

KL 展開による応答スペクトルの モード分解と合成

能島 暢呂¹・久世 益充²

¹正会員 岐阜大学教授 工学部社会基盤工学科 (〒501-1193 岐阜市柳戸 1-1)
E-mail:nojima@gifu-u.ac.jp

²正会員 岐阜大学准教授 流域圏科学研究センター (〒501-1193 岐阜市柳戸 1-1)
E-mail:kuse@gifu-u.ac.jp

応答スペクトルの特徴量として 101 次元の特徴ベクトルを抽出し、KL 展開によってモード解析と次元縮約を行う方法を提案する。特徴ベクトルの相関行列の固有値解析により固有値と固有ベクトルを求め、特徴ベクトルを主成分に変換する。さらに、主要モードを用いた逆変換により特徴ベクトルを近似し、情報損失の少ない次元縮約を図るものである。2011 年東北地方太平洋沖地震で観測された加速度記録を用いた数値計算例を示す。得られた固有ベクトルによりモードを順次合成したところ、特徴ベクトルは 5% 減衰で 6~12 次モードまでの合成でほぼ復元でき、減衰 20% ではさらに低次モードで復元できることを明らかにした。また 9 地震の固有ベクトルを比較し、類似性・非類似性について考察を行った。

Key Words: ground motion, amplitude, frequency contents, velocity response spectra, Karhunen-Loève expansion, mode decomposition and synthesis, dimension reduction

1. はじめに

応答スペクトルは、地震動の振幅特性と周期特性を同時に表現できる地震動強度指標であり、継続時間の効果もある程度は反映される。その利便性から、地震動特性の分析に用いられ、耐震設計基準も応答スペクトルで規定されることが多く、工学的に非常に重要な指標である。

筆者らはこれまで、地震動の経時特性の特徴量として、Husid plot (正規化加速度累積パワー曲線) のパーセンタイル値に基づく 98 次元の特徴ベクトルを提案した¹⁾。さらに主成分分析²⁾と等価な KL (Karhunen-Loève) 展開³⁾を用いたモード解析により特徴空間の部分空間を定義し、情報損失の少ない次元縮約方法を提案した⁴⁾。

応答スペクトルに主成分分析を適用した研究は文献^{5,6)}において見られる。石井⁵⁾は 5% 減衰の変位応答スペクトルにおいて 0.1~10s の 9 種の固有周期のスペクトル値を特性値とし、主成分分析を適用して第 1, 2 主成分を用いて地震動の特徴付けを行った。また田中ら⁶⁾は、加速度応答スペクトルの距離減衰式からの対数残差を偏差スペクトルとして、0.03~5s の 25 種の固有周期間の相関係数を求めて、主成分分析を適用した。研究の主眼は距離減衰式まわりのばらつきの評価およびその物理的解釈に置かれており、震源特性・伝播特性・地盤特性との関

連が分析された。

本研究では文献⁴⁾の流れをくんで、KL 展開を次元縮約方法として位置づけ、観測記録の応答スペクトルに応用し、モード解析を行ってモード分解・合成を行うとものである。さらに、減衰定数の及ぼす影響や、異なる地震間での性状の違いについても分析を行う。なお、本研究の提案手法は、絶対加速度、速度、変位の各応答スペクトルのいずれにも適用できるが、本研究では速度応答スペクトルを扱うこととする。

2. 応答スペクトルの特徴ベクトルと KL 展開

(1) 応答スペクトルの特徴抽出

まず応答スペクトルの特徴抽出方法について説明する。本研究では 5% 減衰の速度応答スペクトルを対象とし、周期 $T=0.1\sim 10$ s の区間を対数軸上で 100 等分した 101 点の周期を用いる。

$$T_i = 0.1 \times 10^{\left(\frac{2}{100}\right)(i-1)} \quad (1)$$

これ以降の図において横軸の i は式(1)の i である。各周

期における 5%減衰の速度応答スペクトルを $S_i(T_i)$ として、その常用対数 $x_i = \log S_i(T_i)$ ($i=1, \dots, 101$) を要素とする 101 次元の列ベクトルを特徴ベクトル $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_{101})^T$ とする。

(2) KL 展開による主成分の導出

経時特性を対象とした先行研究⁴⁾では分散共分散行列を用いたが、本研究では相関行列による分析を行うこととする。多数の特徴ベクトル $\mathbf{x}$ の各要素を平均値 0、標準偏差 1 になるように正規化した $\mathbf{x}_0$ から算出される相関行列 $\mathbf{R}$ は、半正値対称行列であり、固有値 λ_i が大きい順に対角要素に並んだ行列 $\mathbf{\Lambda}$ に対角化される。

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T] \quad (2)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Phi} \quad (3)$$

ここに、行列 $\mathbf{\Phi}$ は各固有値に対する固有ベクトルからなり、正規直交基底を構成する。KL(Karhunen-Loève)展開³⁾を適用すると、この基底変換により $\mathbf{x}_0$ は主成分得点 $\mathbf{z}_0=(z_{01}, \dots, z_{08})^T$ に変換される。主成分得点 $\mathbf{z}_0$ は無相関で相関行列は $\mathbf{\Lambda}$ となる。同じ基底変換により特徴ベクトル $\mathbf{x}$ は主成分得点 $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_8)^T$ に変換される。その逆変換により $\mathbf{z}$ から $\mathbf{x}$ を復元する場合、寄与率の高い上位次数の部分空間でも良い近似が得られる

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{x} \quad (4)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{\Phi}^T)^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{\Phi} \mathbf{z} \quad (5)$$

3. 2011 年東北地方太平洋沖地震の観測記録の応答スペクトルの特徴ベクトルと相関関係

本研究では、2011 年東北地方太平洋沖地震($M_w=9.0$)において、防災科学技術研究所の K-NET⁷⁾による 691 地点¹⁴⁾の加速度記録(NS 成分)を用いた数値計算例を示す。691 地点の全記録の特徴ベクトル $\mathbf{x}$ に基づいて求められた箱ひげ図を図-1 に示す。横軸に x_i を並べ、縦軸を速度応答スペクトル[cm/s]の常用対数としている。 x_i の全記録の中央値と、ボックス幅で第 1 四分位点、第 3 四分位点を表す。ボックス外の破線の両端は四分位点範囲の 1.5 倍以内のデータ中の最大値・最小値を示し、それを超える外れ値は丸印でプロットされている。

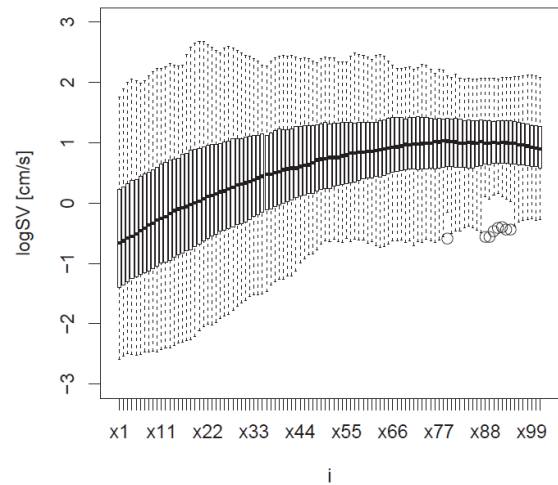


図-1 全 691 記録の特徴ベクトルを用いた箱ひげ図
(横軸は式(1)の i に相当する固有周期)

図-2 は、 $x_{10}, x_{30}, x_{50}, x_{70}, x_{90}$ の 5 種類 (それぞれ固有周期 $T=0.15, 0.38, 0.96, 2.40, 6.03$ s) を代表点として、特徴ベクトル $\mathbf{x}$ の散布図と相関係数を示したものである。散布図中の赤色の折れ線は移動平均線である。図-3 は、特徴ベクトル $\mathbf{x}$ の要素間の相関係数のコンター図を示す。近接する要素間では近い値をとり、相関が非常に高くなっている。一方、離れた要素間ではばらつきが大きい。短周期側と長周期側の端部でも相関係数が 0.75 程度を保っている。短周期側同士の方が、長周期側同士よりも相関がわずかに高い傾向が認められる。

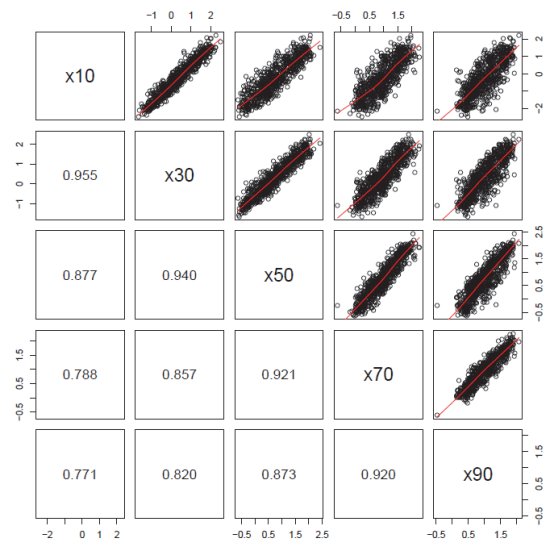


図-2 特徴ベクトルの要素 $x_{10}, x_{30}, x_{50}, x_{70}, x_{90}$ の間の散布図 (上三角) と相関係数 (下三角)

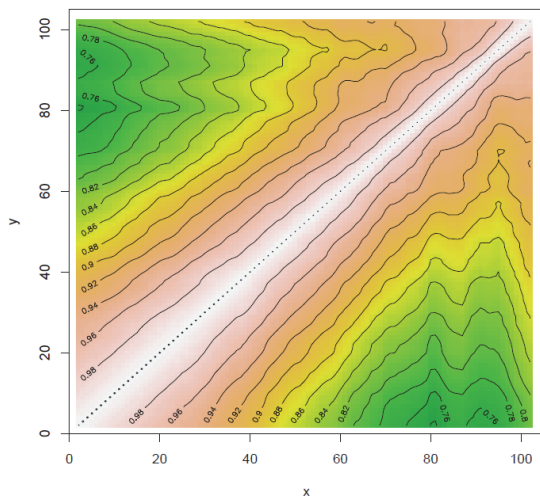


図-3 特徴ベクトル $\mathbf{x}$ の要素間の相関係数のコンター図

第 6 主成分までで 99.5%であった⁴⁾。応答スペクトルの方がやや高次の項まで値を持つことがわかる。継続時間の特徴ベクトルは、要素番号に対して単調増加である⁴⁾のに対して、5%減衰の応答スペクトルは、増減が激しい場合もあることに起因すると考えられる。減衰定数が高い場合については、後に 6. で考察する。

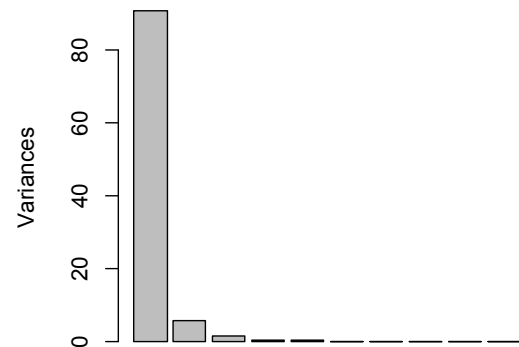


図-4 第 1～10 主成分の固有値 (分散)

2. 特徴ベクトルに基づく固有値と固有ベクトル

(1) 固有値と寄与率および累積寄与率

式(2)に示した固有値 (分散) を第 10 主成分まで図-4 に示す。寄与率は第 1～3 主成分でそれぞれ 89.8%, 6.0%, 1.6%であり、第 3 主成分までの累積寄与率は 97.4%に達し大局的な特徴が反映されている。さらに第 4～6 主成分まででそれぞれ 98.1%, 98.5%, 98.4%である。第 7～10 成分まででそれぞれ 98.88%, 99.04%, 99.15%, 99.25%である。一方、同じ波形のデータセットを用いて継続時間のモード解析を行ったところ、累積寄与率は第 3 主成分までで 98.3%,

(2) 固有ベクトルと主成分負荷量

図-5 に 6 次モードまでの固有ベクトルを示す。

- ・1 次モード：全周期帯にわたってフラットな特性を示しており、スペクトル形状というよりも、むしろ全体的な振幅レベルを表現するモードと考えられる。
- ・2 次モード：2 次モードについては、周期 3.80s 付近と 0.10s 付近にピークがあり、卓越周期が短周期側が長

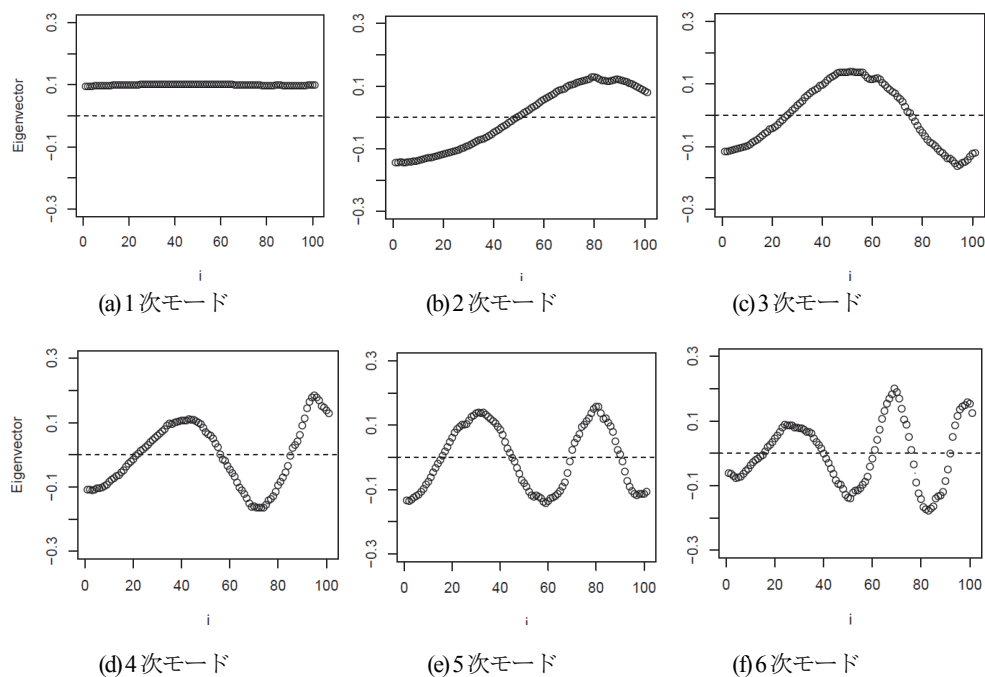


図-5 各主成分に対応する固有ベクトル (横軸は式(1)の i に相当する固有周期)

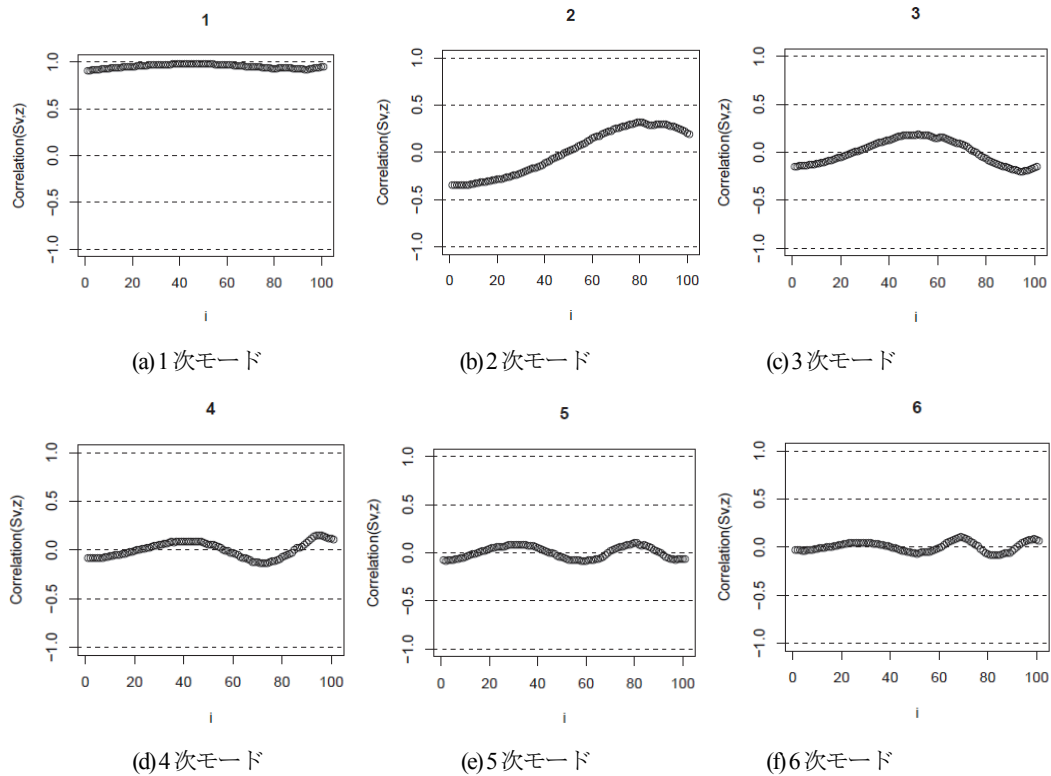


図-6 各主成分の主成分負荷量（特徴ベクトルの要素と主成分との間の相関係数）（横軸は式(1)の i に相当する固有周期）

周期側のいずれににあるかを決定付ける。

- ・3次モード：3次モードは周期 1.05s 付近と 0.10s および 7.24s 付近にピークがあり，中間的な周期帯の卓越度合いを表す。
- ・4～6次モード：高次モードになるほど徐々に複雑な形状を反映したモードとなるが，それぞれが強調する周期帯は比較的明確に表れている。

以上に示したようなモード形状の地震による違いについては，後に 6.で考察する。

文献⁹⁾では「第3主成分以下は寄与率も小さく，主成分の意味もはっきりしなかった」とされている。周期の代表点がわずか9点であることや，解析対象波形が52成分に限られることなどによる精度的限界と考えられる。

特徴ベクトルの要素と主成分との間の相関係数を表す主成分負荷量を図-6に示す。主成分負荷量は-1～1の値をとる。図-5の固有ベクトルと比較すると，主成分の固有値（分散）が大きいほど高くなり，特徴ベクトルの各要素の標準偏差が大きいほど低くなっている。

- ・1次モード：相関係数は概して高い値をとっており， $T=0.63s$ で最高の 0.974 である。また， $T=0.25\sim 2.09s$ 間の広い範囲で 0.95 以上，全周期帯で 0.9 以上となっている。
- ・2次モード：相関係数は1次モードよりもかなり低下し， $T=3.80s$ で最高の 0.319 である。負側では $T=0.1s$

d_0 の -0.352 が絶対値で最大である。

- ・3次モード：相関係数はさらに低下し，極値は $T=0.10, 1.05, 7.24s$ でそれぞれ -0.149, 0.181, -0.209 である。
- ・4～6次モード：高次になるにつれて徐々に相関係数は低下するが，絶対値が最大のものは，4次モードで $T=7.59s$ の 0.149，5次モードで $T=3.80s$ の 0.098，6次モードで $T=2.29s$ の 0.101 となっている。

(3) 主成分得点の分布性状

図-7は対象とした全波形の主成分得点（1～6次）の箱ひげ図を示す。主成分得点のレンジは高次になるほど小さくなる傾向が認められる。図-8は主成分得点 z の空間分布である。

- ・1次モード：多くが正の値であり，全体の強度を支配するモードであるため，明らかに距離減衰的な傾向を示している。
- ・2次モード：正が大多数を占めており，1次モードとは逆の分布傾向となっている。すなわち遠方ほど値が大きく長周期が優勢である。震源近傍の東北～関東地方の太平洋側の一部のみ負の値を示し，短周期が優勢である。
- ・3次モード：ほとんどが正であり，東海～関西地方の平野部で大きな値をとる。北陸周辺では例外的に負の値となっている。

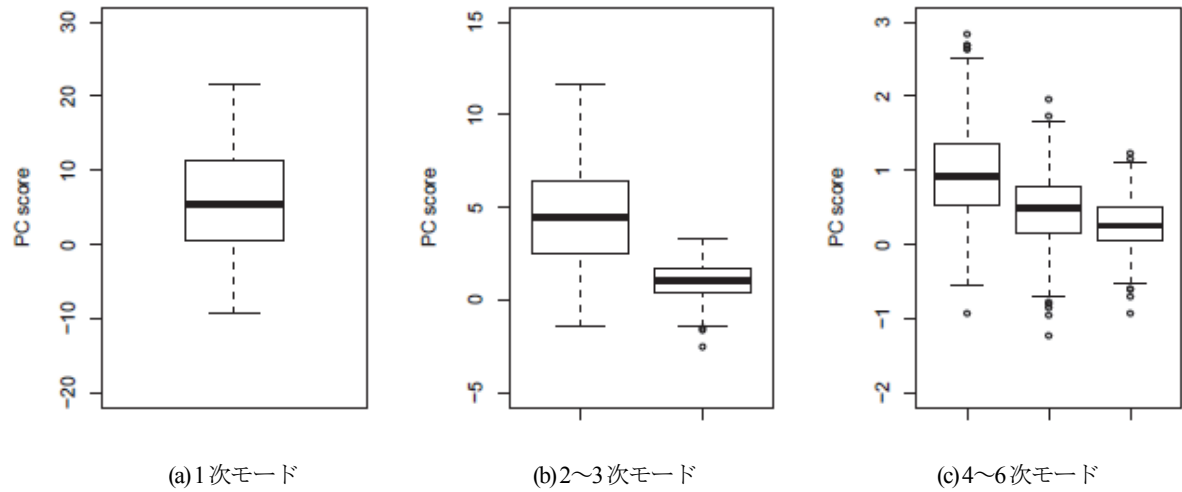


図-7 全 691 記録の主成分得点の箱ひげ図

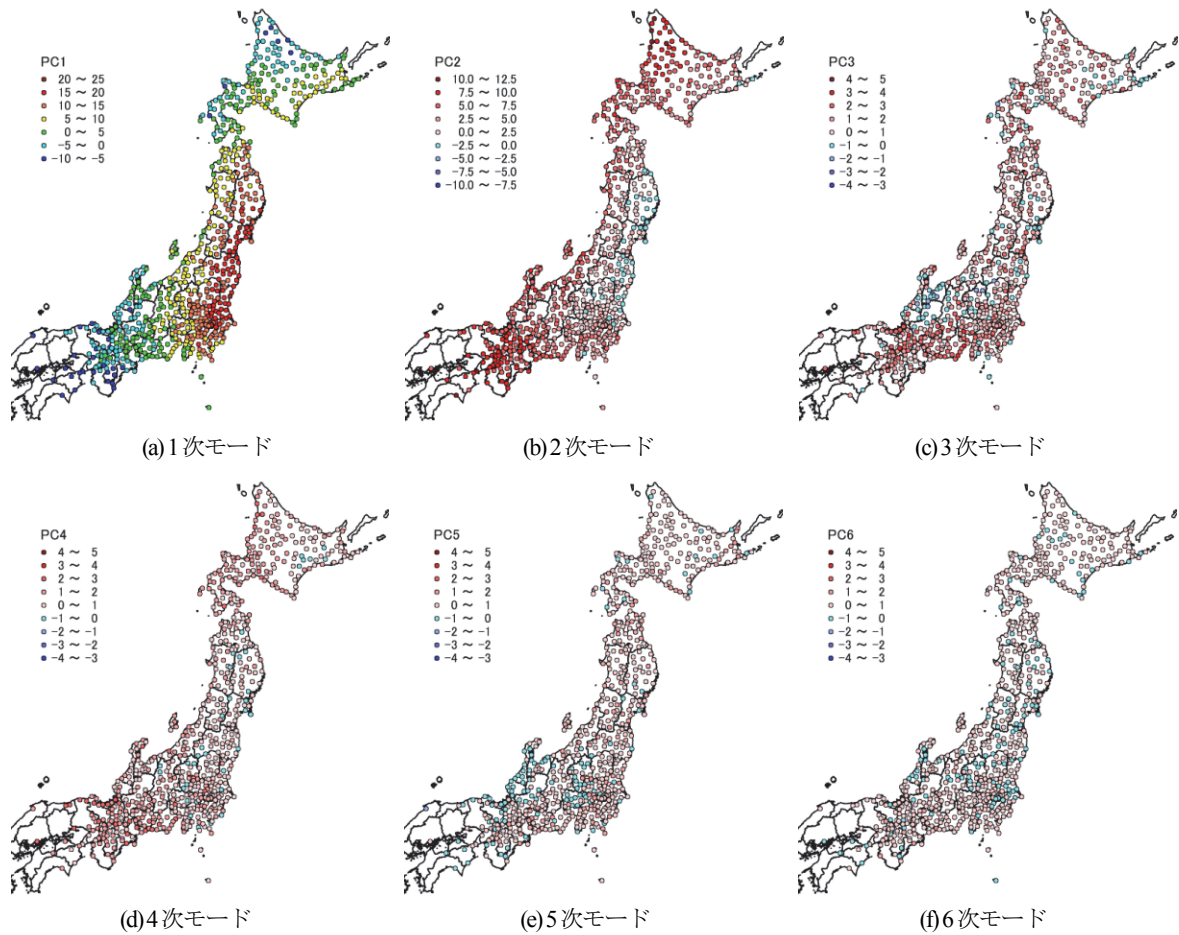


図-8 第1～6主成分得点の空間分布

- ・ 4～6 次モード：正が優勢であるが絶対値はかなり小さい。負の値が一部に見られ、3 次モードに近い分布も見られるが、強い特徴は見られない。

確認する。まず次式により平均値と標準偏差を求める。

(4) 固有モードの特徴ベクトルへの寄与

これらの固有モードが特徴ベクトルに寄与する様子を

$$\bar{\mathbf{z}} = E[\mathbf{z}] = \begin{pmatrix} E[z_1] \\ \vdots \\ E[z_{101}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_{101} \end{pmatrix} \quad (6)$$

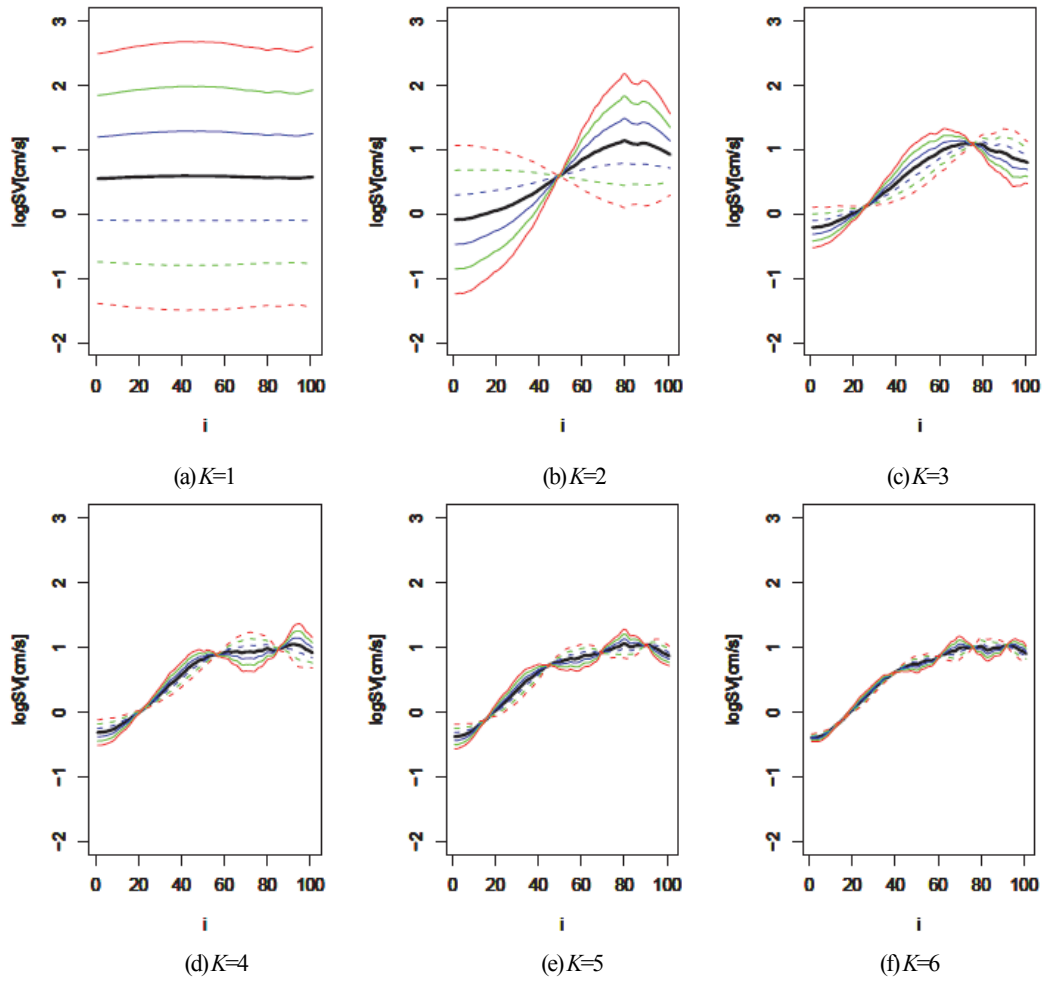


図-9 K 次モードまでの平均値と K 次モードの標準偏差の整数倍を加減した様子（横軸は式(1)の i に相当する固有周期）

$$\sigma_z = \sqrt{\text{Var}[z]} = \sqrt{\begin{pmatrix} \sqrt{E[(z_1 - \bar{z}_1)^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{E[(z_{101} - \bar{z}_{101})^2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{z_1} \\ \vdots \\ \sigma_{z_{101}} \end{pmatrix}} = \sqrt{\lambda} \quad (7)$$

次に、 K 次モードまでを対象として、主成分得点のモードごとの平均値と、 K 次モードの標準偏差の 1, 2, 3 倍を加減して幅を表示する。

$$\widetilde{x_i^{(K)}} = \sum_{k=1}^K \phi_{ik} \bar{x}_k \pm \phi_{ik} l \sqrt{\lambda_k} \quad (l=0,1,2,3) \quad (i=1,\dots,98) \quad (8)$$

図-9(a)は $K=1$ の結果であり、1 次モードの平均値（黒線） $\pm$ 標準偏差 $\times 1, 2, 3$ （それぞれ青線、緑線、赤線で示し、実線はプラス、破線はマイナス）を図示している。第 1 主成分得点は全体的な強度レベルを支配する。図-9(b)-(f) はそれぞれ、 $K=2, \dots, 6$ の場合であり、 K 次モード

までの平均値（黒線） $\pm K$ 次モードの標準偏差 $\times 1, 2, 3$ （同上）を加算したケースを示す。2, 3 次モードについては、それぞれの節を境界として速度応答スペクトルが増減される様子がわかる。4 次モードより高次についても同様であるが、加算される数値の絶対値は小さく、微調整の段階に入っていることがわかる。

5. 特定地点の波形を対象とした特徴ベクトルのモード分解と合成

(1) 対象とした加速度波形とその特徴

具体的な波形として、文献⁴⁾と同様に、秋田県潟上市の K-NET 飯田川(AKT008)、千葉県白井市の K-NET 白井(CHB003)、宮城県栗原市の K-NET 築館(MYG004)の 3 地点における加速度波形(EW 成分)を取り上げ、特徴ベクトルのモード分解と合成について示す。図-10 に 3 地点での加速度波形を示す。それぞれ以下のような特徴を持つ。

(a) K-NET 飯田川(AKT008)：最大加速度は 35.5cm/s^2 で包

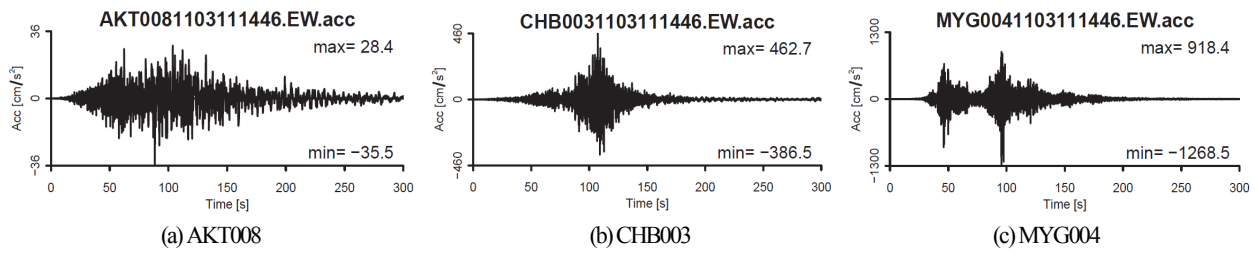


図-10 対象とした3地点における加速度波形 (EW成分)

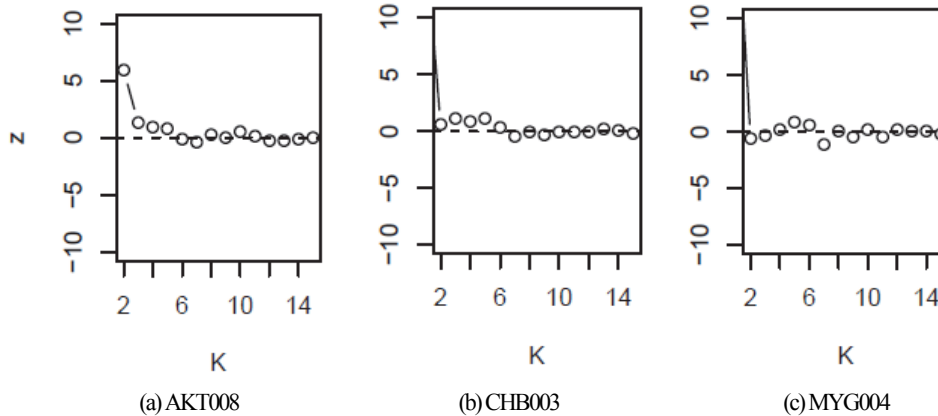


図-11 2～15次モードの主成分得点(1次モードの値は枠外でそれぞれ7.52, 16.66, 21.52)

絡形状が標準的である。

- (b) K-NET 白井(CHB003)：最大加速度は 462.7cm/s^2 で、鋭いピークを持つ。
- (c) K-NET 築館(MYG004)：最大加速度は 1268.5cm/s^2 で、双峰型となっている。

主成分得点については、1次モードに対して(a)-(c)それぞれについて7.52, 16.66, 21.52と得られた。この順は最大加速度と整合し、全体的な振幅の大きさを表している。図-7からもわかるように、1次モードの値が卓越するため、これを除外した2～15次の主成分得点を図-11に示す。それぞれ次のような傾向が見て取れる。

- (a) K-NET 飯田川(AKT008)：2次モードも正でかなり大きく、相対的に長周期側が卓越することを示している。また、5次モードまで正の値を持つ。
- (b) K-NET 白井(CHB003)：2次モードは小さいが、6次モードまで正の値を持つ。
- (c) K-NET 築館(MYG004)：2次モードは小さいが負の値を持ち、相対的に短周期側が卓越することを示している。2～6次モードよりむしろ7次モードが負で比較的絶対値が大きく、9, 11次モードの負の値も着目される。

以上のように各波形の特徴が主成分得点に現れている。

(2) 速度応答スペクトルの復元

図-12は、式(8)において $K=1, 3, 6, 9, 12$ と変化させ、1, 3, 6, 9, 12次までのモードを順次合成して特徴ベクトルを復

元した過程を示し、元の101次元特徴ベクトルの速度応答スペクトルと比較したものである。これらの結果は、以下のようにまとめられる。

- (a) K-NET 飯田川(AKT008)：1次モードのみでは乖離が大きいですが、3次モードまでで概形を良く近似しており、6次モードまででほぼ完全に近似されている。
- (b) K-NET 白井(CHB003)：3次モードまででは不十分であるが、6次モードまでで0.38s付近の卓越周期を含めて概形が捉えられている。
- (c) K-NET 築館(MYG004)：6次モードまででも、0.24s付近の卓越周期が表現できていない。これは図-11(c)の7, 9, 11次以上のモードの寄与があることを示している。12次モードでは概形が捉えられている。

以上より、3～12次モードの比較的低次までの合成で、元の特徴ベクトルが有する特徴を復元できることが確認できた。ただし、応答スペクトルの細部の変動を表現するには、より高次のモードに関する情報が必要である。また、周期間の変動が大きい場合でも同様である。

6. 減衰定数の影響と地震による相違

(1) 減衰定数の影響

前章での検討結果より、応答スペクトルの周期間変動が顕著な場合は、モード合成による復元の際に、高次モードまでの足し合わせが必要であることがわかった。こ

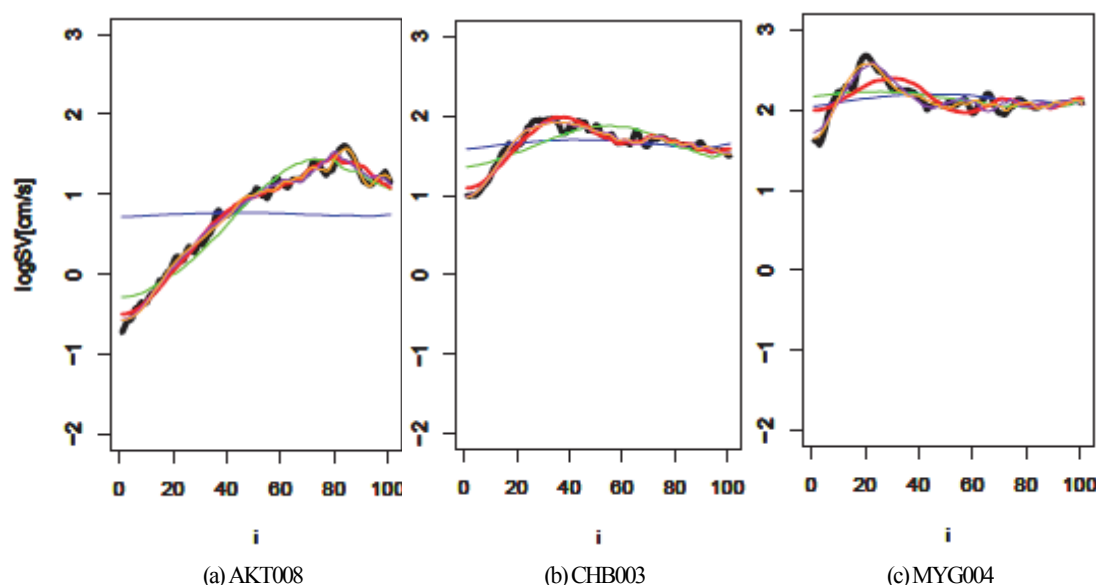


図-12 モード合成による特徴ベクトルの復元

(黒線：101次元特徴ベクトル，青・緑・赤・紫・橙線：それぞれ1,3,6,9,12次まで合成)
(横軸は式(1)の*i*に相当する固有周期)

ここでは減衰定数を 5%から 20%に変更し，前章と同じ 3 地点を対象とした結果を示す。

図-13は2～15次モードの主成分得点である。図-11と比較すると，6次以上の主成分得点が，やや低下していることがわかる。図-14はモード合成による特徴ベクトルの復元結果である。図-12と比較すると，明らかにスペクトル形状が平滑化されており，周期間変動が抑制されているため，6次モードまでの合成によってほぼ復元できていることがわかる。

(2) 地震による相違

比較のため，2011年東北地方太平洋沖地震に加えて8地震を対象として，加速度波形⁷⁾を用いてKL展開を適用し，9地震による固有ベクトルの比較を行う。表-1に地震の一覧を示す。

9地震は，いずれも同様の傾向を示すが，2次～4次モードにおいては，2001年芸予地震がやや短周期寄りであり，2016年熊本地震がやや長周期寄りであることが分かる。高次モードになるにつれて地震間の差異が顕著となり，6次モードではピークの位置がかなりずれていることが分かる。各固有ベクトルは，各地震で観測された地震群の速度応答スペクトルのばらつきを最もよく説明する正規直交基底となっており，観測記録全体の傾向を反映していると考えられる。ただし遠方の地震も多く含まれるため，各地震の特徴を引き出すためには，一定条件でデータを絞り込んだ検討が必要と考えられる。

表-1 検討対象とした地震

No.	年月日	時刻	地震名	Mj	Mw	観測記録数
1	2000/10/6	13:30	鳥取県西部地震	7.3	6.8	303
2	2001/3/24	15:27	芸予地震	6.7	6.8	316
3	2003/9/26	4:50	十勝沖地震	8.0	8.0	339
4	2004/10/23	17:56	新潟県中越地震	6.8	6.7	287
5	2007/3/25	9:41	能登半島地震	6.9	6.6	386
6	2007/7/16	10:13	新潟県中越沖地震	6.8	6.7	390
7	2008/6/14	8:43	岩手・宮城内陸地震	7.2	7.0	330
8	2011/3/11	14:46	東北地方太平洋沖地震	8.4	9.0	691
9	2016/4/16	1:25	熊本地震(本震)	7.3	7.0	363
計						3602

7. おわりに

本研究で得られた成果を以下に要約する。

- 1) 応答スペクトルの特徴量として101次元の特徴ベクトルを抽出し，KL展開を適用してモード解析と次元縮約を行う方法を提案した。2011年東北地方太平洋沖地震で観測された加速度記録を用いて数値計算例を示し，特徴ベクトルは5%減衰で6～12次モードまでの合成でほぼ復元できることを明らかにした。
- 2) 減衰定数が高い場合は，応答スペクトル形状が平滑化され，周期間変動が抑制されるため，低次までのモード合成でも元応答スペクトルが復元できることを明らかにした。
- 3) 9地震で観測された加速度記録の応答スペクトルにそれぞれKL展開を適用して，固有ベクトルを比較

たところ、概ね互いに類似しているものの、2001 年
芸予地震と 2016 年熊本地震でやや異なる傾向が
見られた。また、高次モードになるほど地震間の類
似性が低くなることを明らかにした。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 JP 17H02068 の助成を受けた
ものである。本研究では(国研)防災科学技術研究所 K-
NET の強震記録を使用させていただいた。記して謝意
を表する次第である。

参考文献

- 1) 能島暢呂, 久世益充, 高島拓也：地震動の経時特性
の特徴抽出と階層的クラスター分析による分類, 日
本地震工学会論文集 第 17 巻, 第 2 号, pp.2_128-
2_141, 2017.
- 2) 奥野忠一, 久米均, 芳賀敏郎, 吉澤正：多変量解析
法《改訂版》, 日科技連出版社, 1981, 30p.
- 3) 石井健一郎, 前田英作, 上田修功, 村瀬洋：わかり
やすいパターン認識, オーム社, 1998, 204p.
- 4) 能島暢呂, 久世益充：KL 展開による地震動の経時
特性のモード分解と合成, 日本地震工学会論文集 第
17 巻, 第 4 号, 2017. (印刷中)
- 5) 石井清：応答スペクトルの形状に関する一考察, 地
震 第 2 輯, Vol.28, No.3, 1975, pp.367-370.
- 6) 田中浩平, 王敏, 高田毅士：加速度応答スペクトル
の周期間の共分散構造の解明とその応用, 日本建築
学会構造系論文集, Vol.73, No.632, pp.1727-1733,
2008.
- 7) (国研)防災科学技術研究所：強震観測網(K-NET,
KiK-net) <http://www.kyoshin.bosai.go.jp/kyoshin/>

(2017.?.? 受付)

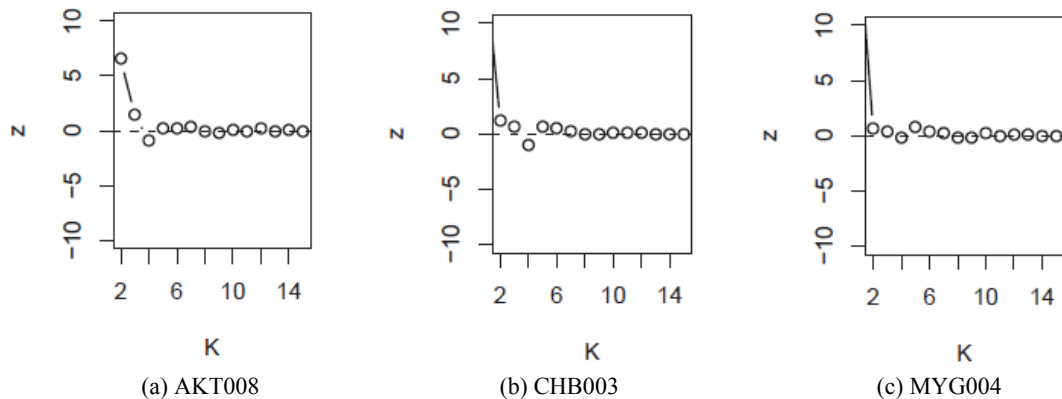


図-13 2～15 次モードの主成分得点 (減衰定数を 5%から 20%に変更)

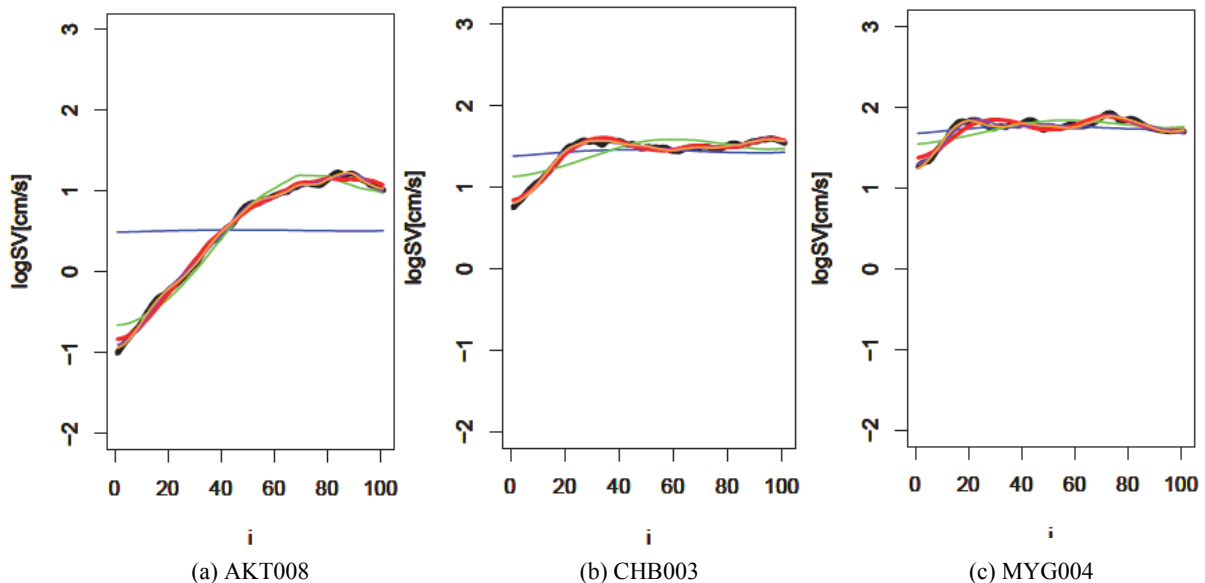


図-14 モード合成による特徴ベクトルの復元 (減衰定数を 20%に変更)

(黒線：101 次元特徴ベクトル, 青・緑・赤・紫・橙線：それぞれ 1, 3, 6, 9, 12 次まで合成)
(横軸は式(1)の i に相当する固有周期)

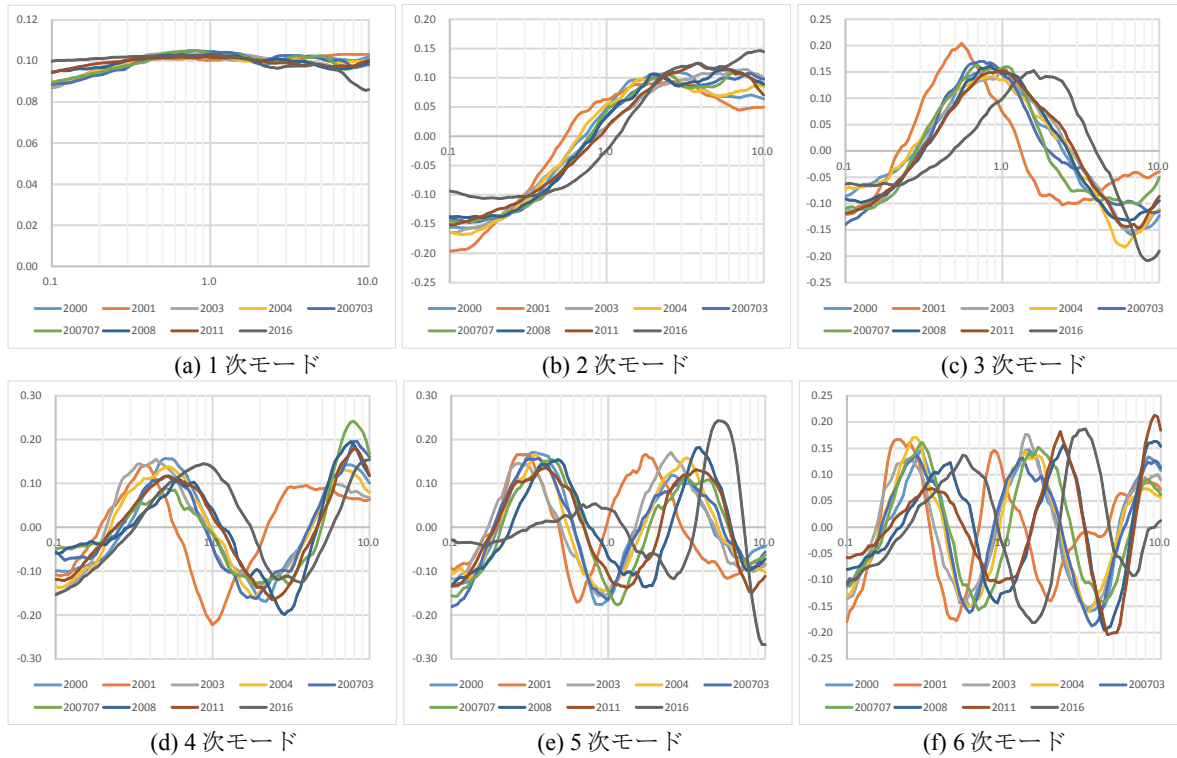


図-15 9地震による1～6次モードの固有ベクトルの比較

MODAL DECOMPOSITION AND SYNTHESIS OF RESPONSE SPECTRA USING KARHUNEN-LOÉVE EXPANSION

Nobuoto NOJIMA and Masumitsu KUSE

A method for mode decomposition and synthesis of velocity response spectra has been proposed using Karhunen-Loève (KL) expansion. Eigenvalues and eigenvectors are solved for correlation matrix of the 101-dimensional feature vectors representing velocity response spectra calculated using a number of accelerograms. Next, the feature vectors are transformed to principal components using the orthogonal matrix composed of the eigenvectors. Several principal components are adopted to recompute the original response spectra without much loss of information. Illustrative examples for acceleration records observed in the 2011 Off the Pacific Coast of Tohoku Earthquake, Japan are shown. Six to twelve dimensional representation can be achieved by using the orthonormal basis extracted by the KL expansion. Principal components of lower order are required to describe the response spectra with high damping ratio. Eigen vectors derived from KL expansion of nine major earthquakes in Japan are compared, which demonstrates both similarity and dissimilarity.