であることが分かる．



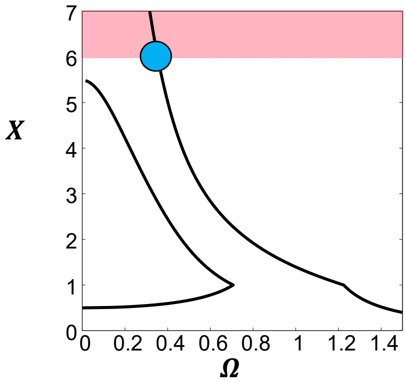
(a)　二次剛性を変化させた場合の骨格曲線



(b)　二次剛性を変化させた場合の $S(X)$



(c)　二次剛性が負の場合の $S(X)$



(d)　二次剛性が負の場合の周波数応答関数 (γ=2.0)

図-8　式(8)による不安定領域

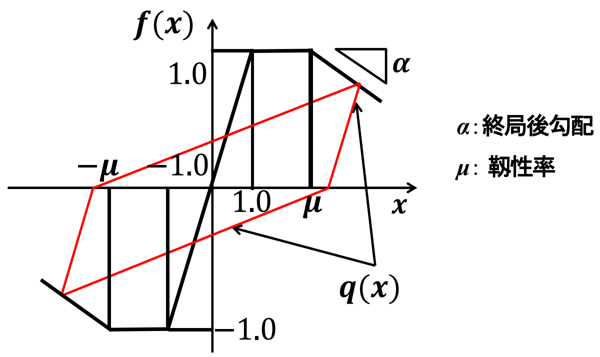


図-9　復元力特性パラメータ

b)　式(8)による不安定領域

式(8)による不安定領域は骨格曲線の形状に関する関数$S(X)$に関係しており，関数$S(X)$のグラフ上の点における接線勾配$dS(X)/dX$と割線勾配$S(X)/X$の和の正負により判定できる．その際，割線勾配$S(X)/X$はどのような骨格曲線に対しても正の値を取り，接線勾配$dS(X)/dX$は骨格曲線に負勾配を有する場合のみ負の値を取り得るとされている．そのため，式(8)による不安定領域は骨格曲線に負勾配を有する場合のみ存在することがわかる(図-8)．

そこで本研究では，RC柱の荷重低下領域における動的安定性の検討に向けて，骨格曲線に負勾配を有する構造システムにおいてのみ発生する式(8)による不安定領域に着目し，検討を行うこととした．

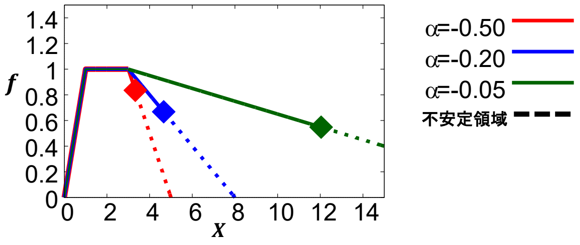
3.　骨格曲線に負勾配を有する構造システムの動的安定性についての検討

(1)　本検討の概要

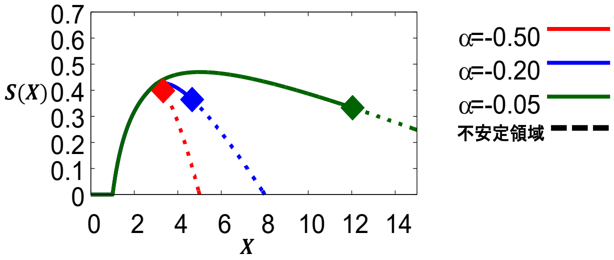
本章では，RC 部材のように降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる構造システムの動的安定性について，式(8)が示す不安定条件を用いて検討する．その際，荷重低下が開始する点でのXの値を靭性率 μ，荷重低下域での骨格曲線の勾配を終局後勾配 α，式(8)が示す定常振動の不安定境界 (式(8)の等号成立時のXの値)をX_lと定義する．そして，関数 $S(X)$および式(8)が示す不安定条件に対し，骨格曲線における終局後勾配 αと靭性率 μ をパラメータとした検討を行った．

(2)　終局後勾配 α と靭性率 μ が関数 $S(X)$と不安定領域に与える影響

本項では，終局後勾配αと靭性率μの値を変化させた際の，関数$S(X)$と不安定領域の変化を検討する．図−

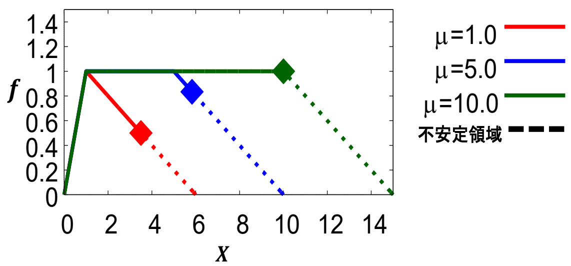


(a)　骨格曲線

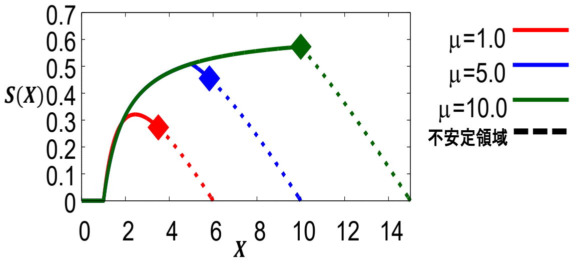


(b)　関数 $S(X)$

図-9　終局後勾配 α による関数 $S(X)$の違い



(a)　骨格曲線



(b)　関数 $S(X)$

図-10　靭性率 μによる関数 $S(X)$の違い

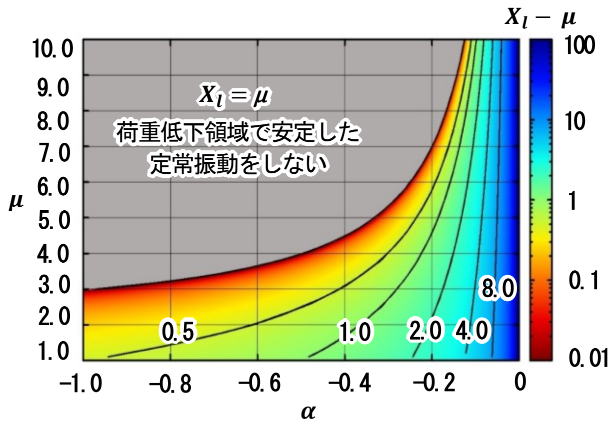
9(b)に，靭性率μを$\mu=3.0$で固定し，終局後勾配αの値を変化させた場合の関数$S(X)$の概形を示す．なお，図中の点線になっている領域では，安定した定常振動が得られない領域を表している．図-9(a)から，終局後勾配αが緩やかになるほど，応答振幅Xに対する関数の減少が緩やかになることが分かる．また，式(8)が示す定常振動の安定性に関しては，終局後勾配αが緩やかであるほど，不安定条件を満たす応答振幅Xの値が増加している．これは，式(8)が示す不安定条件が関数$S(X)$の接線勾配と割線勾配の和によって判定されるため，終局後勾配αが緩やかであるほど関数$S(X)$の接線勾配が緩やかとなり，定常振動が安定するためである．

次に，終局後勾配αの値を$\alpha=-0.20$で固定し，靭性率μを変化させた際の関数$S(X)$を図-10(b)に示す．図から，靭性率μが増加すると，それに伴い関数$S(X)$の最大値も増加することがわかる．その一方で，$S(X)$の最大値以降の形状は靭性率に依存しておらず，靭性率の値が変化しても荷重低下領域における関数$S(X)$の形状に変化はないことがわかる．また式(8)が示す定常振動の安定性に関しては，靭性率μが増加するほど，不安定境界X_Iと靭性率μの差が減少している．

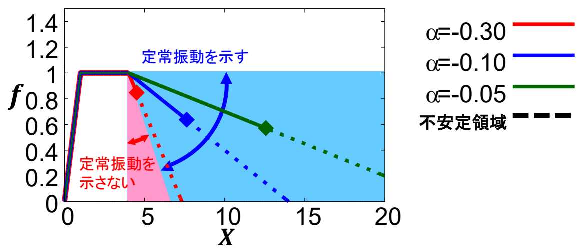
これは，靭性率μが増加するに従い関数$S(X)$の割線勾配が低下することにより，定常振動が不安定化するためである．そして，不安定境界X_Iと靭性率μの差は，安定した定常振動が荷重低下開始以降どの程度維持できるかを表しており，靭性率μの値が大きいほど，荷重低下領域における定常振動の安定性が低下していることがわかる．

(3)　終局後勾配 α と靭性率 μ に関するパラメトリックスタディ

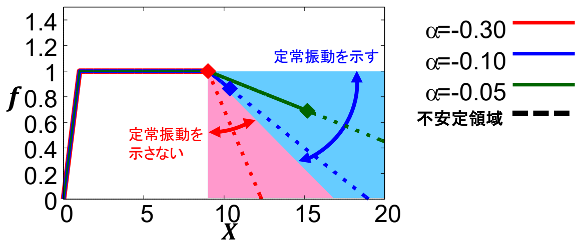
3.(2)で述べたように，不安定境界 X_I と靭性率 μ の差は，荷重低下開始以降，安定した定常振動がどの程度維持できるかを表しており，不安定境界 X_I と靭性率 μ の差が大きい場合，その構造システムの荷重低下領域における定常振動の安定性は優れていると判断することができる．そこで本項では，終局後勾配 α と靭性率 μ に関してパラメトリックスタディを行い，終局後勾配 α と靭性率 μ の組み合わせによって，不安定境界 X_I と靭性率 μ の差がどのように変化するかを検証した(図-11(a))．なお，不安定境界 X_I と靭性率 μ の差がゼロの場合，その構造システムでは荷重低下開始点 $X=\mu$ と不安定境界 $X=X_I$ が一致するため，荷重低下領域において安定した定常振動を示さないことを意味する．図-11 をみると，靭性率 μ が増加すると，安定した定常振動をするための終局後勾配 α の値が制限されていくことがわかる．また，終局後勾配 α の値が等しい場合でも，靭性率 μ の値が大きくなると，不安定境界 X_I と靭性率 μ の差が小さくなり，荷重低下領域における定常振動の安定性が低下することがわかる．例えば，靭性率 $\mu=4.0$ のとき，終局後勾配 $\alpha=-0.10$ の場合であれば，荷重低下開始点から応答振幅が3.63 増加したとしても安定した定常振動が維持できる．さらに，終局後勾配 $\alpha=-0.496$ 以上であれば，荷重低下領域で安定した定常振動を示すことがわかる(図-11(b))．それに対し，靭性率が $\mu=9.0$ のとき，終局後勾配 $\alpha=-0.10$ の場合であれば，荷重低下開始点から応答振幅が1.36 増加する範囲でしか安定した定常振動を示さないことがわかる．さらに，荷重低下領域で安定した定常振動



(a)　コンター図



(b)　μ=4.0 の場合



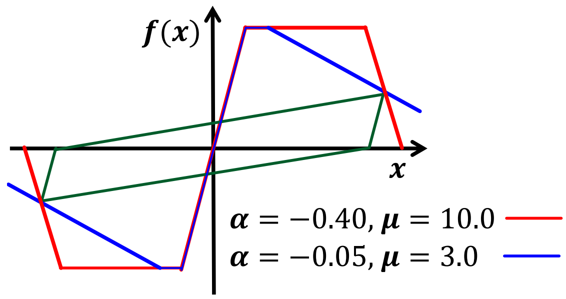
(c)　μ=9.0 の場合

図-11　終局後勾配 α と靭性率 μ に関する
パラメトリックスタディ

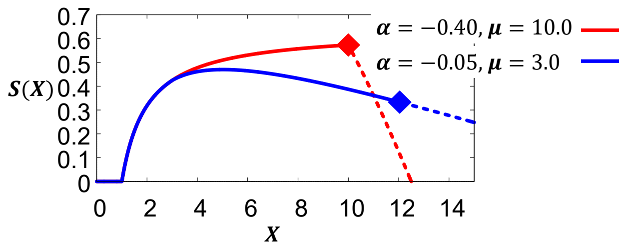
をするための終局後勾配も α＝-0.143 となることがわかる（**図-11**(c)）．以上から，定常振動における動的安定性を考えた場合，終局後勾配 α と靭性率 μ は独立でないことがわかった．

(4)　定常振動の安定性に対する終局後勾配 α と靭性率 μ の相互作用

本項では，定常振動の安定性に対する終局後勾配αと靭性率μの相互作用について検討するため，同一の履歴曲線を有する骨格曲線に対し，靭性率が大きい場合(μ＝10.0)と小さい場合(μ＝3.0)を考える（**図-12**）．ここで，式(5)から，関数$S(X)$の値は骨格曲線のパラメータである靭性率μと終局後勾配αの値ではなく，履歴曲線の形状のみで決定することがわかる．そのため，**図-12**(a) 中の2つの骨格曲線では，X=11で関数$S(X)$の値は等しくなり，



(a)　荷重変位関係



(b) 関数 $S(X)$

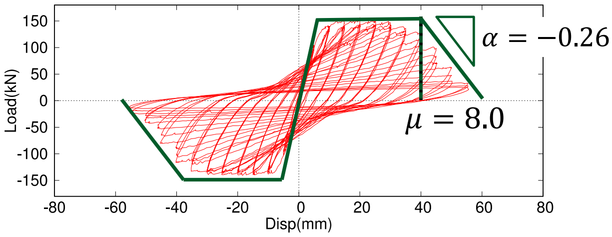
図-12 定常振動の安定性に対する
終局後勾配 α と靭性率 μ の相互作用

式(8)における関数$S(X)$の割線勾配についても同一の値となる．しかしその一方で，式(8)における関数$S(X)$の接線勾配は終局後勾配αに依存するため，赤の骨格曲線の方が接線勾配が急な値となる（**図-12**(b)）．そのため，赤の骨格曲線では，青の骨格曲線に比べ，荷重低下領域における定常振動の安定性が低下することがわかる．よって，同一の履歴曲線を有し，その点で同一の定常振動を示している場合でも，終局後勾配αが急な値であるほど，定常振動の安定性は低下することがわかった．そして，同一の履歴曲線を有する場合，靭性率μと終局後勾配αは独立ではなく，靭性率μの増加に伴い，終局後勾配αは急な値となる．そのたえた場合，終局後勾配αと靭性率μは独立ではないという結果が得られたと考えられる．

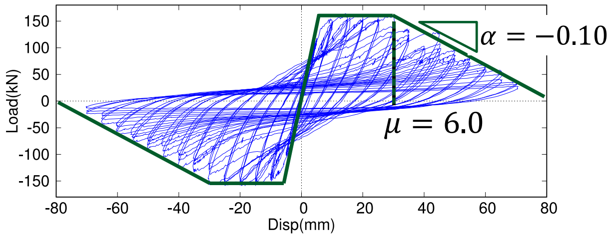
(5)　耐震設計における靭性率 μ と終局後勾配 α の位置づけ

兵庫県南部地震の被害を教訓として，降伏後の靭性を十分に高めることでRC柱の耐震安全性を確保するという構造技術戦略が主流となった．その後，東北地方太平洋沖地震を契機として，危機耐性を高める構造技術戦略が生まれ，筆者らは危機耐性を高める具体的な構造技術の一つとして，終局後の荷重低下が緩やかなRC柱（埋め込みメナーゼヒンジRC柱）の開発を行っている[1]．これに対し，3. (3) で示した結果は，両者の構造技術戦略はそれぞれを独立させて議論すべきではなく，降伏から終局までの挙ことを示唆している．

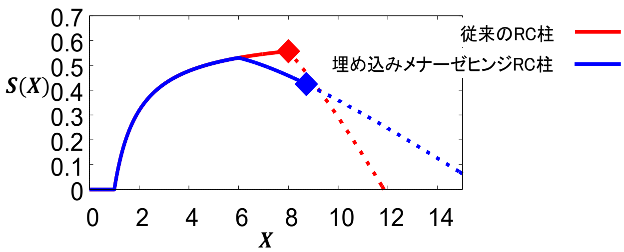
ここで，筆者らが提案している埋め込みメナーゼヒン



(a)　従来の RC 柱の荷重変位関係



(b) 五島らによる提案構造の荷重変位関係



(c) 関数 $S(X)$の比較

図-13 実験結果の比較

ジRC柱と従来のRC柱を例に，3. (3) で行った理論的検討を適用する．従来のRC柱においては，降伏変位が5mm，荷重低下開始点が40mmであるため靭性率μは8.0となり，終局後勾配αは-0.26と算定できる．そのため，**図-13** (a) を見ると，従来のRC柱は骨格曲線上の荷重低下領域で安定した定常振動を示さないことがわかる．また，従来のRC柱では，安定した定常振動を得られる振幅の最大値は荷重低下開始点の$X= 8.0$となることが分かる (**図-13** (a))．それに対し，埋め込みメナーゼヒンジRC柱では，降伏変位が5mm，荷重低下開始点が30mmであるため靭性率μは6.0となり，終局後勾配αは-0.10と算定できる．よって**図-13** (b) を見ると，埋め込みメナーゼヒンジRC柱は，骨格曲線上の荷重低下領域においても定常振動を示すことがわかる．また，式(8)による不安定領域の境界は$X=8.7$と算出された．したがって埋め込みメナーゼヒンジRC柱では，骨格曲線上の荷重低下領域においても定常振動を示し，従来のRC柱に比べて，より大きな振幅まで安定した定常振動を示すことがわかる．以上のように，RC柱の耐震設計において，設計上の終局以降の挙動にまで目を向けた検討を行う際は，降伏後の靭性と終局後の荷重低下勾配を関連させた議論が必要であると考える．

4.　まとめ

本研究では， RC 部材のように降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる構造システムの非線形動的振動に対して，定常振動を仮定した理論的検討を行った．具体的には，非線形構造システムの周波数応答関数を用いる Caughcy の方法に着目し，負勾配を有する骨格曲線の場合でのみ現れる定常振動の不安定条件に注目した検討を行った．以下に本研究で得られた知見を示す．

- 終局後勾配αと靭性率μによるパラメトリックスタディの結果，定常振動における動的安定性を考えた場合，構造システムの靭性率μと荷重低下領域での終局後勾配αは独立ではないことがわかった．その結果，RC柱の耐震設計において，設計上の終局以降の挙動にまで目を向けた検討を行う際は，降伏後の靭性と終局後の荷重低下勾配を関連させた議論が必要である可能性が示唆された．
- 筆者らが提案している埋め込みメナーゼヒンジ RC 柱と従来の RC 柱を例に，本研究で行った理論的検討を適用した．その結果，埋め込みメナーゼヒンジ RC 柱では，骨格曲線上の荷重低下領域においても定常振動を示し，従来の RC 柱に比べて，より大きな振幅まで安定した定常振動をすることがわかった．

謝辞：本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究(B)(一般)18H01522 の助成を受けて実施した．謝意を表します．

参考文献

1)　五島健斗，植村佳大，高橋良和：設計基準外事象に対する挙動を定性的予測可能な有メナーゼヒンジをRC構造の開発，第38回地震工学研究発表会講演集，NO.1272，2018.
2)　T. K. Caughey：Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis，Journal of Applied Mechanics，27(4)，pp.640-643，1960.
3)　D. Capecchi，F. Vestroni：Steady-StateDynamic Analysis of Hysteretic Systems，Journal of Engineering Mechanics，111(12)，pp.1515-1531，1985.
4)　D. Capecchi，F. Vestroni：Periodic Response of a Class of Hysteretic Oscillators，International Journal of Non-Linear Mechanics，25(2/3)，pp.309-317，1990

Nonlinear Dynamic Response of Structures with negative stiffness in Skeleton Curves

Kosuke WATANABE, Keita Uemura and Yoshikazu TAKAHASHI

In this study, the dynamic stability of a structure with negative stiffness in the skeleton curve was theoretically investigated. For theoretical research, the frequency response function derived by Caughey and the discriminant of the instability of the response solution are used. As a result, it was found that the range in which the structure shows a stable steady response in the range where load decreases is determined by the ductility of the skeleton curve and the negative stiffness in the range. Moreover, as a result of conducting a parametric study about ductility and negative stiffness in the range where load decreases, it was suggested that dynamic stability is not secured in the range where load decreases if ductility is too large.