統計的グリーン関数作成時の留意点と課題点に関する考察とその解決法

佐藤　忠信[1]・坂井　公俊[2]・田中　浩平[3]・室野　剛隆[4]

[1]正会員　東南教授　城市工程科学技術研究院（210096 中華人民共和国南京市四牌路2）
E-mail:satotdnbseu@yahoo.co.jp

[2]正会員　副主任研究員　公益財団法人鉄道総合技術研究所（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail:tanaka.kohei.22@rtri.or.jp

[3]正会員　主任研究員　公益財団法人鉄道総合技術研究所（〒185-8540 東京都国分寺光町2-8-38）
E-mail: sakai.kimitoshi.36@rtri.or.jp

[4]正会員　研究センター長　公益財団法人鉄道総合技術研究所（〒185-8540 国分寺市光町2-8-38）
E-mail: murono.yoshitaka.51@rtri.or.jp

統計的グリーン関数の生成法に関して留意しなければならない点を解説する．観測される加速度がリーマン積分可能な時間関数であることを前提とすると，特定の確率密度関数から独立同分布で生成される乱数列から構成される確率過程は，媒介変数に関して至る所で不連続な過程となるので，リーマン積分が不可能となり，独立同分布の乱数列からなる確率過程を用いて，統計的グリーン関数の生成できないことを喚起する．その上で，統計的グリーン関数を生成するためには，媒介変数に関して連続であるが，ランダム性を保持している確率過程が必要であることを明確にし，位相を円振動数に関して連続な確率過程として模擬し，それを用いて，統計的グリーン関数を生成するためには，少なくともウイナー過程を用いなければばならない事を明確にする．

Key Words : *Stochastic Green function, Continuous stochastic process, Seisimic similaity, Levy-flight*

1.　まえがき

入倉が提案している方法[1]により，大地震動の加速度時刻歴を模擬する場合に必須となるのは，小地震の加速度時間関数が当該地点で観測されていなければならないことである．任意の地点で小地震動記録の観測されていることは期待できないので，小地震の時刻歴をホワイトノイズから生成し，それを統計的グリーン関数と名付けて，大地震動の模擬に用いる方法論[2]をBoore(1983)が展開している．この方法は，強震動の模擬法として定着しているものであるが，Booreの方法により，統計的グリーン関数を生成するときの留意点と，幾つかの問題点を議論するのが本論文の目的である．

以下では，モーメントマグニチュード$M_w = 6$の地震を小地震とし，$M_w = 8$の地震をターゲットとする大地震として地震動を模擬する場合を想定することにする．なお，用いる単位系は，地震モーメントがCGS単位系で定義されているので，それをそのまま用いるが，SI単位系への変換が必要になる．CGS単位系で記述されているものはその旨を明記する．モーメントマグニチュードM_wと地震モーメント$M_0(\mathrm{dyn \cdot cm})$の関係は，次式で定義[3]されるものを使用する．

$$M_W = \frac{2}{3}\log_{10} M_0 - 10.7 \tag{1}$$

2.　加速度フーリエ振幅スペクトル

震源スペクトルとして，Gellr(1976)[4]によって検討されたハスケルモデルを考え，断層長さL，断層幅W，立ち上がり時間τに基づくの3つのコーナ振動数f_{cL}，f_{cW}，$f_{c\tau}$から構成されるω^{-3}タイプの減衰特を有しているものを考える．この場合，コーナ振動数は次式で与えられる．

$$f_{cL} = \frac{v_r}{\pi L}\frac{1}{\left(1 - \frac{v_r}{\beta}\sin\theta_0\cos\phi_0\right)} \tag{2}$$

$$f_{cW} = \frac{\beta}{\pi W}\frac{1}{\sin\theta_0\sin\phi_0} \tag{3}$$

$$f_{c\tau}=\frac{1}{\pi\tau} \tag{4}$$

ここに，βは媒質のせん断波速度(km/s)，v_rは破壊面の伝播速度(km/s)であり0.7βとした．断層面に沿って長さ方向をx軸，幅方向をy軸とし，断層面に直交する方向をz軸とした時に，座標軸原点と遠方場の観測点とを結ぶベクトルとz軸とのなす角をθ_0とする．また，ϕ_0は断層面上を破壊面が伝播する方向と遠方場の観測点方向とがなす角である．この場合，$\theta_0=0$は断層面に直交する方向角となり，$\phi_0=0$は観測点の方向が破壊面の伝播する方向になる．

規模の大きな地震と規模の小さな地震との間の相似則は，地震モーメントの比で与えられ，大地震と小地震の断層長さの比を$L/\Delta L$，断層幅比を$W/\Delta W$，食い違い量比を$D/\Delta D$とすれば，次式の関係が成立する．

$$\frac{L}{\Delta L}=\frac{W}{\Delta W}=\frac{D}{\Delta D}=n=\left(\frac{M_0}{M_{0e}}\right)^{1/3} \tag{5}$$

ここに，M_0とM_{0e}は大地震と小地震の地震モーメントであり，nは大地震と小地震の間の断層長さ，幅，食い違い量を決定す決定する比例定数で，地震モーメントの相似則を満たすような整数値として選定されるものである．

式(1)より，$M_w=6$ときの地震モーメントは$M_{0e}=1.12\times10^{25}\mathrm{dyn\cdot cm}$となり，$M_w=8$のときのそれは$M_0=1.12\times10^{28}\mathrm{dyn\cdot cm}$であるので，式(5)から$n=10$が求められる．断層長さ$L$を決めるには，次式で定義される地震モーメントを用いる．

$$M_0=\mu DA \tag{6}$$

ここに，μは断層を取り囲む媒質のせん断剛性であり，平均的な値[5]として，$\mu=3.5\mathrm{x}10^{10}N/m$を用いる．経験的に用いられる$L=2W$の関係[5]と，Somervilleにより与えられている次式のDとM_0の関係[6]を

$$\log D(\mathrm{cm})=0.3331\log M_0(\mathrm{dyn\cdot cm})-6.81 \tag{7}$$

用いれば，断層長さLが決定できる．小地震のモーメントマグニチュードを$M_w=6$とすれば，地震モーメントはM_{0e}であり，$D=0.342\mathrm{m}$となるので，$L=13.69\mathrm{km}$となる．

$\theta_0=\pi/2$で$\tan\phi_0=25/100$の場合を対象として，上記の値を式(2)と(3)に代入し，コーナ振動数を求めると$f_{cL}=0.1602\mathrm{Hz}$と$f_{cW}=0.6057\mathrm{Hz}$となる．$\tau=1.5s$とすれば，$f_{c\tau}=0.2122\mathrm{Hz}$であるので，最小のコーナ振動数である$f_{cL}$までの初期フーリエ変位振幅を$C_0$とし，次式で定義[4]する．

$$C_0=\frac{R^{FS}}{4\pi\rho\beta^3}\frac{M_0}{r} \tag{8}$$

ここに，R^{FS}はラディエーションパターンであり，ここでは平均値の0.4を用いる．ρは媒質の密度，rは座標原点から観測点までの距離である．

この場合，3個のコーナ振動数を大きさの順に並べ替え，f_1,f_2,f_3とすれば，加速度フーリエ振幅$A_a(\omega)$は次式で表現される．

$$A_a(\omega)=\begin{cases} C_0\omega^2 & 0\le\omega\le\omega_1 \\ C_0\omega_1\omega & \omega_1<\omega\le\omega_2 \\ C_0\omega_1\omega_2 & \omega_2<\omega\le\omega_3 \\ C_0\omega_1\omega_2\omega_3\omega^{-1} & \omega_3<\omega\le\omega_4 \\ 0 & \omega_4<\omega \end{cases} \tag{9}$$

ここに，$\omega_1=2\pi f_1$，$\omega_2=2\pi f_2$，$\omega_3=2\pi f_3$，$\omega_4=2\pi f_4$であり，f_4はFFT解析の都合上，加速度時系列の基本離散時間間隔を$\Delta_0 t$と置いたときのナイキスト振動数$f_N=0.5/\Delta_0 t$とする．$\Delta_0 t=0.02s$なら，$f_N=25\mathrm{Hz}$になるので，この振動数を離散振動数間隔$\Delta_0 f=25/2^{12}$で2^{12}個の離散振動数点に分割し，$A_a(\omega)$と振動数fの関係と，$t_0=40s$に設定した上で$A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t_0}$をフーリエ逆変換して求まる実数部の時間関数(フーリエ核，$h(t)$と表示)を同時に示したものが**図-1**である．上図が$A_a(\omega)-f$関係で底10の両対数値で描画している．黒色細実線が式(9)を直接描画したものである．下図がフーリエ核$h(t)$であり，これは時間原点に対称な時刻歴であるが，$t_0=40s$としているので，時間$t=40s$が対称点になっている．赤点線は下図に示されている時間関数をフーリエ変換して求めたフーリエ振幅である．当然であるが両者は一致している．

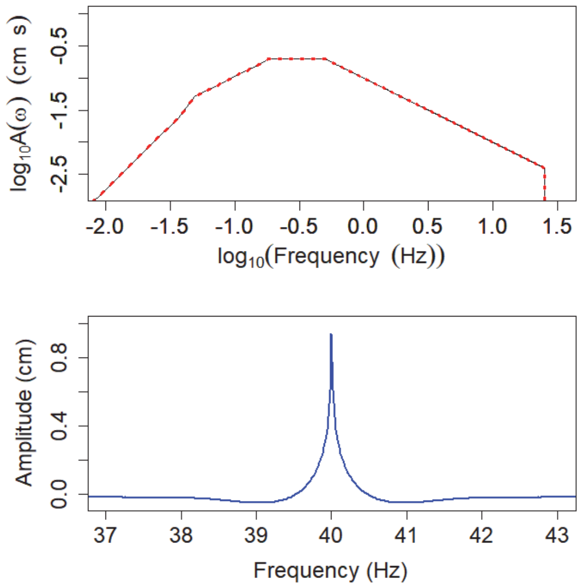

図-1 モーメントマグニチュード$M_w=6$に相当する加速度フーリエ振幅スペクトル$A_a(\omega)$(上図)と$t_0=2.5s$に設定したときの$A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t_0}$のフーリエ逆変換の実数部の時間関数.

3. 統計的グリーン関数の作成上の注意点

ここでは，Boor(1983)の方法により，**図-1**の上図に示

した加速度フーリエ振幅を満たす統計的グリーン関数を作成するする場合に，注意しなけらばならない，幾つかの留意点を明らかにする．

(1) 留意点I

まず，離散時間間隔を$\Delta_0 t = 0.02s$と置き，継続時間を$T = \Delta_0 t 2^{12} = 81.92s$とした場合に対して，平均値ゼロで標準偏差$\sigma$の正規分布$N(0,\sigma)$から独立同分布で$2^{12}$個の乱数列を生成し，それを$\Delta_0 t = 0.02s$間隔で離散化した，離散時刻点上に配置してできる時刻歴$r(t,\sigma)$をピンクノイズと呼ぶことにする．ホワイトノイズと呼ばないのは振動数帯域が$[0,f_{Ny}]$に限定されているからである． この， 時刻歴をフーリエ変換したものを，$A_r(\omega,\sigma)\mathrm{e}^{-i\phi_r(\omega,\sigma)}$とする．$A_r(\omega,\sigma)$と$\phi_r(\omega,\sigma)$は$r(t,\sigma)$のフーリエ振幅と位相である．$r(t,\sigma)$を透過時間特性$h(t)$を有するシステムへの入力とすれば，その出力$g(t)$は合成積として，$g(t) = r(t,\sigma) * h(t)$と表現される．これを統計的グリーン関数とするのが，Booreの方法である．いま，$g(t)$のフーリエ変換を$G(\omega)$とすれば，それは次式で与えられる．

$$G(\omega) = A_a(\omega)A_r(\omega,\sigma)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_r(\omega,\sigma))} \quad (10)$$

ここに，ωt_0は線形時間遅れ項である．今，$G(\omega) = A_G(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_G(\omega))}$と表現すれば，次式を得る．

$$A_G(\omega) = A_a(\omega)A_r(\omega,\sigma),\ \ \phi_G(\omega) = \phi_r(\omega,\sigma) \quad (11)$$

一方，$\sigma = 1$なら，$A_r(\omega,\sigma)$の期待値は$E[A_r(\omega,\sigma)] \equiv 1$となるのが明白なので，$A_r(\omega,\sigma) \equiv 1$とすれば，$A_G(\omega)$は**図-1**の上図のフーリエ振幅関数と一致する．継続時間が$T = 81.92s$の正規乱数時刻歴$r(t,\sigma)$を生成するとき，$\sigma = (0.01,0.05,0.1,0.5,1)$と変えると， フーリエ振幅$A_r(\omega,\sigma)$とフーリエ位相$\phi_r(\omega,\sigma)$がどのように変化するかを描画したのが**図-2**である．上図がフーリエ振幅で，下図がフーリエ位相である．両者ともσの大きさの順に黒・赤・緑・青・水色の曲線で描画されている．いずれも初期乱数は同一のものを用いているので，フーリエ振幅の形状は相似であり，振幅がσと共に大きくなることが分かる．一方フーリエ位相はσの大きさによらず，一定であり，$\phi_r(\omega,\sigma) = \phi_{r0}(\omega)$と表されることが分かる．したがって，$A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_{r0}(\omega))}$の逆変換を取れば，統計的グリーン関数$g(t)$が求められることになる．こうして求められた$g(t)$が**図-3**の下図に青太線で示されている．上図の青太点線は$g(t)$のフーリエ変換から求まるフーリエ振幅であり，当然であるが$A_a(\omega)$に一致している．また，時間領域でのパワーと振動数領域のパワーが一致するとする，次式のパーセバルの等式も成立している．

$$\int_0^T g(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2f_{ny}}\left(A_a(\omega)\right)^2 df = 0.06793 \quad (12)$$

$g(t)$を生成するのにピンクノイズのフーリエ位相を用

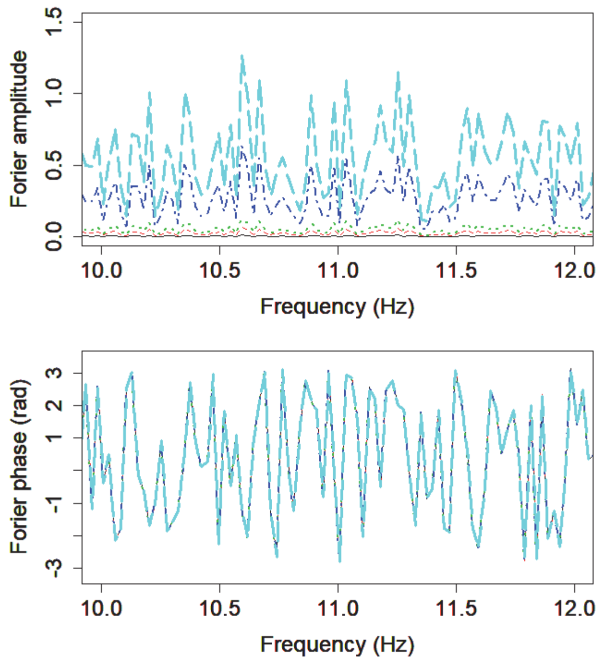

図-2 標準偏差σを$\sigma = (0.01,0.05,0.1,0.5,1)$と変えたときピンクノイズ$r(t)$のフーリエ振幅$A_r(\omega,\sigma)$（上図）と位相$\phi_r(\omega,\sigma)$（下図）を描画した．

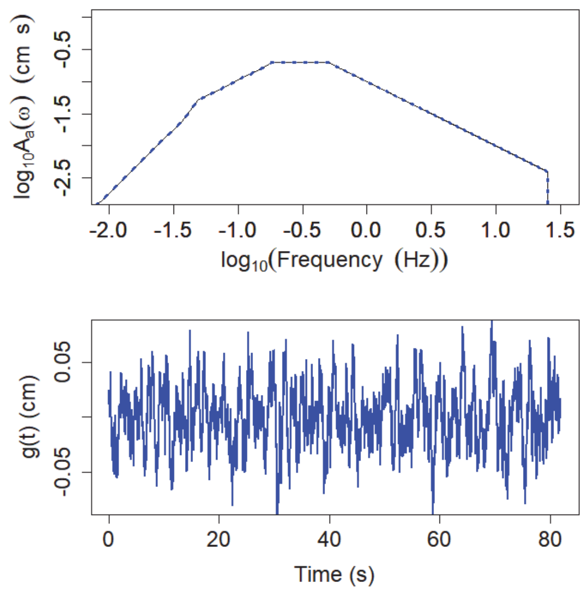

図-3 上図の黒細実線で示されるフーリエ振幅標$A_a(\omega)$と**図-2**の数に示した$\phi_{r0}(\omega)$から求めた，$A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_{r0}(\omega))}$をフーリエ逆変換して得られた時間関数$g(t)$（下図青太線）とそれをフーリエ変換した結果(上図太青点線)．

いているので，ランダム位相となっていることから，$g(t)$を統計的グリーン関数とすることも可能であるが，問題は，継続時間が81.92sと長いことである．小地震の時刻歴は，対象としている地震のマグニチュードが比較的小さいので，継続時間が短くなければならない．こ

の問題を解決するには，以下の点に留意すればよい．

(2) 留意点II

図-3下図に示した$g(t)$の継続時間が長いので，設定しているモーメントマグニチュードに相当する包絡線関数$E(t)$を$g(t)$に乗じたものを，$g_0(t)=E(t)g(t)$とし，これを統計的グリーン関数とすることにする．ここでは，原子力発電所耐震設計指針[5]に定義されている次式の包絡線関数を利用して，問題点を解決する

$$E(t)=\begin{cases}(t/t_b)^2 & 0\le t\le t_b\\ 1 & t_b<t\le t_c\\ \exp\{\epsilon\cdot(t-t_c)/T_d\} & t_c<t\le t_d\\ 0.1 & t_d<t<f_N\\ 0 & t_N\le t\le\infty\end{cases}\quad(13)$$

ここに，t_Nナイキスト振動数である．なお，ϵ，t_b，t_c，t_dは次式で定義される．

$$\epsilon=\ln(0.1),t_b=10^{0.5M-2.93}$$
$$t_c-t_b=10^{0.3M-1.0}\quad(14)$$
$$T_d=t_d-t_c=10^{0.17M+0.54\log R_{eq}-0.6}$$

なお，Mは地震のマグニチュード，R_{eq}は等価震源距離(km)である．本論文で用いているマグニチュードはモーメントマグニチュードであるが，ここでは，便宜的にMを$M_W=6$に等置し，$R_{eq}=80\mathrm{km}$とした上で，ここで用いる包絡線関数$E(t)$を計算する．

この場合に式(12)の形式で表現される，パーセバルの等式を満たすように包絡線関数を決定しておく必要がある．式(13)で，包絡線関数$E(t)$を計算し，$g(t)E(t)$とした時間関数を**図-4**上図の緑線で示した．黒細実線は**図-3**下図の青線を再描画したものである．赤と青の細実線は$t_b<t\le t_c$区間内で$\max|g(t)|=a$とし，$\pm aE(t)$で表現される包絡線関数である．**図-4**下図は**図-3**上図に描画してあるフーリエ振幅スペクトル以外に，$g(t)E(t)$をフーリエ変換しそのフーリエ振幅スペクトルを緑細実線で描画している．この時間関数のパワーは0.0088129となり，黒細実線や青太点線で表現されてている式(12)で与えられる加速度フーリエ振幅スペクトルのパワー0.06792653と比べるとかなり小さくなっている．そこで，両者の比の平方根を計算すると，$a_0=2.7763$となるので，$g(t)E(t)$にa_0を乗じたものを，$g_0(t)=a_0g(t)E(t)$と表現し，$g_0(t)$を目的とする統計的グリーン関数とする．

図-5の最上段に最終的に得られる統計的グリン関数である$g_0(t)=a_0g(t)E(t)$を描画した．ここで展開したのは，離散時間間隔を$\Delta_0t=0.02s$と固定したときのアルゴリズムであるので，Δ_0tの大きさを変更したときに，どうなるかを検討する．このため，作成するピンクノイズの継続時間を$T=\Delta_0t\cdot2^{12}=81.92s$に固定し，$\Delta_0t=T/2^8$と$\Delta_0t=T/2^{13}$とした場合を**図-5**の中段と下

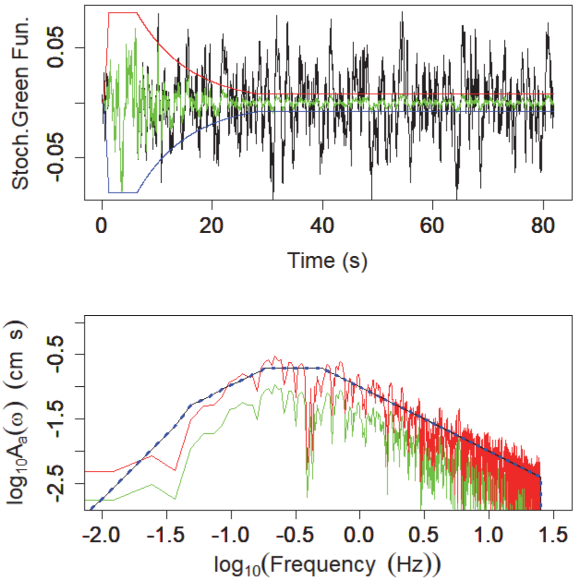

図-4 上図の緑細実線が統計的グリーン関数を決定する基になる時刻歴．黒の細実線は**図-3**の青太実線の時刻歴と同じで，赤と青細実線は包絡線関数であり，黒実線の時刻歴に包絡線関数を乗じて求まるのが，緑細実線の時刻歴．下図の黒細実線と青太点線は**図-3**上図に示した地震の相似則を満たす加速度フーリエ振幅．緑細実線は上図の緑細実線時刻歴のフーリエ振幅スペクトルであり，目標とする加速度フーリエスペクトルの間には差が見られる．そこで，緑細実線のフーリエ振幅スペクトルから求まるパワーと黒細実線のフーリエ振幅スペクトルのパワーが一致するように緑細実線のフーリエ振幅スペクトルを補正したのが赤細実線のフーリエ振幅スペクトルである．

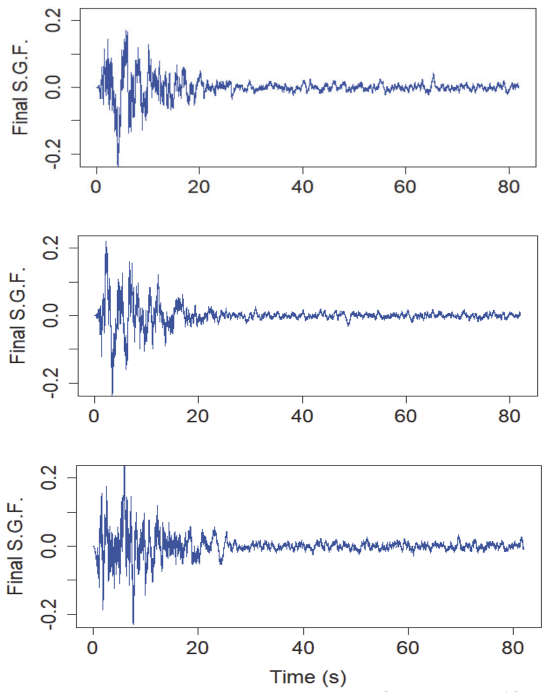

図-5 離散時間間隔を$\Delta_0t=0.02s, 0.02/2^8s,\ 0.02/2^{13}s$としたときの，**図-4**下図の赤細実線のフーリエ振幅スペクトルを満たす統計的グリーン関数．いずれも，ほぼ似たような時刻歴になっている．

段に描画した．これらの結果から$\Delta_0 t$の大きさによらず，本章で展開したアルゴリズムにより，統計的グリーン関数を作成できることが分かる．

(3) 簡便法の提案

本章では，統計的グリーン関数を生成するために，時間領域で離散時間間隔$\Delta_0 t$でピンクノイズ$r(t,\sigma=1)$を生成した上で，そのフーリエ位相を$\phi_r(\omega,\sigma=1)=\phi_{r0}(\omega)$の形式で抽出し，相似則に従う加速度フーリエ振幅$A_a(\omega)$から，$A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_{r0}(\omega))}$をもとめ，その逆変換で$g(t)$を定義していた．しかし，こうした回りくどい方法でフーリエ位相を定義する必要性はなく，$\phi_{r0}(\omega)$過程を，直接，円振動数領域におけるピンクノイズとすれば良いことが想像できる．そこで，$\Delta_0 t=0.02s$ tとし，振動数領域の離散間隔Δfを継続時間$T=\Delta_0 t\cdot 2^{12}=81.92s$の逆数の場合を基本として$\Delta_0 f=1/T$と表現し，$\Delta f=\Delta_0 f,\Delta_0 f/2^8,\Delta_0 f/2^{13}$の場合について，$N(0,1)$の確率密度関数から独立同分布で作成した乱数列を位相過程$\phi_{r0}(\omega)$とし，フーリエ振幅スペクトルは$A_a(\omega)$**図-1**の上図に与えられているものとして，$\Delta_0 f=1/T$の場合に，$G(\omega)=A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_{r0}(\omega))}$の逆変換で求められる$g(t)$を描画したのが，**図-6**の下図である．上図は$A_a(\omega)$を再掲したものである．$t_0=40s$であるので，40秒近辺で大きなパルス状の時間関数が発生するが，全体的にはランダム性が保持されており，振幅の大きさも**図-3**の下図に青太線で示した時系列と整合的である．ただ，40秒付近に発生するパルス状の時刻歴の最大値は0.576であり，**図-1**の下図のパルスのピーク値0.937の約61%程度になっている．

$\Delta f=\Delta_0 f,\Delta_0 f/2^8,\Delta_0 f/2^{13}$の場合について，時刻歴を描画したのが**図-7**である．Δfが小さくなるにしたがって，40秒のところに発生するパルスの形状が明確になってくる．この最大振幅値は，何れの場合も，**図-1**下図の最大振幅の約61%程度になっている．これは，Δfの大きさにより，時刻歴のランダム性が消失することを意味している．しかし，$\Delta_0 t=0.02s$とし，$\Delta f=\Delta_0 f$とした場合には，40秒の所に発生するパルスの振幅を小さくできれば，本章(2)節に説明した方法で統計的グリーン関数が生成できそうである．そこで，位相過程$\phi_{r0}(\omega)$を規定する乱数列を$N(0,\sigma)$の確率密度関数から独立同分布で再生するものとし，$\sigma=1,2,3.5$と変化させた場合の$g(t)$を描画したのが，**図-8**である．図から明かなように$\sigma=3.5$程度に設定しておけば，$g(t)$の40秒の所に現れていたパルス状の信号は消失し，$g(t)$を統計的グリーン関数を生成する元関数として用いてもよいと考える．その上で，本章(2)節で展開した方法で，統計的グリーン関数$g_0(t)=a_0 g(t)E(t)$を作成したのが，**図-9**である．この図から，離散時間間隔と離散振動数間隔が適切に

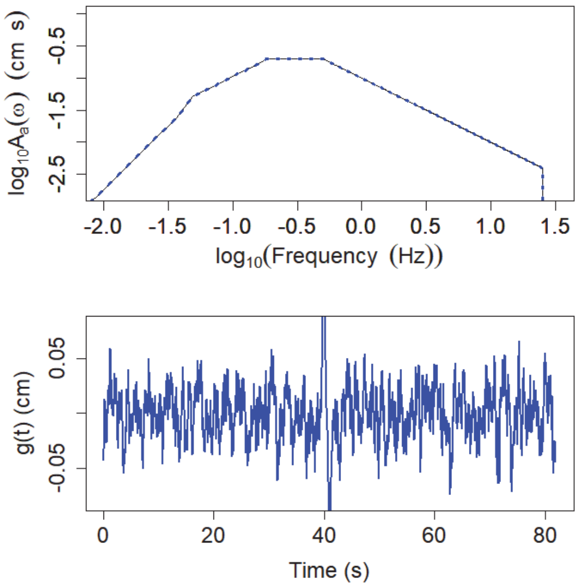

図-6 $\Delta_0 t=0.02s$の場合を対象とすると，ナイキスト振動数は$f_N=0.5/\Delta_0 t=25\mathrm{Hz}$であるので，離散振動数間隔を$\Delta f=f_N/2^{12}$としたときの，$\phi_{r0}(\omega)$を$N(0,1)$からの乱数列として，$G(\omega)=A_a(\omega)\mathrm{e}^{-i(\omega t_0+\phi_{r0}(\omega))}$の逆変換で求められる$g(t)$を描画したのが下図の青太実線．40sの所に発生しているパルス状の時刻歴を除いて時系列のランダム性や振幅は**図-3**下図に与えられている時系列と整合性を有している．

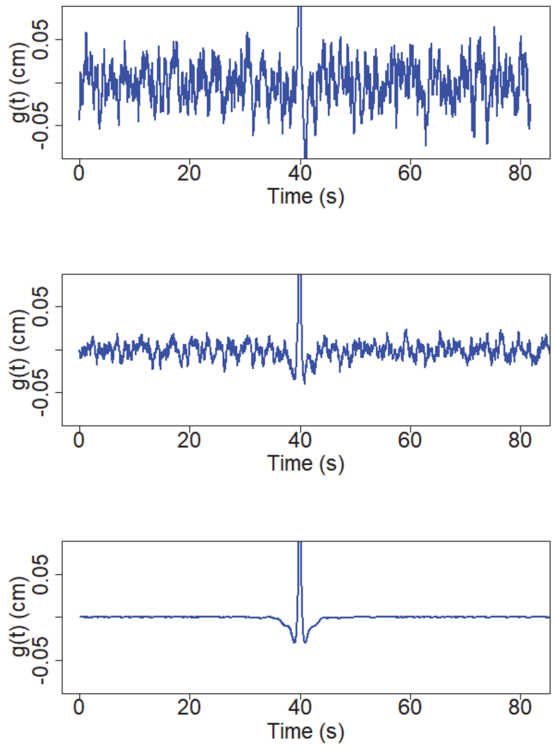

図-7 離散円振動数間隔を$\Delta f=f_N/2^{12},f_N/2^{15},f_N/2^{25}$とした場合の$g(t)$を描画したもの．$\Delta f$が小さくなるにつれて，40秒の所のインパルスが鮮明になり，インパルス振幅の最大値は上から，0.576，0.567，0.569であり，**図-1**下図のパルスのピーク値0.937の約61%程度になっている．

に設定されており，正規乱数を生成するときの標準偏差の値が有る程度大きく取られておれば，位相をピンクノイズ過程と設定する方法も，統計的グリーン関数を模擬する有用な方法であることが分かる．

4.　統計的グリーン関数作成上の問題点

(1)　確率過程の定義

ピンクノイズを生成するには任意の確率密度関数から独立同分布で再生した乱数列から構成される確率過程が重要な役割を果たすので，まず，確率過程の定義を明確にする．いま，任意の確率密度関数$p(X)$に従う確率変数をXとし，その標本xの集合を$\{x\}$とした場合，確率変数が媒介変数ξの関数として$X(\xi)$と表現されたものが確率過程となる．当然であるが，標本も媒介変数の関数となり，$x(\xi)$と表され，標本過程と名付けられるが，確率過程はこの標本過程の集合として，$X(\xi)=\{x(\xi)\}$と定義される．標本過程が媒介変数の連続過程として定義される場合には，媒介変数を離散間隔$\Delta\xi$で離散化された，媒介変数の離散点を$\xi_j=j\cdot\Delta\xi$とし，標本過程を$x_j=x(\xi_j)$とすれば，$X_j=X(\xi_j)=\{x(\xi_j)\}=\{x_j\}$と表現されるので，確率過程を離散過程として議論しても問題は起こらない．ただ，jを固定すると，x_jは確率密度関数$p(X)$からのサンプルであるので，加算個とはならない完備な実数値となっていることに注意しなければならない．

(2)　独立同分の乱数列からなる確率過程の特徴

媒介変数を時間tとし，それを$\Delta_0 t$間隔で離散化した離散散時間点を$t_j=j\cdot\Delta_0 t$とし，確率密度関数$p(X)$に従う独立同分布の乱数列をr_jとすれば，$\Delta_0 t$間隔での後退差分Δr_jは次式で表現される．

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1} \tag{15}$$

r_jは独立同分布で生成されているので，$\Delta_0 t$の値によらず$r_j \neq r_{j-1}$が常に成立している．したがって，$\Delta_0 t \to 0$の極限において，$\Delta r_j \to 0$とはならないので独立同分布の乱数列から構成される確率過程$r(t)$は時間の連則関数にはならない．これは，媒介変数を円振動数とする位相過程$\phi_{r0}(\omega)$についても同じであり，得率同分布の乱数列を用いて，円振動数に関して連続な位相過程を確率過程として定義できない．ちなみに，加速度時刻歴$x(t)$がリーマン積分可能であれば，そのフーリエ変換の実数部$R(\omega)$と虚数部$I(\omega)$は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \\ I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned} \tag{16}$$

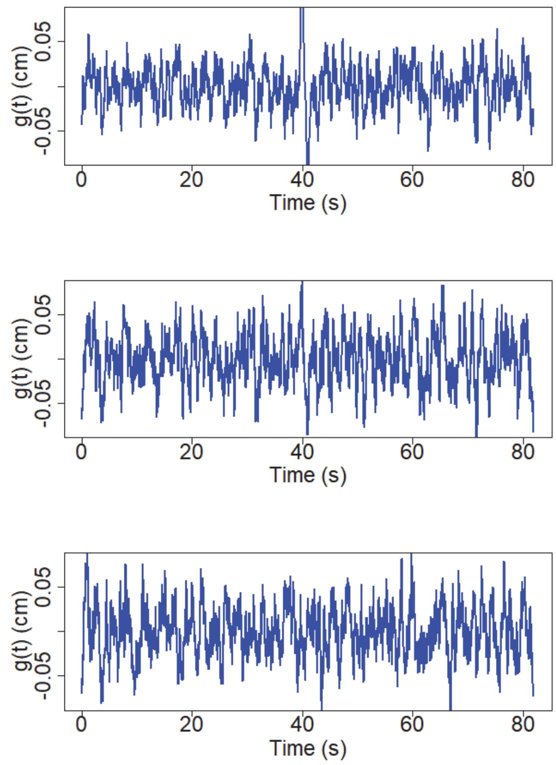

図-8　位相過程$\phi_{r0}(\omega)$を正規乱数列とする際に，標準偏差を$\sigma=1,2,3.5$と変化させて求めた$g(t)$の時刻歴．上段から下段にかけてσの変化に対応している．

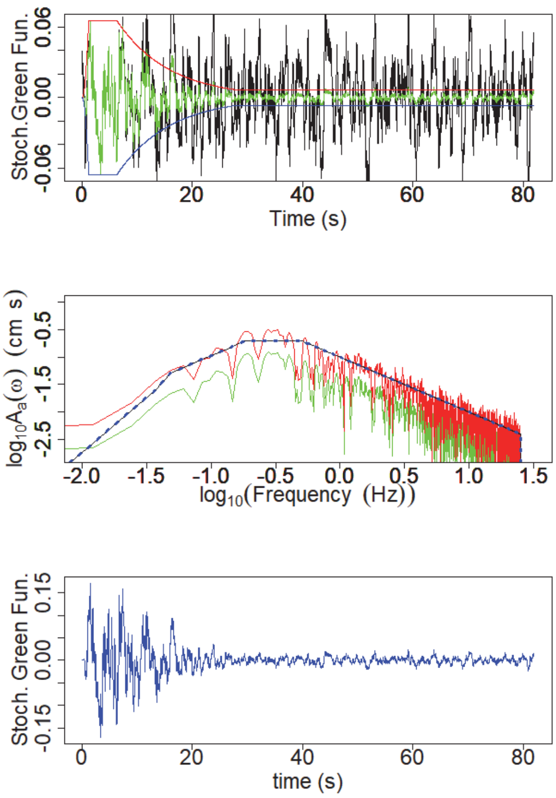

図-9　本章(2)節で述べた方法で統計的グリーン関数$g_0(t)$を決定する過程が上段と中段に描画されており，下段は求められた$g_0(t)$の時刻歴．

これから，加速度時刻歴のフーリエ変換の実数部と虚数部は円振動数の連続関数であることが分かる．位相過程は$\phi(\omega)$は$\tan\{\phi(\omega)\}=I(\omega)/R(\omega)$で定義されるので，円振動数の多価関数になるが，位相のアンラップ操作が合理的に行えれば，$R(\omega)\equiv 0$となる円振動数点を除けば，基本的に位相過程は円振動数の連続関数と考えることができる．

(2) 媒介変数に関して連続な確率過程の特徴

ここでは，差分標本過程$\Delta_0 y_j$が，確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$から独立同分布で生成した乱数列$\{r_j\}$で表現できる，次式のような場合を考える．

$$\{\Delta_0 y_j\}=\{r_j\} \tag{17}$$

式(15)と(17)の違いは重要である．式(15)では確率過程そのものがランダム確率過程であるのに対して，式(17)は差分標本過程がランダム確率過程になっている点である．この場合，$\Delta_0 y_j$の分散$\sigma_{d_0y}^2$は次式で与えられる．

$$\sigma_{\Delta_0 y}^2=\sigma^2 \tag{18}$$

$y(\omega)$が円振動数の連続関数である場合を考えると，$\Delta_0 y_j$をk個トバシにk個ずつ足し込んだ離散時間間隔が$\Delta t=k\Delta_0 t$となるような，差分間隔の大きな差分確率標本過程は次式で与えられなければならない．

$$\Delta y_j=\sum_{l=1}^{k}\Delta_0 y_{k(j-1)+l} \tag{19}$$

この場合，r_jが確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$から独立同分布で生成した乱数であることを考慮すれば，Δy_jの分散$\sigma_{\Delta y}^2$は次式で与えられる．

$$\sigma_{\Delta y}^2=k\sigma_{\Delta_0 y}^2=k\sigma^2 \tag{20}$$

さらに，中心極限定理からkの値が大きくなれば，Δy_jの確率密度関数は正規分布に収束することになる．ここで問題になるのは，円振動数は連続な実数値であるので，$\Delta_0 t$はいくらでも小さく取れることである．そこで，$\Delta_0 y$を$1/K$にした，円振動数間隔$\Delta_K t=\Delta_0 t/K$を考えてみる．この場合でも，$\Delta_K t$間隔で求めた位相差分$\Delta_K y$の分散は$\sigma_{\Delta_K y}^2=\sigma^2$であるから，式(20)は次式のように書き変えられる．

$$\sigma_{\Delta y}^2=kK\sigma_{\Delta_K y}^2=kK\sigma^2 \tag{21}$$

式(20)と(21)を比較することにより，離散時間間隔の取り方が異なると，離散時間間隔Δtでの分散の値が異なることが分かる．さらに，時間は連続な実数値であるので実数値の完備性からKの値はいくらでも大きく取ることができるので，この結果は$\sigma_{\Delta y}^2$が時間の至る所で無限大に発散することになる．これから差分過程を直接ランダム確率過程とする確率過程は連続な過程のモデルとして成立しないことが分かる．

この矛盾をなくすためには，$y(t)$が時間tに関して連続であるとする拘束条件を導入する必要がある．すなわち，任意の離散時間間隔Δtに対して$\Delta t\to 0$の極限で$\sigma_{\Delta y}^2\to 0$が満たされるようになっていなければならない．この条件は，標準偏差$\sigma_{\Delta y}$が次式の関係を満たしており，

$$\sigma_{\Delta y}=a(\Delta t)\sigma_0 \tag{22}$$

$\Delta t\to 0$のときに，$a(\Delta t)\to 0$となることを満たしておればよい．σ_0は適当な定数である．式(22)は任意の離散円振動数間隔に対して成立しなければならないので，次式の成立することも要求する．

$$\sigma_{\Delta_0 y}=a(\Delta_0 t)\sigma_0 \tag{23}$$

式(20)の左辺を式(23)で置き換え，式(22)の関係を式(20)の右辺に代入すれば，次式が得られる．

$$a^2(\Delta t)\sigma_0^2=ka^2(d_0 t)\sigma_0^2 \tag{24}$$

$\Delta t=k\Delta_0 t$であったから，式(24)より関数$a(\ \ )$の拘束条件として次式が得られる．

$$a^2(k\Delta_0 t)=ka^2(\Delta_0 t) \tag{25}$$

$\Delta_0 t$は任意に選べるので，式(25)の関係を満たすことのできる一番単純な関数形式は，次式で与えられる．

$$a(\Delta_0 t)=\sqrt{\Delta_0 t} \tag{26}$$

この場合には，当然であるが次式の関係が成立する．

$$a(\Delta t)=\sqrt{\Delta t} \tag{27}$$

したがて，$\sigma_{\Delta y}^2=\Delta t\sigma_0^2$と表現できる．一方，中心極限定理から，差分確率過程を規定する確率密度関数は確率密度関数$p(0,\sigma^2,Z)$がどのようなものであれ，分散$\sigma_{\Delta y}^2$を有する正規分布と成っていなければならない．この結果，Δy_jの確率密度関数は次式で表現されることになる．

$$p\left(\Delta y_j\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta t}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{\left(\Delta y_j\right)^2}{2\Delta t\sigma_0^2}\right\} \tag{28}$$

この場合の$\{\Delta y_j\}$は，標準正規確率密度関数$N(0,1)$から独立同分布で生成した乱数列を$\{X_j\}$とすれば，次式のように表現される．

$$\left\{\Delta y_j\right\}=\sqrt{\Delta t}\sigma_0\{X_j\} \tag{29}$$

これは，少なくとも，差分確率過程がブラウンノイズ(ウイナー増分)過程としてモデル化されなければならないことを意味しており，確率過程はウイナー過程[8]となっていなければならないとこを意味している．式(29)から確率過程$\{y(\omega)\}$の離散平均勾配過程が次式で定義できる．

$$\left\{\frac{\Delta y_j}{\Delta\omega}\right\}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{\Delta\omega}}\{X_j\} \tag{30}$$

これは$\Delta t\to 0$の極限で確率過程の媒介変数に対する微分値が無限大に発散することを意味している．すなわち，確率過程が微分不可能な過程となっていることを意味しているが，ウイナー過程が微分不可能な確率過程[8]として定義されることからも容易に理解できる．

媒介変数を時間とする連続な確率過程の特性を述べたが，媒介変数を円振動数とする位相過程を取り扱う場合も，ここで述べたことはそのまま成立する．

ここで述べたことは，統計的グリーン関数を確率過程

としてモデル化する際の，かなり厳しい拘束条件となっている．それは，時間に関してリーマン積分可能な加速度過程を取り扱う場合，統計的グリーン関数を規定する確率密度関数を有限な加速度計測データから推定しようとすると，分散値は必ず計算できるので，確率特性のモデル化に際しては，如何なる確率密度関数を使用しても，それは分散値を有する確率密度関数として定義せざるを得ないことである．その上で，独立同分布の仮説が成立するとして，統計的グリーン関数を確率過程として模擬しようとすると，中心極限定理の要請を満たす確率密度関数の最も単純な形式が式(20)の形式になるので，統計的グリーン関数は少なくともウイナー過程を用いて表現されなければならないことになる．

5. むすび

統計的グリーン関数の作成法に関する留意点について議論した後，加速度時刻歴を模擬するための統計的グリーン関数を生成するためには，特定の確率密度関数から独立同分布で生成された乱数列を用いることのできないことを喚起した．加速度時刻歴が時間に関してリーマン積分可能な時間関数でなければならいことに根拠を置き，加速度時刻歴のフーリエ変換で定義される位相過程も円振動数に関する区分連続関数になっていなればならないことを明確にした上で，統計的グリーン関数を生成するためのランダム過程が，媒介変数の連続関数として定義される確率過程となることから，それが少なくともブラウン運動過程として定義されなければならないことを明確にした．

謝辞：本研究を推進するに当たり，日本学術振興会から科学研究助成基金助成金#18K04334の援助を得た．謝意を表す．

参考文献

1) 入倉考次郎：強震動予測レシピ，http://www.kojiro-irikura.jp/pdf/kyoushindouyosoku_recipe.pdf，2018 年 7 月 10 日閲覧.
2) Boore, M. D. : Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra, *Bull. Seism. Soc. Am.,* Vol. 73, No. 6, pp.1865-1894, 1983.
3) Kanamori, H. : The energy release in great earthquakes, *Journal of Geophysical Research,* Vol.82, No. 20, pp. 2981–2987,1977.
4) Geller, R. J. : Scaking relations for earthquake source parameters and magnitudes, *Bull. Seism. Soc. Am.,* Vol 66, pp.1501-1523, 1976.
5) 金森博雄：岩波地球科学選書 地震の物理．岩波書店，1991.
6) Somerville, P.G., Irikura, K., Graves, R., Sawada., S., Wald, D., Abrahamson, N., Iwasaki, Y., Kagawa,T., Smith, N. and Kowada, A. : Characterizing crustal earthquake slip models or the prediction of strong ground motion. Seism.. Res. Lett., 70, 59-80. 1999.
7) 日本電気協会：原子力発電所耐震設計指針，pp.101，2008.
8) Karatzas, I. and Shreve S.E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.

SEVEAL PROBLEMS TO PAY ATTENTIN FOR SIMULATING THE STOCHASTIC GREEN’S FUNCTION

Tadanobu SATO, Kouhei TANAKA, Kimitoshi SAKAI and Yoshitaka MURONO

We discuss serval issues that we should take care for simulating the stochastic Green’s function. Based on the basic hypothesis that acceleration time history is a Remain integrable time function we derive the Fourier phase of accretion time history is a piece wise continuous function with respect to circular frequency. To simulate the time history of acceleration and its phase process as a stochastic process we deduce that the random process generated based on the independent identically distributed assumption cannot apply to simulate stochastic Green’s function. To overcome this deficiency we derive theoretically the necessary condition to satisfy the continuity of stochastic process. The result tells us that at least the Weiner process should be used to simulate the stochastic Green’s function.