地盤インピーダンスの周波数依存性を考慮した非線形時刻歴応答解析手法の低振動数域における適用性検討

月岡　桂吾[1]・山田　聖治[2]・室野　剛隆[3]

[1]正会員　修士（工学）　鉄道総合技術研究所　鉄道地震工学研究センター　地震応答制御研究室
（〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38）
E-mail: tsukioka.keigo.39@rtri.or.jp

[2]正会員　博士（工学）　鉄道総合技術研究所　鉄道地震工学研究センター　地震応答制御研究室
（〒185-8540 東京都国分寺市光町2-8-38）
E-mail: yamada.seiji.17@rtri.or.jp

[3]正会員　博士（工学）　鉄道総合技術研究所　鉄道地震工学研究センター
（〒185-8540 東京都国分寺市光町2-8-38）
E-mail: murono.yoshitaka.51@rtri.or.jp

本研究では，インピーダンスの周波数依存性および上部構造物の非線形性を考慮した非線形時刻歴応答解析手法である佐藤の方法を対象として，その適用性の拡張を図った．具体的には，佐藤の方法では，インピーダンス虚部が低振動数域において一定値をとるような問題に対して適用性が担保されていなかったため，これを改善するような方法を提案した．その上で，SR モデルを対象として，インピーダンスの周波数依存性と上部構造物の非線形性を考慮した数値解析を実施し，低振動数域におけるインピーダンス虚部の再現性が上部構造物の非線形応答特性に与える影響に関して検討を行った．その結果，上部構造物の履歴減衰の影響が比較的小さい場合において，インピーダンス虚部の再現性の影響が顕著に表れることが示された．

Key Words: *Soil Impedance, Frequency Dependency, Low Frequency Range*

1.　はじめに

地盤－構造物系の動的相互作用問題において，地盤インピーダンスが周波数依存性を有することは周知の事実である．一方で，強震動下において，地盤や構造物が塑性化して非線形性を有する問題も存在する．したがって，地盤－構造物系の動的相互作用問題において，現象を精緻に評価するためには周波数依存性および非線形性の双方の現象を適切に考慮することが肝要となる．

これらの現象を解析的に取り扱うにあたり，有限要素法などの離散化解析手法では，地盤と構造物の挙動について同時に数値解析を行うので，自動的に考慮することができる．しかし，これらの方法は，結果の物理的な解釈が難しい場合があるため，実務設計者にとって身近なものとなっていないのが実情である．

実務設計においては，地盤と基礎の動的相互作用をばねで置換した質点系モデルなどが用いられることが多い．質点系モデルを用いて地盤－構造物系の動的解析を行う場合，インピーダンスの周波数依存性を直接的に地盤ばねに与えることで，動的相互作用を周波数領域において適切に考慮することができるが，そのままでは非線形時刻歴応答解析を実施できない．したがって，質点系モデルにおいて，インピーダンスの周波数依存性および地盤や構造物の非線形性を考慮するためには，周波数依存性を有するインピーダンスを時間領域に変換し，それを用いて非線形時刻歴応答解析を実施する必要がある．

周波数依存性を有するインピーダンスを時間領域で表現し，非線形時刻歴応答解析を実施する手法に関して，近年では様々な事例が報告されている．

例えば，中村の研究[1]では，インピーダンスをインパルス応答の同時成分と時間遅れ成分によって表現する方法を提案している．この方法は，様々な問題に対して適用性の拡張が図られているものの，インピーダンスを時間領域に変換する際に連立一次方程式の求解などの手間

を要する．

他方，佐藤の研究[2]では，インピーダンスを周波数に依存しない成分（以下，特異成分と呼ぶ）および周波数に依存する成分（以下，正則成分と呼ぶ）とに分離し，正則成分の実部と虚部が因果性を満たすヒルベルト変換対となる性質を利用することで，時間領域の運動方程式において周波数依存性を畳み込み積分の形で表現している．この方法ではフーリエ変換およびヒルベルト変換[3]をベースとしており，式の取り扱いが容易であるが，インピーダンス虚部が低振動数域において一定値を取るような場合，これを適切に表現することが難しい．

以上を踏まえ，本研究では佐藤の方法（本論文では既往の方法と呼ぶ）において，低振動数域におけるインピーダンス虚部を適切に表現する方法を提案する．また，2.(1)で述べるように既往の方法を数値解析に展開するにあたり，時間の離散化の影響を受ける場合があるため，これを回避するような定式化を併せて提案する．その上で，SRモデルを対象として，インピーダンスの周波数依存性および上部構造物の非線形性を考慮した数値解析を実施し，低振動数域におけるインピーダンス虚部の再現性が上部構造物の非線形応答特性に与える影響に関して検討を行う．

2. インピーダンスの周波数依存性を考慮した非線形時刻歴応答解析手法

本章では，始めに，1 質点系の運動方程式を例として，既往の方法の概要および数値解析に展開する上での留意事項について説明する．次に，本研究で提案する低振動数域におけるインピーダンス虚部の表現方法について説明する．その上で，同手法の SR モデルでの表現を示す．

(1) 既往の方法[2]

地盤－構造物系のインピーダンスは$K(\omega)$は，以下のように表される．

$$K(\omega) = k(\omega) + i\omega c(\omega) \tag{1}$$

ここで，実部および虚部はそれぞれ，周波数依存性を有する．また，インピーダンスは，周波数に依存しない特異成分k^sおよびc^sと周波数に依存する正則成分$k_\omega(\omega)$および$\omega c_\omega(\omega)$とで構成され，式(2)のように表される．

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k^s + k_\omega(\omega) \\ i\omega c(\omega) &= i\omega c^s + i\omega c_\omega(\omega) \end{aligned} \tag{2}$$

このうち，正則成分は波動伝播に起因するため，実部と虚部がヒルベルト変換によって結び付けられた因果関数となる．既往の方法では，この事実に着目してインピーダンスから特異成分を除去し，因果性を満たす正則成分を算出し，これをフーリエ逆変換することで，時間領域においてインピーダンスを畳み込み積分の形で表現することを実現している．

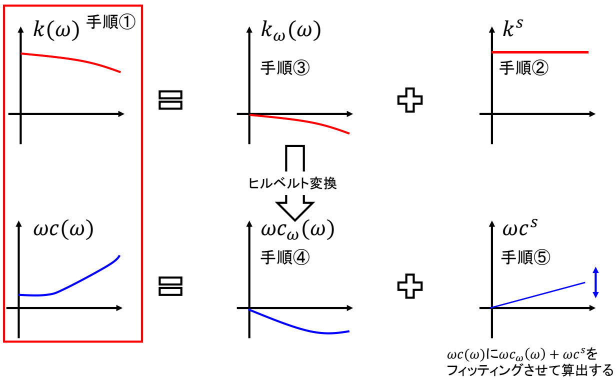


図-1　インピーダンスの算出方法（既往の方法）

既往の方法では，以下の①から⑤の手順でインピーダンスから特異成分を除去している．この概要を図- 1 に示す．

① 薄層要素法などを用いてインピーダンス$K(\omega)$を算出する．これが目標とするインピーダンスとなる．

② インピーダンス$K(\omega)$より，実部の特異成分k^sを式(3)により求める．

$$k^s = k(\omega = 0) \tag{3}$$

③ インピーダンス$K(\omega)$から，式(4)のように実部の特異成分k^sを除去することで，実部の正則成分$k_\omega(\omega)$を求める．

$$k_\omega(\omega) = k(\omega) - k(\omega = 0) \tag{4}$$

④ $k_\omega(\omega)$をヒルベルト変換することで，虚部の正則成分$\omega c_\omega(\omega)$を算出する．

$$i\omega c_\omega(\omega) = H[k_\omega(\omega)] \tag{5}$$

式(5) において$H[\ ]$はヒルベルト変換を表す．

⑤ 目標とするインピーダンスの虚部$\omega c(\omega)$から，式(5)より求まる$\omega c_\omega(\omega)$を引いたものを，ωの比例関数ωc^sでフィッティングさせることで，虚部の特異成分c^sを決定する．

以上で算出されたk^s，c^s，$k_\omega(\omega)$および$c_\omega(\omega)$を用いると，インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻tにおける 1 自由度系の運動方程式は式(6)のようになる．

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c^s\dot{x} + k^s x = &-m\ddot{z} \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} k^*(t-\tau)x(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$k^*(t)$は$k_\omega(\omega) + i\omega c_\omega(\omega)$のフーリエ逆変換である．式(6)の右辺の畳み込み積分区間には，現時刻tより未来の情報$(t, \infty]$に関する積分が含まれているため，そのまま積分することはできない．

しかし，積分区間$(t, \infty]$を考えた場合，$x(\tau)$は時刻tより未来の状態に関する情報であり，$k^*(t-\tau)$は時刻0より過去の情報となる．今，$k^*(t)$は波動伝播に起因する関数と考えられるので，因果関数である．よって，$k^*(t)$が$t < 0$において恒等的にゼロとなるので，区間$(t, \infty]$においては，$k^*(t-\tau)x(\tau) = 0$となる．また，$x(t)$は区間$(-\infty, 0]$において恒等的にゼロとなる．した

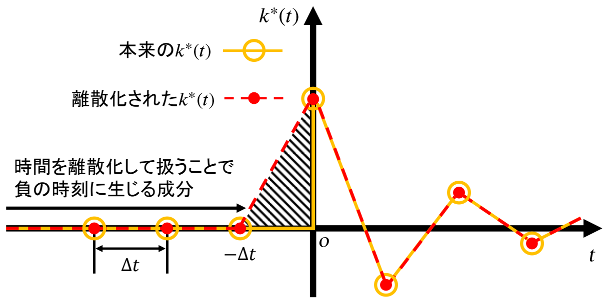


図-2　時間の離散化の影響

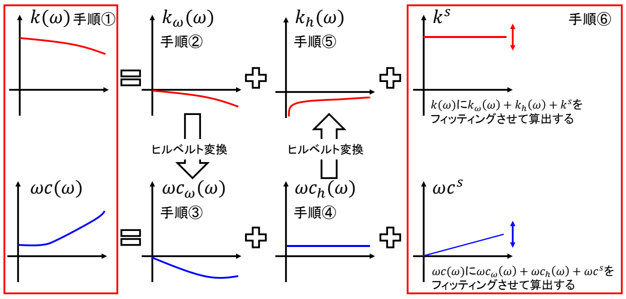


図-3　インピーダンスの算出方法（提案手法）

がって，式(6)の積分区間は$[0,t]$となり，運動方程式は式(7)のようになる．

$$m\ddot{x}+c^s\dot{x}+k^s x=-m\ddot{z}-\int_0^t k^*(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{7}$$

式(7)の運動方程式を数値計算によって解くためには，各時間刻みΔtに離散化して解くことになる．$k^*(t)$は因果関数であるから，図-2の黄線のように時刻$t=0$において不連続性を有している．しかしながら，数値計算上では，図-2の赤線のように離散化されるため，$-\Delta t<t<0$において非ゼロな値が生じる．（図-2におけるハッチング部分）．よって，同手法を数値解析に展開する際には，このハッチング部分への工夫が必要となる．

そこで，本研究においては，式(7)の離散表現である式(8)を提案し，これを用いる．これによって，畳み込み積分が離散畳み込みの形に変換されるので，$k^*(t=0)$に付随する成分を左辺へ移項し，畳み込みの項から取り除くことが可能となる．

$$m_0\ddot{x}_m+c^s\dot{x}_m+(k^s+k_0^*\Delta t)x_m=-m_0\ddot{z}_m-\sum_{l=0}^{m-1}k_{m-l}^*\,x_l\Delta t \tag{8}$$

ここで，下付き添え字$m(m=0,\cdots,N-1)$はタイムステップを表し，Nは継続時間の分割数を表す．なお，式(8)の導出過程は付録1にて示す．

(2)　本研究で提案するインピーダンスの算出方法

2.(1)で説明したインピーダンスの表現方法では，インピーダンス虚部が低振動数域において一定の値（以下，非因果的成分と呼ぶ）をとる場合，これを適切に表現することができない．

そこで，本研究ではMakrisが提案する因果的履歴減衰モデル[4]を援用することで，非因果的成分を良好に表現できるインピーダンスの表現方法を提案する．具体的には，$k_h(\omega)$および$i\omega c_h(\omega)$を非因果的成分に対応する成分として，インピーダンスを$K(\omega)$を以下のように表す．

$$\begin{aligned}K(\omega)&=k(\omega)+i\omega c(\omega)\\k(\omega)&=k^s+k_\omega(\omega)+k_h(\omega)\\i\omega c(\omega)&=i\omega c^s+i\omega c_\omega(\omega)+i\omega c_h(\omega)\end{aligned} \tag{9}$$

提案手法によるインピーダンスの計算手順を以下に示す．また，その概要を図-3に示す．

① 薄層要素法などを用いてインピーダンス$K(\omega)$を算出する．これが目標とするインピーダンスとなる．

② インピーダンス$K(\omega)$から，式(4)と同様に$\omega=0$の実部$k(\omega=0)$を除去することで，実部の正則成分$k_\omega(\omega)$を求める．

③ 式(5) と同様に$k_\omega(\omega)$をヒルベルト変換することで，虚部の正則成分$\omega c_\omega(\omega)$を算出する．

④ 非因果的成分の虚部$i\omega c_h(\omega)$を式(10)から求める．

$$i\omega c_h(\omega)=i\mathrm{sgn}(\omega)\times|\omega c(\omega=0)| \tag{10}$$

ここで，$|\omega c(\omega=0)|$はωの関数ではなく，インピーダンス虚部$\omega c(\omega)$の$\omega=0$における値を表している．

⑤ 非因果的成分が因果性を満足するように，非因果的成分の実部$k_h(\omega)$として，虚部$i\omega c_h(\omega)$の逆ヒルベルト変換を与える．

$$k_h(\omega)=H^{-1}[i\omega c_h(\omega)] \tag{11}$$

⑥ 目標とするインピーダンスの実部$k(\omega)$および虚部$\omega c(\omega)$に対して，$k(\omega)-k_\omega(\omega)-k_h(\omega)$を$k^s$でフィッティングさせることで$k^s$を決定し，$\omega c(\omega)-\omega c_\omega(\omega)-\omega c_h(\omega)$を$\omega$の比例関数$\omega c^s$によってフィッティングさせることで$c^s$を決定する．

今，$k_h(\omega)$と$i\omega c_h(\omega)$の和のフーリエ逆変換および離散フーリエ逆変換をそれぞれ，$k^h(t)$および$k_m^h(m=0,\cdots,N-1)$とし，提案手法から求まるインピーダンスを用いると，式(8)は式(12)の形で表される．

$$\begin{aligned}m_0\ddot{x}_m+c^s\dot{x}_m+(k^s+k_0^*\Delta t+k_0^h\Delta t)x_m&=-m_0\ddot{z}_m-\sum_{l=0}^{m-1}k_{m-l}^*\,x_l\Delta t\\&\quad-\sum_{l=0}^{m-1}k_{m-l}^h\,x_l\Delta t\end{aligned} \tag{12}$$

(3)　SRモデルへの展開

2.(2)までに述べた手法をSRモデルに展開すると，インピーダンスの周波数依存性を考慮したSRモデルにおける時間領域での運動方程式は式(13)のように表される．

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\} \tag{13}$$

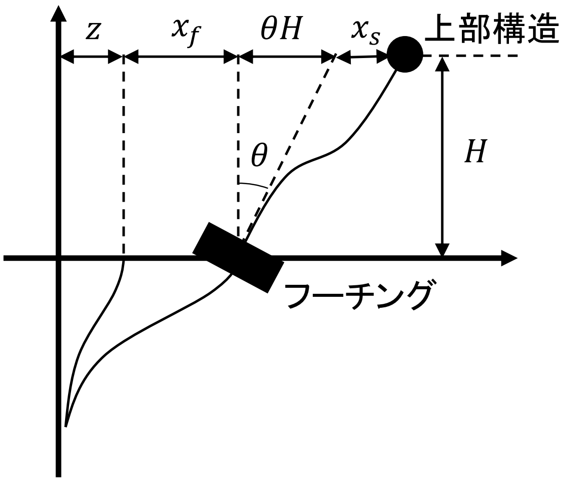


図-4　SRモデルにおける座標系の取り方

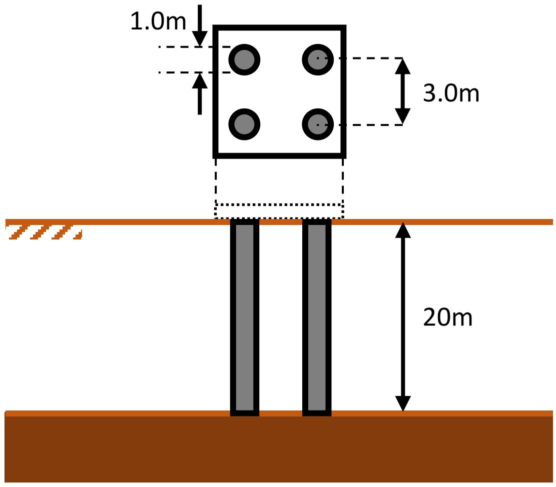


図-5　杭基礎の概要

ここで，式(13)における各マトリクスおよびベクトルは式(14)のようになる．

$$[M]=\begin{bmatrix} m_s & m_s & m_sH \\ m_s & m_s+m_f & m_sH \\ m_sH & m_sH & m_sH^2+I \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_s & 0 & 0 \\ 0 & c_f^s & 0 \\ 0 & 0 & c_r^s \end{bmatrix}$$

$$[K]= \begin{bmatrix} k_s(x) & 0 & 0 \\ 0 & k_f^s+k_{f0}^*\Delta t+k_{f0}^h\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & k_r^s+k_{r0}^*\Delta t+k_{r0}^h\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\{F\}= -\left\{ \begin{matrix} m_s\ddot{z} \\ (m_s+m_f)\ddot{z}+\sum_{l=0}^{m-1} k_{fm-l}^*\, x_{fl}\Delta t+\sum_{l=0}^{m-1} k_{fm-l}^h\, x_{fl}\Delta t \\ \mathrm{m}_sH\ddot{z}+\sum_{l=0}^{m-1} k_{rm-l}^*\, \theta_l\Delta t+\sum_{l=0}^{m-1} k_{rm-l}^h\, \theta_l\Delta t \end{matrix} \right\}$$

$$\{x\}=\{x_s \quad x_f \quad \theta\}^T \tag{14}$$

式(14)において，下付き添え字のs,fおよびrはそれぞれ，上部構造の並進成分，フーチングの並進および回転成分を表す．さらに，上付き添え字のs,$*$およびhはそれぞれ，特異成分，正則成分および非因果的成分に対応していることを表す．

また，本研究におけるSRモデルの座標系の取り方を図-4に示す．図-4に示すように，x_s,x_fおよびθはそれぞれ，上部構造のフーチングに対する相対水平変位の並進成分，フーチングの水平変位および回転角を表し，$\ddot{z}$は基礎入力動を表す．また，HおよびIは上部構造の高さおよびフーチングの慣性モーメントを表している．

3.　数値解析例（1 自由度系での検討）

本章では，1自由度系を対象として，既往の方法および提案手法から算出されるインピーダンスの双方を用いて，インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻歴応答解析を行う．そして，時刻歴応答解析の結果を周波数応答解析の結果と比較することで，提案方法の妥当性を検証する．

表-1　地盤および杭の物性

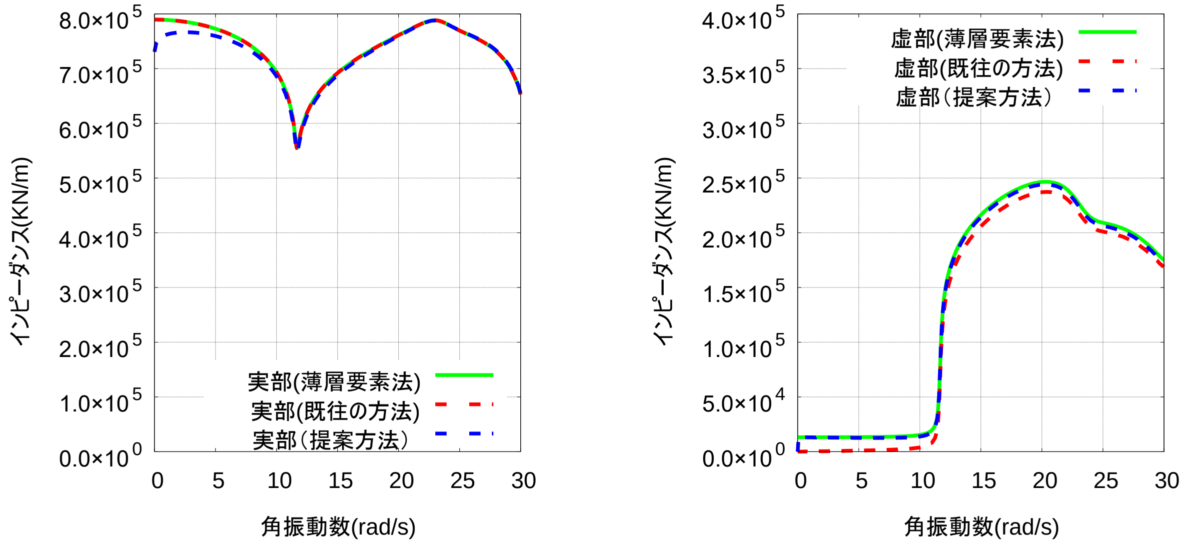
地盤	せん断波速度(m/s)	150
	層厚(m)	20
	ポアソン比	0.3
	内部減衰	0.01
杭	杭径(m)	1.0
	杭間隔(m)	3.0
	杭長(m)	20.0
	内部減衰	0.00

(1)　解析に用いるインピーダンス

図-5のような，せん断波速度V_s = 150m/s，層厚 20m の地盤中に構築された 2×2 の 4 本群杭を対象に，薄層要素法[5]を用いてインピーダンスを算出した．解析に用いた地盤および杭の物性値を表-1に示す．ここで，杭は先端支持杭を想定し，杭頭はフーチングに剛結されている．

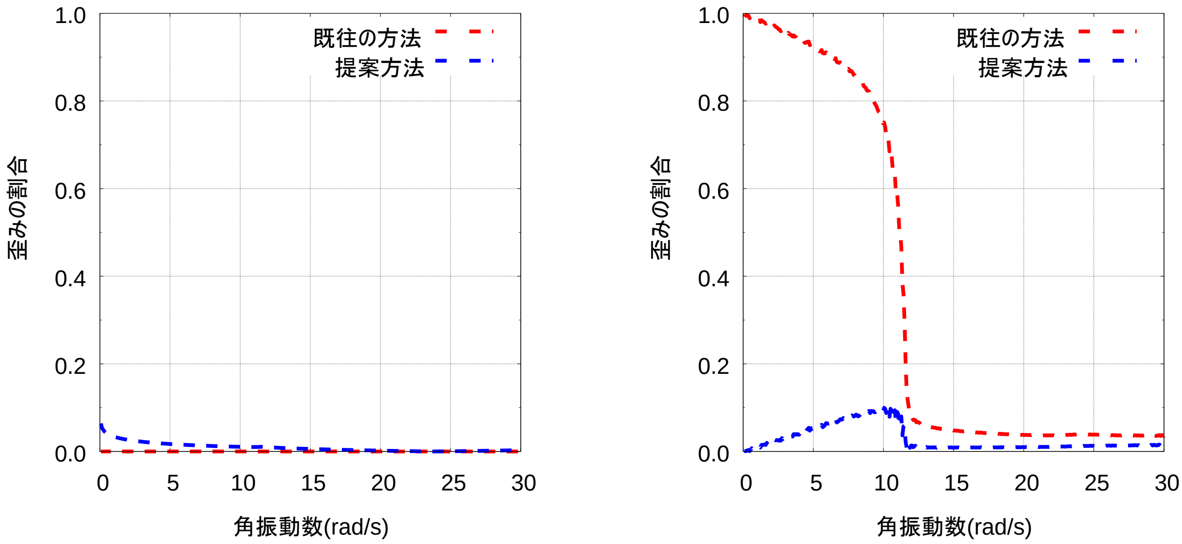
薄層要素法，既往の方法および提案方法のそれぞれで求めたインピーダンス（水平成分）を図-6に示す．ここで，両手法において，インピーンダンスを算出する際のフィッティングは，振動数 0 から 10Hz の範囲で実施している．図-6において，緑線は薄層要素法によって算出されるインピーダンスを表し，赤線および青線は薄層要素法によって算出されたインピーダンスから，既往の方法および提案方法に基づいて再計算されたインピーダンスを表す．

また，薄層要素法で算出されたインピーダンス$K(\omega)$に対する，既往の方法および提案方法で再現されたイン



(a)　実部　　　　(b)　虚部

図-6　インピーダンス（水平成分）



(a)　実部　　　　(b)　虚部

図-7　歪みの割合

ピーダンス$K'(\omega)$の歪みの割合ϵを式(15)のように表す．

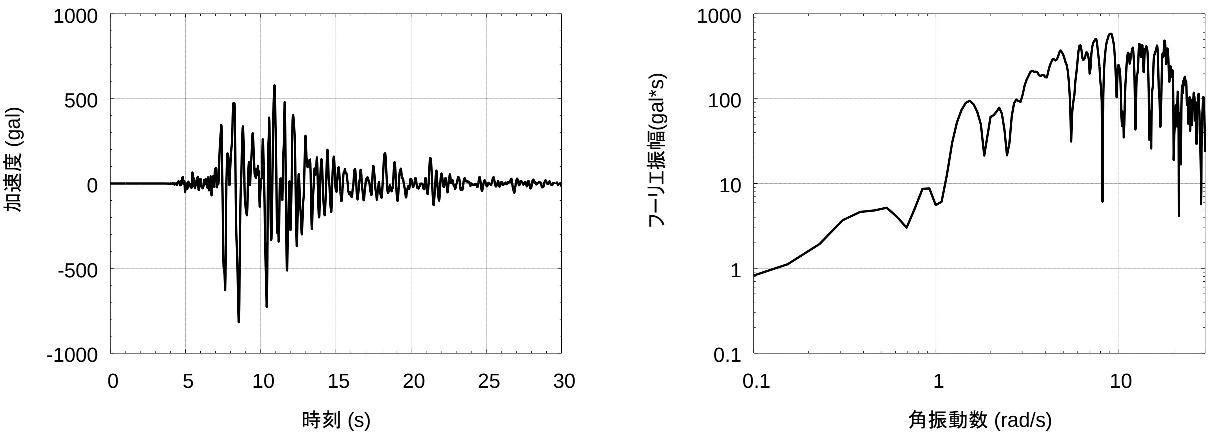
$$\epsilon = \frac{|K(\omega) - K'(\omega)|}{K(\omega)} \tag{15}$$

両手法における歪みの割合ϵを図-7に示す．既往の方法では，実部の歪みは全振動数において0であり完全に再現されている一方で，低振動数域における虚部の歪みは0.8から1.0と高くなっている．これに対して，提案方法では，実部を歪めることで低振動数域における虚部の歪みを抑えることを試みており，実際に低振動数域における虚部の歪みは0.1程度と低く抑えられている．このとき，実部の歪みも数%程度と低いことから，実部を歪めるデメリットよりも虚部の歪みが抑えられるメリットの方が大きいことが分かる．

(2)　その他の解析条件

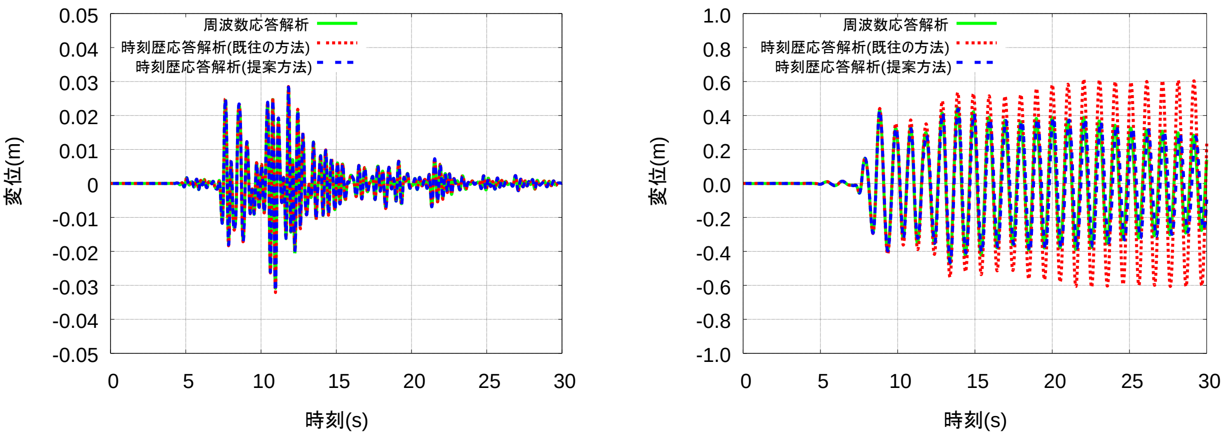
1自由度系の質量として，振動数0Hzにおけるインピーダンス実部の値から算出される円固有振動数ω_sが$\omega_s = 20.9$および$\omega_s = 6.28$となるように算出した2通りの値を用いる．また，系の復元力特性は線形とする．

入力地震動としては，兵庫県南部地震の神戸海洋気象台で観測された記録（JMA-KOBE 波）を用いる．JMA-KOBE 波の時刻歴波形およびフーリエ振幅スペクトルを図-8に示す．図-6に示すインピーダンスは地盤の1次円固有振動数ω_g（$\omega_g \simeq 11.8$）の前後で特徴的な挙動を示しているが，図-8から JMA-KOBE 波はこの前後の成分が卓越していることが分かる．また，時間刻みの大きさΔtは$\Delta t = 0.02$とし，時間方向の積分はニューマークのβ法[6]（$\beta = 1/4$）に基づいて行う．



(a)　時刻歴波形　　　　　　　　(b)　フーリエスペクトル

図- 8　JMA-KOBE 波



(a)　$\omega_s = 20.9$　　　　　　　　(b)　$\omega_s = 6.28$

図- 9　変位波形

(3)　解析結果

周波数応答解析および時刻歴応答解析から求まる変位波形を図- 9 に示す．ここで，周波数応答解析は薄層要素法によって算出されるインピーダンスを直接用いて実施しており，時刻歴応答解析は既往の方法および提案方法から算出されるインピーダンスを用いて実施している．

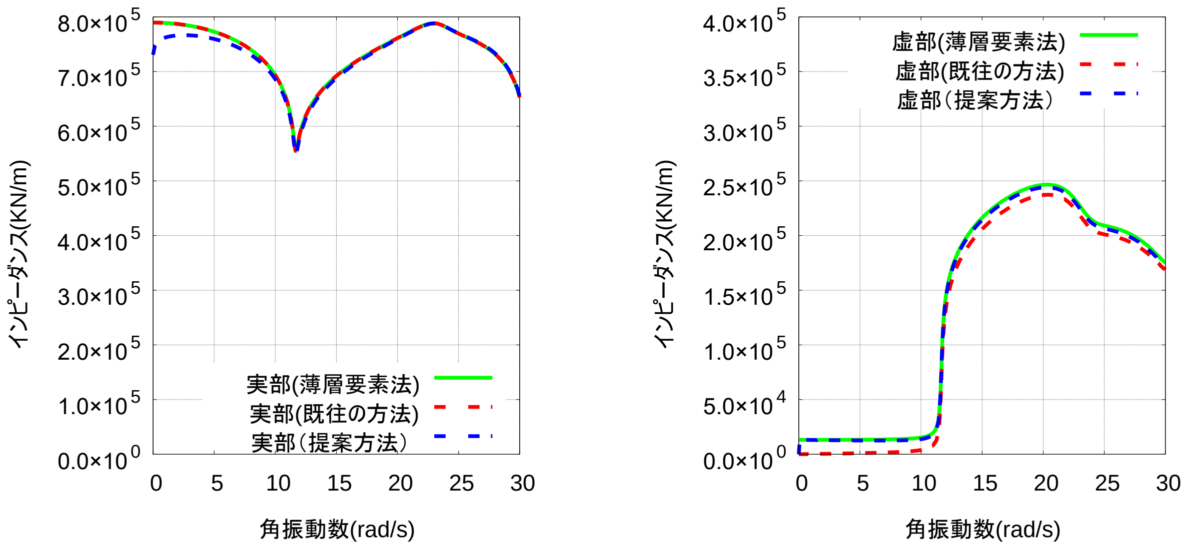
まず，$\omega_s = 20.9$では，いずれの手法を用いても同様の結果が得られている．これは，$\omega_s = 20.9$において，既往の方法および提案方法のいずれも実部と虚部の歪みが数%程度と非常に小さいためである．一方，$\omega_s = 6.28$では，既往の方法と周波数応答解析との乖離が大きくなっている．これは，$\omega_s = 6.28$において，既往の方法ではインピーダンス虚部の歪みが非常に大きくなっているためである．これに対して，提案方法の結果は，若干の位相ずれを伴うものの，周波数応答解析と概ね一致しており，提案手法の妥当性を確認することができる．

4.　数値解析例（SR モデルでの検討）

本章では，SR モデルを対象として，インピーダンスの周波数依存性および上部構造物の非線形性を考慮した非線形時刻歴応答解析を行う．このとき，既往の方法および提案方法によって算出された 2 通りのインピーダンスを用いて非線形時刻歴応答解析を実施し，解析結果を比較することで，低振動数域におけるインピーダンス虚部の再現性が上部構造物の非線形応答特性に与える影響に関して検討を行う．また，入力地震動の振幅を 1.0 倍，0.5 倍，0.3 倍および 0.25 倍と変化させた 4 ケースの解析を実施し，上部構造物の非線形レベルを変化させた検討を行う．

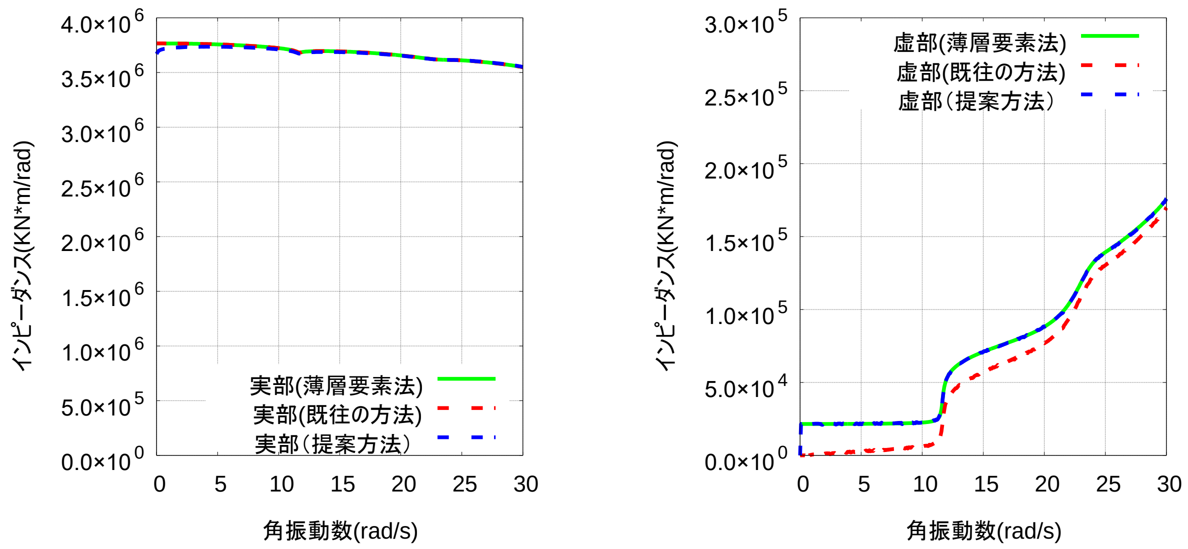
(1)　解析に用いるインピーダンス

解析に用いるインピーダンスは 3.(1)と同様の条件で算出されたものを用いる．インピーダンスの水平成分および回転成分を図- 10 および図- 11 に示す．水平成分および回転成分のいずれも，提案手法によって算出されたインピーダンスは，低振動数域において実部を再現性が若干低下しているものの，虚部の再現性が大幅に向上していることが分かる．



(a)　実部　　　(b)　虚部

図-10　インピーダンス（水平成分・再掲載）



(a)　実部　　　(b)　虚部

図-11　インピーダンス（回転成分）

表-2　上部構造物の緒元

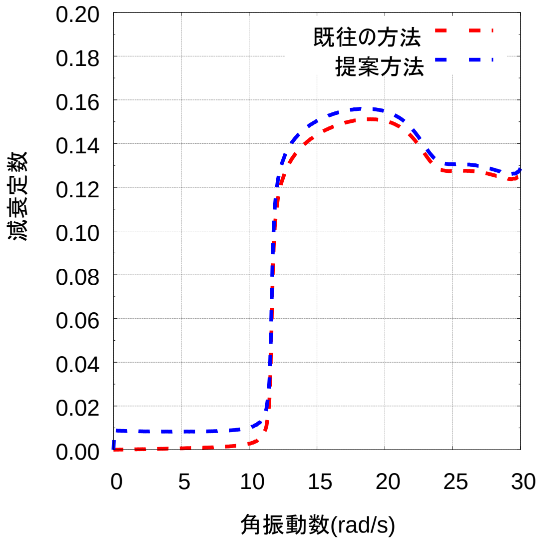
初期剛性(KN/m)	2.71×10^5
降伏変位(m)	1.73×10^{-2}
降伏後の剛性低下率α	0.03
除荷時剛性低下指数β	0.00
上部構造の質量(ton)	6.73×10^2(case0)
フーチングの質量(ton)	3.67×10^2
フーチングの慣性モーメント(ton・m^2)	2.04×10^3
高さ(m)	8.5

(2)　対象とする構造物

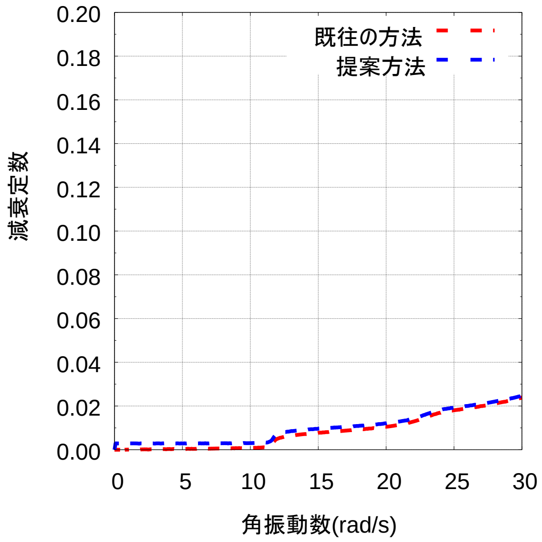
表-2に示すような RC 単柱橋脚を対象とする．ここで，構造物の物性値を鉄道構造物等設計標準 [7]を参考に与えている．このとき，構造物の非線形特性は Clough モデル [8]とした．さらに，構造物の減衰係数は，基礎固定とした場合に初期剛性から算出される減衰定数が 5%となるように算出した．

(3)　その他の解析条件

3. と同様に，入力地震動として JMA-KOBE 波を用い，時間刻みの大きさΔtは$\Delta t = 0.02$とし，時間方向の積分はニューマークのβ法（$\beta = 1/4$）に基づいて行う．これを Case0 とする．なお，本検討では，Case0 に加えて JMA-KOBE 波の振幅を 0.5 倍，0.3 倍および 0.25 倍に変化させた Case1，Case2 および Case3 の解析を実施し，上部構造物の非線形レベルを変化させた検討を実施する．



(a)　水平成分



(b)　回転成分

図- 12　インピーダンスの減衰定数

表- 3　1 次円固有振動数

	1 次円固有振動数（rad/s）
既往の方法	7.7
提案方法	7.6

(4)　解析結果

始めに，上部構造物の初期剛性および振動数 0Hz におけるインピーダンス実部の値から算出される SR モデルの 1 次円固有振動数を，既往の方法および提案方法のそれぞれについて表- 3 に示す．また，文献 9)に示す手法により，インピーダンスの実部$k(\omega)$および虚部$\omega c(\omega)$から式(16)によって算出される減衰定数hを図- 12 に示す．

$$h = \sin\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\omega c(\omega)}{k(\omega)}\right)\right\} \tag{16}$$

図- 12 および表- 3 から，それぞれの 1 次円固有振動数付近において，減衰定数は一定値をとっており，既往の方法ではこれを表現できていないことが分かる．つまり，既往の方法では，減衰を過小評価していることになる．したがって，既往の方法の方では，自ずと系の応答が過大評価されることになる． 以下では，各 Case を対象として，この影響を検討する．

各 Case における上部構造物の復元力－変位関係を図- 13 から図- 16 に示す．まず，Case0 および Case1 の場合について考える．これらのケースでは，既往の方法および提案方法の間でほぼ差異は見られない．これは，Case0 および Case1 では入力地震動が大きく，上部構造物の履歴減衰の影響が支配的となるので，減衰の影響が小さくなるためである．

次に，Case2 および Case3 の場合について考える．このケースでは，Case0 および Case1 と比べて減衰の過小評価の影響が大きいことが分かる．特に，Case3 では，提案方法を用いた場合は上部構造物は非線形化していないのに対して，既往の方法を用いた場合は上部構造物が非線形化している．これは，Case2 および Case3 では入力地震動が比較的小さく，上部構造物の履歴減衰の影響が小さくなるので，減衰の影響が相対的に大きくなるためである．

5.　まとめ

本研究では，インピーダンスの周波数依存性および上部構造物の非線形性を考慮した非線形時刻歴応答解析手法である佐藤の方法を対象として，低振動数域における適用性を検討した．

まず始めに，既往の方法では，再現性が担保されていなかった低振動数域におけるインピーダンス虚部を適切に表現する方法を提案した． さらに，1 自由度系を対象として，提案方法に基づいた時刻歴応答解析を行い，周波数応答解析の結果と比較することで，その妥当性を確認した．

次に，インピーダンス虚部が低振動数域において一定値を取るような場合について，SR モデルを対象として，インピーダンスの周波数依存性および上部構造物の非線形性を考慮した非線形時刻歴応答解析を実施した．このとき，既往の方法および提案方法の結果を比較することで，低振動数域におけるインピーダンス虚部の再現性が，上部構造物の非線形応答特性に与える影響に関して検討を行った．その結果，入力地震動が大きい場合は，上部構造物の履歴減衰が卓越するため，インピーダンス虚部の再現性の影響は小さいことが確認された．一方で，入力地震動が小さい場合は，インピーダンス虚部の再現性の影響が顕著に表れ，既往の方法では構造物の応答を過

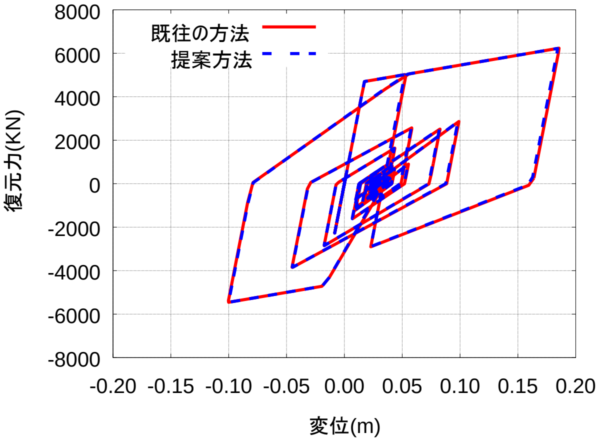


図-13　荷重－変位関係（Case0・原波形）

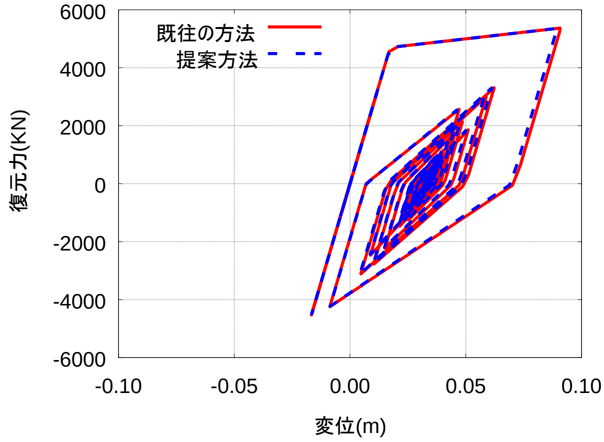


図-14　荷重－変位関係（Case1・振幅 0.5 倍）

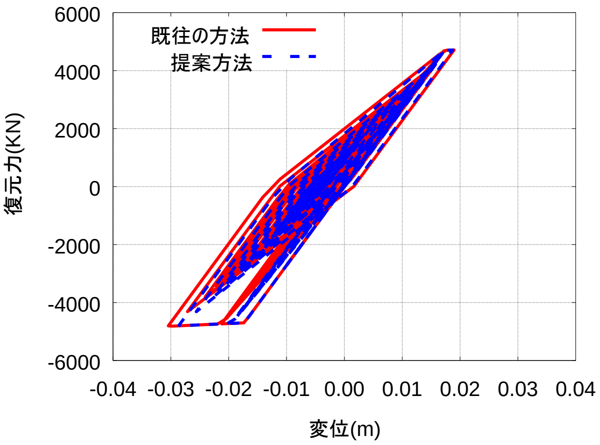


図-15　荷重－変位関係（Case2・振幅 0.3 倍）

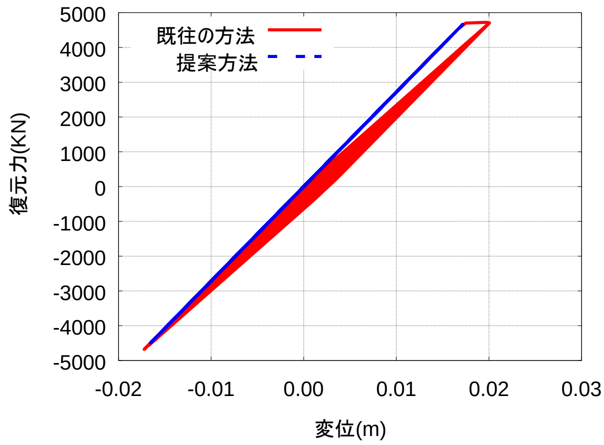


図-16　荷重－変位関係（Case3・振幅 0.25 倍）

大評価してしまうことが示された．特に，線形領域と非線形領域の境界領域において既往の方法では，本来ならば線形領域に留まるはずの上部構造物の応答を，非線形化するものと評価してしまうことが確認された．

本研究においては，低振動数域におけるインピーダンス虚部は内部減衰に相当するため，上述の結果は，強震時においては地盤の内部減衰よりも上部構造物の履歴減衰の影響の方が卓越すると言い換えることができる．なお，文献 10)で強震時において周波数依存性を有する散乱減衰よりも地盤の履歴減衰の方が卓越されることが言及されており，本研究の結果はこれと調和的である．

付録 1　式 (8) の導出過程

インピーダンスが周波数依存性を有する系において，周波数領域での 1 自由度系の運動方程式は付式(1-1)のように表せる．

$$m_0\ddot{X}(\omega) + c^s\dot{X}(\omega) + k^sX(\omega) = -m_0\ddot{Z}(\omega) - K^*(\omega)X(\omega) \quad (1\text{-}1)$$

ここで，k^sおよびc^sはインピーダンス実部および虚部の特異成分であり，$K^*(\omega)$はインピーダンス実部および虚部の正則成分$k_\omega(\omega)$および$\omega c_\omega(\omega)$を用いて以下のように表される．

$$K^*(\omega) = k_\omega(\omega) + i\omega c_\omega(\omega) \quad (1\text{-}2)$$

付式(1-1)の両辺を継続時間Tで除すと，付式(1-3)のようになる．

$$m_0\frac{\ddot{X}(\omega)}{T} + c_0\frac{\dot{X}(\omega)}{T} + k^s\frac{X(\omega)}{T} = -m_0\frac{\ddot{Z}(\omega)}{T} - \frac{K^*(\omega)}{T}\frac{X(\omega)}{T}T \quad (1\text{-}3)$$

一般的に，フーリエ積分$X(\omega)$および複素フーリエ係数X_nの間には，付式(1-4)の関係がある．

$$\lim_{T\to\infty}(TX_n) = X(\omega) \;\; (\omega = n\Delta\omega) \quad (1\text{-}4)$$

ここで，本検討では，時系列データx_mとその複素フーリエ係数X_nとの間で，離散フーリエ変換の定義を以下のように設定している．

$$x_m = \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{-mn}, X_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m W_N^{mn} \quad (1\text{-}5)$$

ここで，$W_N = e^{-i2\pi/N}$ は回転因子である．

通常の地震応答解析においてTX_nの値が継続時間の大きさにほとんど影響されないことを鑑みて，一般的に取り扱われる継続時間の範囲において付式(1-4)が収束して

いると仮定すると，$X_n \simeq X(\omega)/T$となるので付式(1-3)は付式(1-6)のように改められる．

$$m_0\ddot{X}_n + c^s\dot{X}_n + k^s X_n = -m_0\ddot{Z}_n - K_n^* X_n T \tag{1-6}$$

付式(1-6)に対して，離散フーリエ逆変換を適用すると，

$$m_0\sum_{n=0}^{N-1}\ddot{X}_n W_N^{-mn} + c^s\sum_{n=0}^{N-1}\dot{X}_n W_N^{-mn} + k^s\sum_{n=0}^{N-1}X_n W_N^{-mn} = -m_0\sum_{n=0}^{N-1}\ddot{Z}_n W_N^{-mn} - \sum_{n=0}^{N-1}K_n^* X_n W_N^{-mn} T \tag{1-7}$$

つまり，

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_m + c_0\dot{x}_m + k^s x_m &= -m_0\ddot{z}_m - \sum_{n=0}^{N-1}K_n^* X_n W_N^{-mn}T \\ &= -m_0\ddot{z}_m - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}k_k^* W_N^{nk}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}x_l W_N^{nl}\right)W_N^{-mn}T \\ &= -m_0\ddot{z}_m - \frac{1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}k_k^* x_l\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{n(k+l-m)}T \end{aligned} \tag{1-8}$$

となる．

一般的に，回転因子W_Nには以下の性質がある．

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{ns} = \begin{cases} N, & s = N\text{の整数倍} \\ 0, & s \neq N\text{の整数倍} \end{cases} \tag{1-9}$$

付式(1-9)の回転因子の性質を利用すると，付式(1-8)の右辺第２項は付式(1-10)のようになる．

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}k_k^* x_l\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{n(k+l-m)}T = -\sum_{l=0}^{m}k_{m-l}^* x_l\Delta t - \sum_{l=m+1}^{N-1}k_{N+m-l}^* x_l\Delta t \tag{1-10}$$

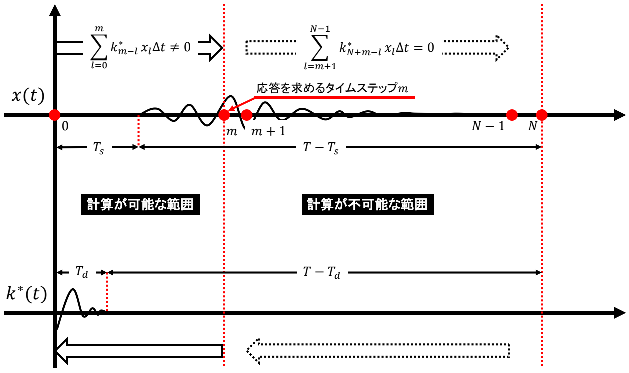
付式(1-10)を付式(1-8)に代入すると付式(1-11)のようになる．

$$m_0\ddot{x}_m + c^s\dot{x}_m + k^s x_m = -m_0\ddot{z}_m - \sum_{l=0}^{m}k_{m-l}^* x_l\Delta t - \sum_{l=m+1}^{N-1}k_{N+m-l}^* x_l\Delta t \tag{1-11}$$

つまり，式(7)を離散的表現で表すと，右辺に現れていた畳み込み積分が離散畳み込みの形に改められる．離散畳み込みの概要を付図１に示す．付式(1-11)において，時刻t_mの左側は現時刻までの情報で計算可能な領域であり，右辺第２項に対応する．また，時刻t_mの右側は未来の情報が必要となる計算不可能な領域であり，右辺第３項に対応する．

今，$m+1 \leq l \leq N-1$において$k_l^* = 0$が成立するとき，式(1-11)の右辺第３項は０となる．したがって，

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_m + c^s\dot{x}_m + k^s x_m &= -m_0\ddot{z}_m - \sum_{l=0}^{m}k_{m-l}^* x_l\Delta t \\ &= -m_0\ddot{z}_m - \sum_{l=0}^{m-1}k_{m-l}^* x_l\Delta t - k_0^* x_m\Delta t \end{aligned} \tag{1-12}$$



付図１　離散畳み込みの概要

つまり，

$$m_0\ddot{x}_m + c^s\dot{x}_m + (k^s + k_0^*\Delta t)x_m = -m_0\ddot{z}_m - \sum_{l=0}^{m-1}k_{m-l}^* x_l\Delta t \tag{1-13}$$

となる．付式(1-13)は式(7)の離散的表現に相当する．

最後に，$m+1 \leq l \leq N-1$において$k_l^* = 0$が成立し，付式(1-11)の右辺第３項が０となる条件に関して検討を行う．計算不可能な範囲の長さは，継続時間Tと現時刻t_mとの差分となるが，その最大値T_f^{mx}は付式(1-14)のようになる．

$$T_f^{mx} = T - T_s \tag{1-14}$$

ここで，T_sは時刻$t = 0$から地震動開始までの時間の長さである．

他方，$k^*(t)$は因果性を満たすヒルベルト変換対の離散フーリエ逆変換であり，$T/2 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}$の範囲で$k^*(t) = 0$となることから，$k^*(t) = 0$となる時間の長さ$T_0$は，付式(1-15)のようになる．

$$T_0 = T - T_d \tag{1-15}$$

ここで，T_dは$k^*(t)$の継続時刻である．

今，付式(1-11)の右辺第３項が０とみなせる条件は，

$$T_0 > T_f^{mx} \tag{1-16}$$

となる．これに付式(1-14)および付式(1-15)を代入すると以下のようになる．

$$T - T_d > T - T_s \tag{1-17}$$

つまり，

$$T_s > T_d \tag{1-18}$$

となる．付式(1-18)が，離散畳み込みに基づいて，インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻歴応答解析を行う際に，未来の情報に関連した項を０とするための条件となる．これが満足されない場合は，地震動の到達時間の直前に０を付加する等の処理が必要となる．

参考文献

1)　中村尚弘：振動数依存性を有する関数の時間領域変換法

の適用性検討，竹中技術研究報告，No66, 2010.
2) 佐藤忠信：地盤と構造物の動的相互作用の解析法，土と基礎，40巻，8号，1992.
3) Alan V.Oppenheim , et al : DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING, PRENTICE HALL, 1999.
4) Makris.N：Causal Hysteretic Element, J.ENG.Mech., Vol.123, No11, ASCE, 1997.
5) H.Tajimi : A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness Surface Foundation, Proc.of 7th WCEE, Vol.5, 1980
6) Newmark,N.M.：A Method of Computation for Structual Dynamics, Proc.ASCE, Vol.85, No.EM3, 1959, pp.67-94.
7) 鉄道総合技術研究所：鉄道構造物等設計標準・同解説 設計計算例RC橋脚（直接基礎）.
8) Clough,R.W. : S.B.Johnston : Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements , Proc.of Japan Earthquake Engineering Symposium, 1966.
9) 日本建築学会：入門・建物と地盤との動的相互作用，丸善出版，1996.
10) 末富岩雄：強震時における地動分布特性の即時推定に関する研究，佐藤工業（株）中央技術研究所報別冊，No.1, 2000, pp77-94.

A APPLICABILITY STUDY ON NONLINEAR TIME HISTORY RESPONSE ANALYSIS METHOD CONSIDERING FREQUENCY DEPENDENCE OF GROUND IMPEDANCE IN LOW FUREQUENCY RANGE

Keigo TSUKIOKA, Seiji YAMADA and Yoshitaka MURONO

In this research, we extended the applicability of method of Sato which is a nonlinear time history response analysis method considering both the frequency dependence of the impedance and the nonlinearity of the superstructure. Specifically, the applicability of the method of Sato is not guaranteed for such a problem that the impedance imaginary part takes a constant value in the low frequency range, so a method to improve this problem was proposed. In addition, numerical analysis considering the frequency dependence of the impedance and the nonlinearity of the superstructure is carried out for the SR model, and the influence of the reproducibility of the impedance imaginary part in the low frequency range on the nonlinear response characteristic of the superstructure was investigated. As a result, it was shown that the influence of the reproducibility of the impedance imaginary part remarkably appears when the influence of the hysteresis damping of the superstructure is relatively small.