確率弾塑性モデルを用いた履歴特性に対する地盤物性の不確実性の影響評価

羽場 一基[1]・堀田 渉[2]・園部 秀明[2]・畑 明仁[3]・渡辺 和明[2]・堀 宗朗[4]

[1]正会員 博 (理) 大成建設株式会社 原子力本部（〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1）
E-mail: hb-kzm00@pub.taisei.co.jp
[2]正会員 大成建設株式会社 原子力本部（〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1）
[3]正会員 博 (工) 大成建設株式会社 技術センター（〒 245-0051 神奈川県横浜市戸塚区名瀬町 344-1）
[4]正会員 Ph.D. 東京大学 地震研究所（〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）

本論文では，確率弾塑性モデルである確率リターンマッピングアルゴリズムを粘土の応力歪関係の評価に適用し，地盤物性の不確実性が履歴特性に与える影響を評価した．地盤物性の不確実性の影響を評価することを目的とするため，降伏モデルは弾完全塑性 von Mises モデルを用い，不確実性を考慮する地盤物性は，標準貫入試験の結果から得られるせん断弾性係数 G_0 と非排水せん断強度 S_u を用いた．その結果，単純な弾完全塑性モデルを用いた場合でも，確率空間への拡張により，現実に近い動的変形特性とそれらの不確実性を評価することができた．

Key Words: *stochastic modeling, soil uncertainty, elasto-plasticity, hysteresis loop, return mapping algorithm*

1. はじめに

国内外の設計基準に対する性能設計法および信頼性設計法の導入や，国内の原子力発電所を対象とした確率論的リスク評価の義務付け等，設計条件の不確実性を確率論的にモデル化して構造物の安全性やリスクを合理的に評価する取り組みが様々な分野で進んでいる．特に，土木構造物の確率論的耐震安全性評価においては，地盤物性の不確実性の取り扱いは重要な課題となっている．

確率論的な評価に用いられる手法としては，材料物性等の不確実パラメータを確率的な乱数として与え，多数回の計算を行うことにより解のばらつきを評価するモンテカルロシミュレーション（以下，MCS）が一般的である．極めて汎用的で解析手法に因らず適用できるが計算負荷が高いという課題がある．その代替手法の候補として，R.G. Ghanem and P.D. Spanos により提案されたスペクトル確率有限要素法（以下，SSFEM）[1)]が挙げられる．SSFEM では，不確実性を考慮する確率変数にスペクトル展開を適用することで，一回の計算で応答値の確率過程を評価することが可能となるため，計算負荷の軽減が期待できる．しかし，確率的な降伏過程の評価が難しいため，SSFEM を非線形問題へ適用した例は少ない．

非線形 SSFEM の例の一つとして，M. Anders and M. Hori による非線形 SSFEM[2),3)] が挙げられる．この非線形 SSFEM はヤング率の不確実性に対して bounding medium 理論[4)] を適用し，確率モデルの挙動の上限と下限を効率的に評価する手法であるが，材料の降伏過程は決定論的な取り扱いがなされている．また，B. Jeremic らは増分形の応力歪関係を時間発展と捉え，応力変化の確率過程を応力確率空間の Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式（以下，FPK 方程式）として評価する方法[5)～10)]を提案し，非線形 SSFEM に適用した[11)]．この方法では，ヤング率の他，材料強度等の不確実性も考慮することができ，確率分布の全体を計算可能であるが，計算ステップ毎に全積分点上で FPK 方程式を評価する必要があるため，計算コストが非常に大きいという課題がある．また，各材料物性の不確実性の応答値への影響を分離することが難しいという課題もある．最近，筆者らは降伏過程の応力更新手法であるリターンマッピングアルゴリズムに 1 次のスペクトル展開を適用したスペクトル確率リターンマッピングアルゴリズム（以下，SSRMA）を提案した[12)]．SSRMA では，降伏過程に伴う応答値の期待値と分散を効率よく評価することができ，さらに，各材料物性の不確実性が応答値に与える影響を定量的に評価することが可能である．

FPK 方程式や SSRMA 等の確率弾塑性モデルにおいては，降伏応力等のばらつきにより，単純な降伏モデルを用いた場合でも，応力歪関係の期待値は非常に低い歪レベルから非線形性が現れることが示されている[5)～12)]．これは言い換えれば，弾塑性モデルを確率空

間に拡張することにより，簡単な構成則から現実的な地盤特性を得られる可能性があるともいえる．K. Settらは FPK 方程式による確率弾塑性モデルを粘土の履歴特性の評価に適用し，確率空間に拡張した弾完全塑性モデルにより，現実的な剛性や減衰を評価できることを示している[13]．しかし，FPK 方程式による確率弾塑性モデルを用いているため，各地盤物性の不確実性が履歴特性に与える影響は評価できていない．そこで，本論文では，SSRMA を用いて非排水粘土に対する剛性 $G/G_0-\gamma$ 関係及び減衰 $h-\gamma$ 関係を評価し，各地盤物性の不確実性が履歴特性に与える影響を整理する．

本論文の構成は以下の通りである．2 章で，スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの概要を示す．次に，3 章で，履歴特性の評価に用いるせん断弾性係数 G_0 と非排水せん断強度 S_u を既存の標準貫入試験の結果を用いて整理する．その後，剛性 $G/G_0-\gamma$ 関係及び減衰 $h-\gamma$ 関係を評価し，試験データとの比較を行った上で，各材料物性の不確実性の影響を整理する．

2. スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの概要

ここでは，降伏過程における応力更新手法であるリターンマッピングアルゴリズムを整理した上で，筆者らにより提案されたスペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズム[12] の概要を示す．

(1) リターンマッピングアルゴリズムの整理

塑性流れ理論では，材料が降伏する基準として，相当応力 σ_{eq} と降伏応力 σ_{Y} を用いた降伏関数

$$f(\boldsymbol{\sigma},\lambda)=\sigma_{\mathrm{eq}}-\sigma_{\mathrm{Y}} \tag{1}$$

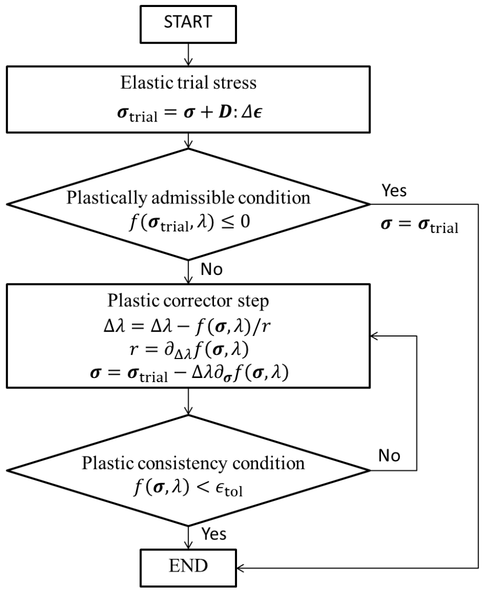
を定義し，以下の制約条件により降伏過程における応力を更新する．

$$d\lambda\geq 0,\quad f\leq 0,\quad d\lambda f=0 \tag{2}$$

ここで，λ は塑性乗数である．これらの時間積分を解く手法の一つが，陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムである[14]．**図–1** に陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムの評価フローを示す．陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムでは，各時間ステップで歪増分 $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ が与えられた時，弾性であると仮定して弾性予測応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}$ を評価する．

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{D}:\Delta\boldsymbol{\epsilon} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$ は剛性テンソルである．弾塑性体の場合は，この弾性予測応力が正しい解であるとは限らない．そのため，弾性予測応力による降伏関数 $f_{\mathrm{trial}}=f(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}},\lambda)$



図–1 陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムの評価フロー

が塑性論的許容条件

$$f_{\mathrm{trial}}\leq 0 \tag{4}$$

を満たす場合は弾性予測応力を真の解とし，満たさない場合は降伏したとして，塑性整合条件

$$f(\boldsymbol{\sigma},\lambda)=0 \tag{5}$$

を満たすように，陰的に塑性乗数 $\Delta\lambda$ を求め，流れ則に基づき応力を更新する．

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}-\Delta\lambda\partial_{\boldsymbol{\sigma}}f \tag{6}$$

ここで，$\partial_{\boldsymbol{\sigma}}$ による $\boldsymbol{\sigma}$ の偏微分を表しており，関連流れ則を適用した．

次に，物性場が確率分布を持つ場合を考えると，応答場である歪や応力が確率分布を持つため，降伏関数も確率分布を持つ．そのため，式 (3)〜式 (6) は，確率空間上の一つの標本点 w における関係式として与えられる．

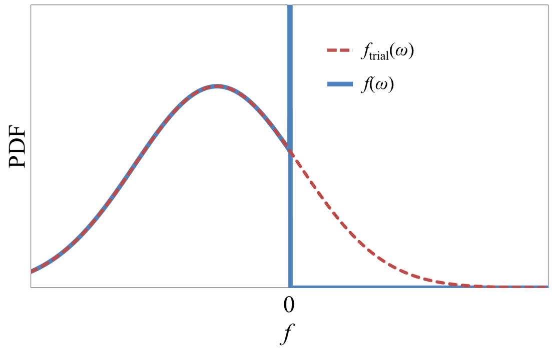
$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}(\omega)=\boldsymbol{\sigma}(\omega)+\boldsymbol{D}(\omega):\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\omega) \tag{7}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}(\omega),\lambda(\omega),w)\leq 0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}(\omega)-\Delta\lambda(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}f(\omega) \tag{9}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}(\omega),\lambda(\omega),w)=0 \tag{10}$$

MCS を用いる場合，標本点を多数サンプリングすることで，確率変数の確率分布が得られる．例えば，弾性予測応力による相当応力 $\sigma_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}(\omega))$ や降伏応力 $\sigma_{\mathrm{Y}}(\omega)$ が正規分布である場合，弾性予測応力による降伏関数 $f_{\mathrm{trial}}(\omega)$ も**図–2** の赤点線のように正規分布を持つ．この時，$f_{\mathrm{trial}}(\omega)$ の確率分布の一部は $f_{\mathrm{trial}}(\omega)\leq 0$ となり，残りは $f_{\mathrm{trial}}(\omega)>0$ となる．そのため，リターンマッピング後の降伏関数 $f(\omega)$ は，$f_{\mathrm{trial}}(\omega)\leq 0$ の領域



図–2 降伏関数の確率分布の変化 ($f_{\mathrm{trial}}(\omega)$ 及び $f(\omega)$)

は弾性でありその確率分布を保持するが，$f_{\mathrm{trial}}(\omega) > 0$ の領域では $f(\omega) = 0$ となるように応力が更新される．その結果，降伏後の降伏関数の分布は，**図–2** の青線のように，$f(\omega) = 0$ でデルタ関数形状を持つ分布

$$\mathrm{PDF}[f(\omega)] = \begin{cases} \mathrm{PDF}[f_{\mathrm{trial}}(\omega)]|_{f_{\mathrm{trial}}=f} & (f(\omega) < 0) \\ C[0, f_{\mathrm{trial}}] & (f(\omega) = 0) \\ 0 & (f(\omega) > 0) \end{cases} \tag{11}$$

となる．$\mathrm{PDF}[f_{\mathrm{trial}}(\omega)]$ は $f_{\mathrm{trial}}(\omega)$ の確率密度関数，$C[x, f_{\mathrm{trial}}]$ は累積分布関数であり，正規分布を仮定する場合以下で与えられる．

$$\mathrm{PDF}[f_{\mathrm{trial}}(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{VAR}[f_{\mathrm{trial}}]}} \times \exp\left(- \frac{(f_{\mathrm{trial}}(\omega) - \langle f_{\mathrm{trial}} \rangle)^2}{2\pi \mathrm{VAR}[f_{\mathrm{trial}}]} \right) \tag{12}$$

$$C[x, f_{\mathrm{trial}}] = \int_x^{\infty} f_{\mathrm{trial}} \mathrm{PDF}[f_{\mathrm{trial}}] df_{\mathrm{trial}} \tag{13}$$

ここで，$\langle f_{\mathrm{trial}} \rangle$ 及び $\mathrm{VAR}[f_{\mathrm{trial}}]$ は $f_{\mathrm{trial}}(\omega)$ の期待値及び分散である．

(2) スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズム

a) スペクトル展開の整理

確率過程においては全ての応答場が確率分布を持つ．MCS では多数のサンプリングによりその確率分布を評価するが，スペクトル展開では確率分布を確率空間上のスペクトル成分の級数和として表現する．SSFEM では，Karhunen-Loeve 展開[15),16)]（以下，KL 展開）と Polynomial Chaos 展開[17),18)]（以下，PC 展開）の二つのスペクトル展開を用いる．ここで，KL 展開は材料物性場の空間的相関を表現するための展開であり，PC 展開は応答場の複雑な確率分布を表現するための展開である．詳細は付録 I 及び付録 II に記載することとし，以下では最低次を例にとりスペクトル展開を説明する．

ヤング率 E と降伏応力 σ_{Y} が正規分布に従う独立な確率変数である場合を考える．この時，$E(\omega)$ 及び $\sigma_{\mathrm{Y}}(\omega)$ は期待値と確率成分に分けることができ，1 次の KL 展開を適用すれば，以下のようにスペクトル展開できる．

$$E(\omega) = \langle E \rangle + \sqrt{\mathrm{VAR}[E]}\xi_1(\omega) \tag{14}$$

$$\sigma_{\mathrm{Y}}(\omega) = \langle \sigma_{\mathrm{Y}} \rangle + \sqrt{\mathrm{VAR}[\sigma_{\mathrm{Y}}]}\xi_2(\omega) \tag{15}$$

ここで，$\langle X \rangle$ 及び $\mathrm{VAR}[X]$ は確率変数 $X(\omega)$ の期待値及び分散を表す．また，$\xi_1(\omega)$ 及び $\xi_2(\omega)$ は期待値 0 で分散 1 の独立な正規確率変数であり，確率空間上の固有関数である．0 次のスペクトル展開（第一項）は確率変数の期待値であり決定論的な取り扱いとなるが，1 次以上のスペクトル展開（第二項）を考慮することで確率変数として取り扱うことができる．物性場の空間的相関を考える場合には，付録 I に示すように，より高次の KL 展開が必要になる．

一方，変位 $u(\omega)$ 等の応答場は物性場をパラメータとした行列方程式の解として与えられるため，$E(\omega)$ 及び $\sigma_{\mathrm{Y}}(\omega)$ 両方の不確実性の影響を受ける．変位 $u(\omega)$ 等に対して 1 次の PC 展開を適用すると，以下のようにスペクトル展開される．

$$u(\omega) = u^{(0)} + u^{(1)}\xi_1(\omega) + u^{(2)}\xi_2(\omega) \tag{16}$$

式（16）からわかるように，スペクトル展開した応答場は各物性場の確率空間上の固有関数 $\xi_i(\omega)$ の重ね合わせとして表現されるため，各物性場の不確実性の影響が分離される．また，$\xi_i(\omega)$ は正規確率変数であるため，変位 $u(\omega)$ も正規分布に従い，$u(\omega)$ の期待値 $\langle u \rangle$ と分散 $\mathrm{VAR}[u]$ は以下で与えられる．

$$\langle u \rangle = u^{(0)}, \quad \mathrm{VAR}[u] = \left(u^{(1)}\right)^2 + \left(u^{(2)}\right)^2 \tag{17}$$

応答場の確率分布に対してより複雑な分布を表現するためには，付録 II に示すように，より高次の PC 展開を適用する必要がある．

式 (14) 及び式 (15) 並びに式（16）のように確率変数に対してスペクトル展開を適用する場合，確率空間の依存は確率空間上の固有関数 $\xi_i(\omega)$ のみが持つ．確率空間上の固有関数 $\xi_i(\omega)$ は以下の直交性を持つため，行列方程式は各スペクトル展開係数に対する方程式に拡張される．

$$\langle \xi_i(\omega)\xi_j(\omega) \rangle = \delta_{ij} \tag{18}$$

b) スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズムの整理

応答場に PC 展開を適用する場合，応力 $\boldsymbol{\sigma}(\omega)$ や降伏関数 $f(\omega)$ も PC 展開される．PC 展開次数を 0 次とした場合は，応力や降伏関数の期待値のみを考慮し，降伏過程を決定論的に取り扱うことに対応する．降伏過程において種々の材料物性の不確実性を考慮するためには，より高次の PC 展開を考慮する必要がある．本手法では，最小限の拡張として，降伏過程に関係する応力，塑性乗数及び降伏関数等に 1 次の PC 展開を適

用する．すると，応力 $\boldsymbol{\sigma}(\omega)$，塑性乗数 $\lambda(\omega)$ 及び降伏関数 $f(\omega)$ は以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega)=\sum_{i=0}^{M}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\xi_i(\omega) \tag{19}$$

$$\lambda(\omega)=\sum_{i=0}^{M}\lambda^{(i)}\xi_i(\omega) \tag{20}$$

$$f(\omega)=\sum_{i=0}^{M}f^{(i)}\xi_i(\omega) \tag{21}$$

ここで，M は各物性値の KL 展開次数の和であり，E と σ_{Y} の KL 展開次数をそれぞれ 1 次とする場合には $M=2$ となる．また，$\xi_0=1$ をダミー変数として定義した．物性場が正規分布に従う場合，1 次の PC 展開を適用することは応答場を正規分布で仮定することに等しい．この時，例えば $f(\omega)$ の期待値 $\langle f\rangle$ と分散 $\mathrm{VAR}[f]$ は以下で与えられる．

$$\langle f\rangle=f^{(0)},\qquad \mathrm{VAR}[f]=\sum_{i=1}^{M}\left(f^{(i)}\right)^2 \tag{22}$$

リターンマッピングアルゴリズムは各積分点で実行されるため，空間依存性は陽には現れない．それは SSRMA でも同様である．しかし，物性場に KL 展開を適用する場合，物性場の空間的相関の情報を保持するためには，PC 展開の各項を残したまま計算しなければならないことに注意する必要がある．ここで，式 (19)～式 (21) は任意の KL 展開次数に対して成立するため，SSRMA は物性場に高次の KL 展開を適用する場合でも一般性を失わない．

確率変数をスペクトル展開する場合，リターンマッピングアルゴリズムにおける式 (7) 及び式 (9) 等の関係式は，各スペクトル展開係数に対する関係式として与えられる．式 (18) の $\xi_i(\omega)$ の直交性より，式 (7) 及び式 (9) に ξ_i を乗じ期待値を取れば，弾性予測応力の PC 展開係数に対する関係式は以下で求められ，

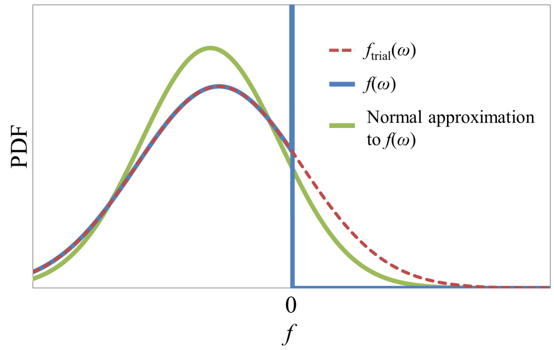
$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathrm{trial}}=\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+\langle\xi_i(\omega)\boldsymbol{D}(\omega):\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\omega)\rangle \tag{23}$$

更新する応力の PC 展開係数の関係式は以下で与えられる．

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\boldsymbol{\sigma}^{(i)}_{\mathrm{trial}}-\langle\xi_i(\omega)\Delta\lambda(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}f(\omega)\rangle \tag{24}$$

次に SSRMA における塑性論的許容条件及び塑性整合条件を考える．塑性論的許容条件及び塑性整合条件には降伏関数の確率分布が重要となる．正規分布を仮定する確率降伏過程では，**図–2** からわかる通り，常に確率分布の一部が降伏するため，塑性論的許容条件は常に満たさない．その結果，非常に低い歪レベルから塑性化が始まることになる．

一方，リターンマッピング後の確率的な降伏関数は**図–2** の青線のような分布を持つため，塑性整合条件は適切に設定する必要がある．1 次の PC 展開を用いる SSRMA では降伏関数も正規分布に従う．そのため，SSRMA では，**図–3** の緑線のような，リターンマッピング後の降伏関数 $f(\omega)$ を正規分布で仮定した確率分布になるように応力を更新する必要がある．この確率空間に拡張された塑性整合条件が決定論的なリターンマッピングと SSRMA で大きく異なる点である．ここで，リターンマッピング後の降伏関数の期待値 $\langle f\rangle$ と分散 $\mathrm{VAR}[f]$ は，式 (11) より以下で求められる．



図–3 降伏関数の確率分布の変化 ($f_{\mathrm{trial}}(\omega)$，$f(\omega)$ 及び正規分布で仮定した $f(\omega)$)

$$\langle f\rangle=\int_{-\infty}^{0}\bar{f}_{\mathrm{trial}}\mathrm{PDF}[\bar{f}_{\mathrm{trial}}]d\bar{f}_{\mathrm{trial}} \tag{25}$$

$$\mathrm{VAR}[f]=\int_{-\infty}^{0}\bar{f}^2_{\mathrm{trial}}\mathrm{PDF}[\bar{f}_{\mathrm{trial}}]d\bar{f}_{\mathrm{trial}}-\langle f\rangle^2 \tag{26}$$

$\bar{f}_{\mathrm{trial}}(\omega)$ は以下の応力状態 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{trial}}$ により求めた降伏関数である．式 (11)，式 (25) 及び式 (26) より，$\langle f\rangle$ 及び $\mathrm{VAR}[f]$ の評価には弾性領域の確率分布が重要になることから，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{trial}}$ は単調載荷または単調除荷時には弾性として更新した応力

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{trial}}(\omega)=\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{trial}}(\omega)+\boldsymbol{D}(\omega):\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\omega) \tag{27}$$

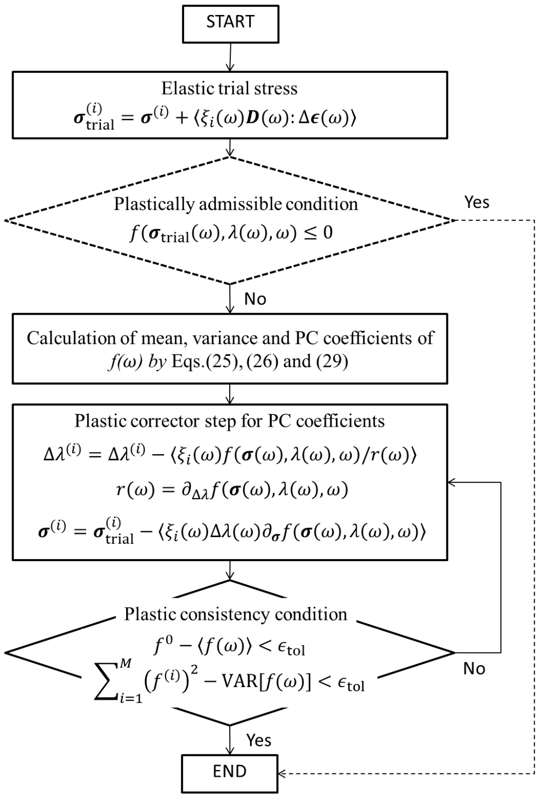
を用い，載荷から除荷または除荷から載荷へ移り変わる場合は弾性域として考慮する領域が反転するため，弾性予測応力 σ_{trial} を用いる．

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{trial}}(\omega)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{trial}}(\omega) \tag{28}$$

さらに，$\xi_i(\omega)$ が独立な確率変数であり，$f^{(i)}$ と $f^{(i)}_{\mathrm{trial}}$ の関係は任意の値に対して定義されることを考慮すれば，式 (22) より降伏関数の PC 展開係数は $f(\omega)$ の期待値と分散により以下で与えられる[12]．

$$f^{(i)}=\begin{cases}\langle f\rangle & (i=0)\\ \sqrt{\dfrac{\mathrm{VAR}[f]}{\mathrm{VAR}[f_{\mathrm{trial}}]}}f^{(i)}_{\mathrm{trial}} & (i\neq 0)\end{cases} \tag{29}$$

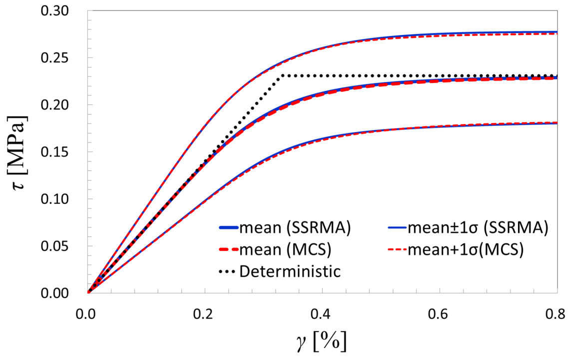
図–4 に SSRMA の評価フローを示す．ここで，確率的な降伏過程においては確率分布の一部が常に降伏することから，塑性論的許容条件は点線で示している．**図–4** からわかる通り，SSRMA の評価フローは，式 (23) 及び式 (24) のように各 PC 展開係数に対する計算が必要であるが，**図–1** の陰的弾性予測子/リターンマッピ



図–4　SSRMA の評価フロー

ングアルゴリズムの評価フローと基本的な流れは同じである．唯一異なるのは，塑性論的整合条件において，$f = 0$ ではなく，期待値 $\langle f \rangle$，分散 VAR$[f]$ の正規分布となるように応力を更新する点である．SSRMA はリターンマッピングアルゴリズムを確率空間へ最小限拡張したものであり，SSRMA の PC 展開係数を 0 次までとすれば SSRMA は完全に決定論的なリターンマッピングアルゴリズムに一致する．

図–5 に SSRMA 及び MCS によって評価した応力歪関係の期待値及び期待値 ± 標準偏差の結果を示す．ここで，降伏モデルは 1 次元弾完全塑性モデルとし，せん断弾性係数の期待値及び変動係数を 70MPa 及び 30%，降伏応力の期待値及び変動係数を 0.4MPa 及び 20% とした．また，**図–5** には，参考のため, せん断弾性係数及び降伏応力の期待値を用いて評価した決定論的な結果も示している．これらの結果から，SSFEM と MCS の結果はよく一致しており，決定論的な結果と比べて，低い歪レベルから非線形性が現れていることがわかる．このように，SSRMA では，降伏過程に関係する応答値を正規分布で近似したモデルであるが，期待値と分散を効率よく評価することが可能である．



図–5　SSRMA による応力歪関係の評価結果 ($E = 70$MPa(変動係数 30%)，$\sigma_{\mathrm{Y}} = 0.4$MPa(変動係数 20%))

3.　履歴特性の評価

ここでは，既存の標準貫入試験の結果よりせん断弾性係数 G_0 及びせん断強度 S_u を整理し，SSRMA により非排水粘土の履歴特性を評価する．

(1)　地盤物性値の不確実性の評価

観測値は不確実性を伴うことが通常であり，この不確実性は決定論的な解析では工学的判断により決定論的に評価することが多いが，ここでは，確率変数により確率的に評価する．本論文では，日本の沖積粘土の標準貫入試験により得られた N 値と非排水せん断強度及びヤング率の関係を用いて地盤物性値の入力値を整理する．ここで，整理の方法は Sett らの方法[13] を倣うこととする．

標準貫入試験による沖積粘土の N 値と非排水せん断強度 S_u 及びヤング率 E の関係はそれぞれ Hara ら[19] 及び Ohya ら[20] により取得され，以下のように整理されている．

$$S_u = 0.29 p_a N^{0.72} \tag{30}$$

$$E = 19.3 p_a N^{0.63} \tag{31}$$

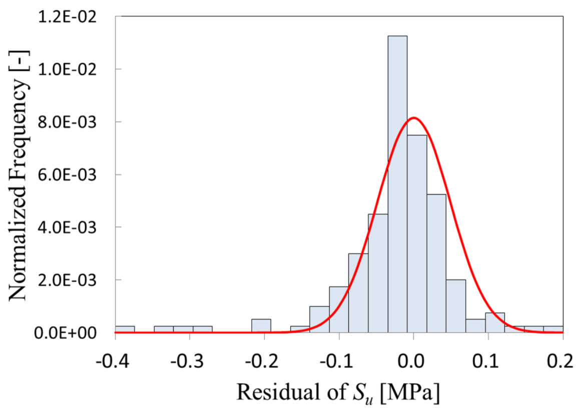
ここで p_a は大気圧 $p_a = 101.325$kPa である．さらに Phoon らは，材料物性の不確実性を考慮するため，以下の確率論的な形式を提案している[21]．

$$S_u = 0.29 p_a N^{0.72} + \chi \tag{32}$$

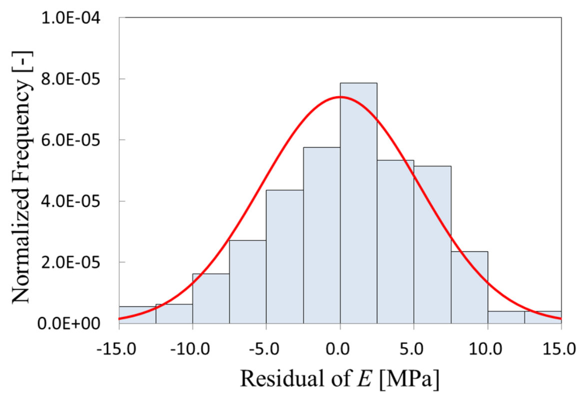
$$E = 19.3 p_a N^{0.63} + \chi \tag{33}$$

ここで，χ は期待値 0 の確率変数である．

図–6 に非排水せん断強度 S_u の期待値からの残差の分布を示す．ここで，確率分布は全体が 1 となるように規格化している．また，**図–6** には 2σ のデータでフィッティングした正規分布の結果も示している．この時，せん弾強度 S_u の標準偏差は 43.7kPa で与えられる．従って，期待値 0 で分散 1 の正規確率変数 $\xi_2(\omega)$ を用いれ



図–6　非排水せん断強度の期待値からの残差の確率分布



図–7　ヤング率の期待値からの残差の確率分布

ば，S_u は以下のように与えられる．

$$S_u = 0.29 p_a N^{0.72} + 43.7 \xi_2(\omega) \tag{34}$$

同様に，**図–7** にヤング率の期待値からの残差の分布及び正規分布を用いたフィッティング結果を示す．この時，ヤング率の標準偏差は 5388.3Pa で与えられる． 標準貫入試験で得られる物性値は高歪下での物性値であるため，ヤング率と N 値の関係式も高歪レベルにおける関係式である．SSRMA の入力値としては弾性領域での値が必要であるため，低歪レベルの値を得るために補正が必要である．弾性波速度等から低歪レベルで直接測定する方法や地質から推定する方法もあるが，本研究では高歪レベルでのヤング率に補正係数を乗じることで低歪レベルのヤング率を評価する．

$$E = a_{\mathrm{EV}} 19.3 p_a N^{0.63} + a_{\mathrm{STD}} \chi \tag{35}$$

ここで，a_{EV} 及び a_{STD} は高歪レベルから低歪レベルに変換するため補正係数である．a_{EV} 及び a_{STD} は，それぞれ Idriss[22] 及び Stokoe II ら[23] によって実験的に評価されており，$a_{\mathrm{EV}} = 17.25$ 及び $a_{\mathrm{STD}} = 10.7$ で与えられる．ここで，a_{STD} が a_{EV} より小さい理由は地質が塑性化するに従って地質の構造が変化し不確実性が増大するためである．ポワソン比 ν を確定値 0.5 と仮定すると，入力値として用いる N 値とせん断弾性係数 $G_0 = E/2(1+\nu)$ の関係式は以下で与えられる．

$$G_0 = 110.9 p_a N^{0.63} + 1799.7 \xi_1(\omega) \tag{36}$$

ここで，$\xi_1(\omega)$ は期待値 0，分散 1 の正規確率変数である．

さらに，不確実性は地質そのもののばらつきに加え，実験時の誤差，つまり機材，手順，観測者による不確かさも大きく影響してくることが知られている．Phoon らはこれらの変動係数は $15-45\%$ であると整理している[24]．Sett ら[13] は，せん断強度の試験には載荷方向，歪速度，境界条件等の多くの不確定要素がある[25] ことから，せん断強度の実験での不確かさを 45% とし，せん断弾性係数のそれを 15% としている．本論文でも，実験での不確かさについては Sett ら[13] と同様の値を用いることとする．

表–1　解析物性値

Parameter	Mean [MPa]	Coefficient of variation [-]
Elastic shear modulus G	95.8	0.351
Yield stress σ_{Y}	0.589	0.594

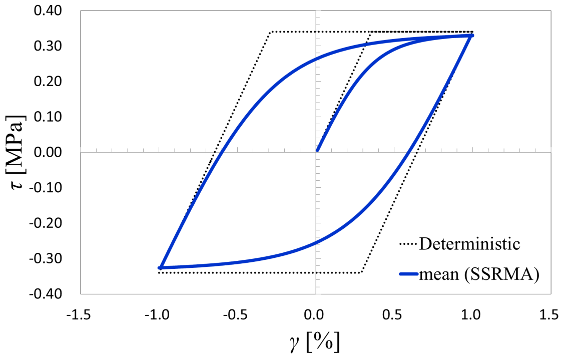
(2)　応力歪関係の評価

繰り返しせん断試験を想定し，SSRMA を用いてせん断歪を変化させた場合の応力歪関係を計算する．材料物性値の不確実性が履歴特性に与える影響を評価することを目的とすることから，降伏モデルは弾完全塑性 von Mises モデルを用いる．理想的なせん断試験を想定すると，弾完全塑性 von Mises モデルの降伏関数はせん断応力 τ と降伏応力 σ_{Y} により，

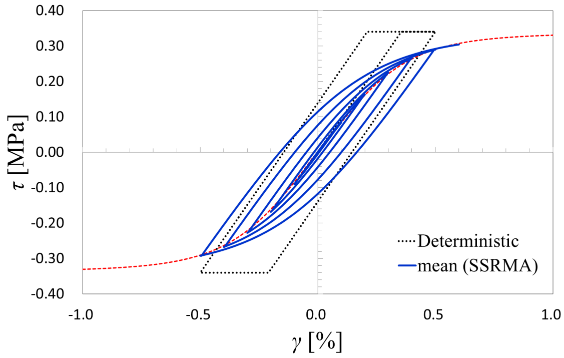
$$f = \sqrt{3}|\tau| - \sigma_{\mathrm{Y}} \tag{37}$$

で与えられる．ここで，降伏応力 σ_{Y} はせん断強度 S_u と $\sigma_{\mathrm{Y}} = \sqrt{3} S_u$ の関係にある．**表–1** に計算に用いる物性値及びその変動係数を示す．これらの物性値は，標準貫入試験の N 値 $N = 30$ に対する値である．

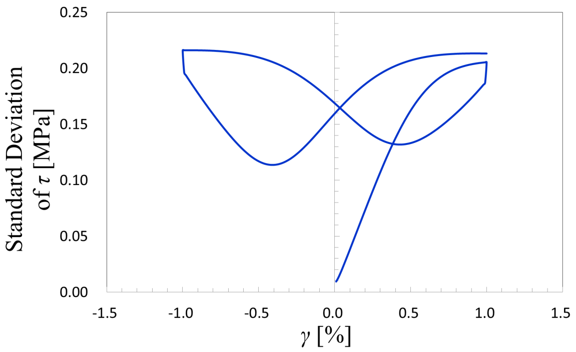
図–8 及び**図–9** にせん断歪を $\gamma = \pm 1.0\%$ の間隔で変化させた場合の応力歪関係の期待値及び標準偏差を示す．ここで，比較として，せん断弾性係数とせん断強度の確定値を用いて評価した決定論的な結果も記載する．決定論的な結果は，弾性域ではせん断弾性係数の期待値に比例し，降伏後はせん断強度の期待値となる双線形の応力歪依存性を示している．**図–8** の SSRMA の結果は，せん断弾性係数及びせん断強度の二つのパラメータの不確実性を考慮した弾完全塑性モデルを用いているにかかわらず，低い歪レベルから非線形特性が現れ



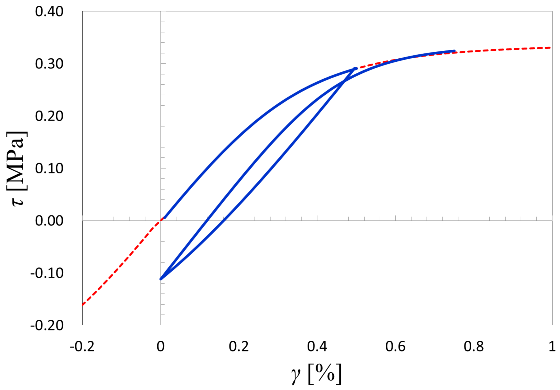
図–8　載荷除荷サイクルにおける応力歪関係の評価結果 ($\gamma = \pm 1\%$)



図–10　履歴曲線の評価結果 ($\gamma = \pm 1\%$)



図–9　載荷除荷サイクルにおけるせん断応力の標準偏差の歪依存性 ($\gamma = \pm 1\%$)



図–11　履歴曲線の評価結果 (非対称載荷除荷サイクル)

ている．また，**図–9** より，標準偏差も履歴を描きながら変化していることがわかる．これらの非線形特性は，せん断強度とせん断弾性係数の不確実性の影響である．不確実性を考慮すると，決定論的な降伏点に達する前に一部の応力状態が降伏しはじめ，また，決定論的な降伏点後も一部は弾性のまま残っているため，低い歪レベルから高い歪レベルまで段階的に非線形特性が現れる．**図–8** の結果は，FPK 方程式を用いた場合[13] と同様の結果である．これらの応力歪関係は実際の物質にも表れると考えられる．一つの試験体の中には様々な材料強度を持つ粒子を含んでいる．試験体の応力歪関係を試験する場合，試験体の中の粒子の一部は弾性状態であり，一部は完全に塑性化し，その平均的な結果が試験体の結果として現れるのである．

また，**図–10** にせん断歪を $\gamma = \pm 0.5\%$ まで段階的に変化させた場合の履歴曲線を示す．さらに，**図–11** にせん断歪を非対称に変化させた場合の履歴曲線を示す．これらの結果からわかるように，単純な弾完全塑性モデルであっても，確率空間への拡張を行うことで，骨格曲線（赤点線）に沿った Masing 則のような履歴曲線が自動的に得られていることは注目すべき点である．

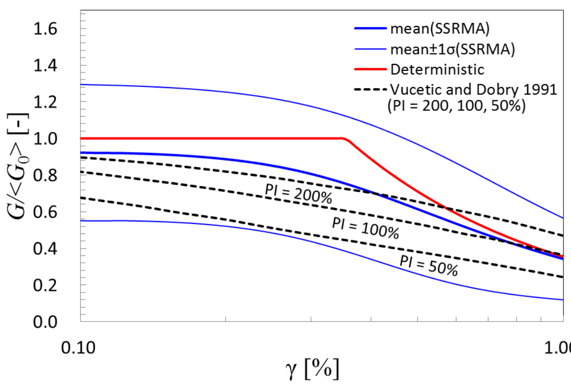
(3)　$G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係の評価

上記の応力歪関係より，割線剛性 $G/G_0 - \gamma$ 関係及び減衰 $h - \gamma$ 関係を評価することができる．

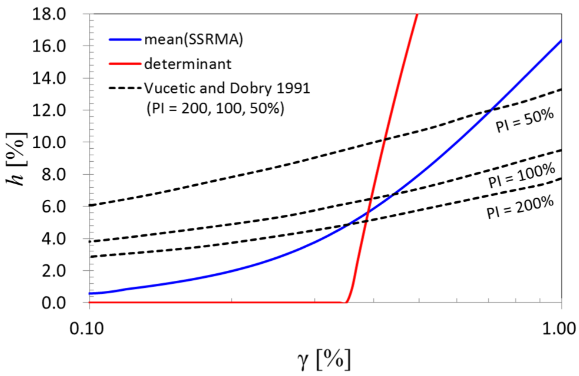
図–12 に剛性 $G/G_0 - \gamma$ 関係の評価結果を示す．ここで，期待値及び期待値 ± 標準偏差は，せん断弾性係数の期待値 $\langle G_0 \rangle$ で除したもので，それぞれ $\langle G \rangle / \langle G_0 \rangle$ 及び $(\langle G \rangle \pm \mathrm{STD}[G]) / \langle G_0 \rangle$ であることに注意する．また，参考のため，決定論的な結果（赤線）と Vucetic and Dobry により報告された高塑性粘土の実験値[26]（黒点線）を示している，決定論的な結果は，せん断歪 $\gamma = \langle \sigma_Y \rangle / \sqrt{3} \langle G_0 \rangle = 0.355\%$ まで 1 であり，降伏点後は急激に低下していく．一方で，確率弾塑性モデルの期待値は低い歪レベルから緩やかに減少しており，より実験値と近い剛性を示していることがわかる．

次に，**図–13** に減衰 h–γ 関係の評価結果を示す．比較のため，決定論的な結果（赤線）及び Vucetic and Dobry により報告されている高塑性粘土の実験値[26]（黒点線）を載せている．決定論的な結果は，せん断歪 $\gamma = 0.355\%$ までは 0 であり，降伏点後は急激に増加していく．一方で，確率モデルの期待値は，低い歪レベルから減衰は増加し，より実験値に近い減衰を示していることわかる．

このように，単純な弾完全塑性モデルを用いた場合でも，確率空間に拡張することで，決定論と比べ現実



図–12 剛性 $G/G_0-\gamma$ 関係



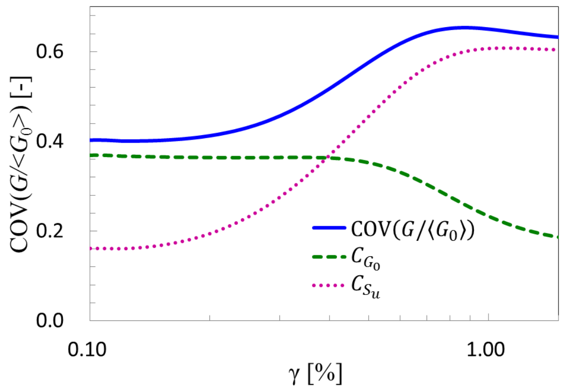
図–13 減衰 $h-\gamma$ 関係

的な $G/G_0-\gamma$ 関係及び $h-\gamma$ 関係が得られることがわかる．ただし，より実験値に近い履歴特性を求める場合には，より高度な降伏モデルを使う等の検討が必要になる．

最後に，$G/G_0-\gamma$ 関係に対する各物性値の不確実性が与える影響を整理する．SSRMA においては，応力をスペクトル展開（PC 展開）するため，それぞれの材料物性からくる不確実性を分離することが可能になる．**図–14** に $G/G_0-\gamma$ 関係の変動係数，並びにせん断弾性係数及びせん断強度の不確実性からくる寄与 C_{G_0} 及び C_{S_u} を示す．ここで，$G/G_0-\gamma$ 関係の変動係数はそれぞれの物性値からくる寄与 C_{G_0} 及び C_{S_u} の二乗和平方根で与えられる．

$$\mathrm{COV}(G/G_0)=\sqrt{C_{G_0}^2+C_{S_u}^2} \tag{38}$$

図–14 より，変動係数は低い歪レベルでは 0.4 程度であり，歪が大きくなるにつれて 0.6 程度に変化する．これは，各物性値からくる寄与の変化により理解できる．低い歪レベルでは全体の分布の多くが弾性域にあり，C_{G_0} が支配的であるため，G/G_0 の変動係数はせん断弾性係数 G_0 の変動係数程度となっている．歪の増加と伴に塑性化が進み，C_{S_u} が増大し，C_{G_0} が減少していく．最終的には C_{S_u} が支配的となり，G/G_0 の変動係数はせん断強度 S_u の変動係数程度となる．逐次非線形解析を用いて確率論的評価を行う場合，弾性係数 G_0 の不



図–14 剛性の変動係数と地盤物性の不確実性の影響

確実性に加え，直接 $G/G_0-\gamma$ 関係に不確実性を与えることも考えられる．しかし，**図–14** からわかる通り，$G/G_0-\gamma$ 関係の不確実性は G_0 の不確実性と独立ではないと考えられるため，解析におけるばらつきの設定には注意が必要となる．

4. まとめ

本論文では，確率弾塑性モデルを用いて非排水粘土の履歴特性を評価した．その結果，単純な弾完全塑性モデルを用いた場合でも，確率空間への拡張により，決定論的な結果と比べより現実的な動的変形特性を評価することができた．これらの結果は，原位置試験から得られる材料物性値を用いて，履歴特性を評価できる可能性を示唆しており，地盤工学的に重要であると考えられる．また，SSRMA の特徴として，各材料の不確実性が応答値に与える影響を分離できることから，せん断弾性係数とせん断強度の不確実性が履歴特性に与える影響を定量的に評価することができた．これらの結果は，逐次非線形解析において材料物性の不確実性を設定する際に有用な情報となると考えられる．

本手法では材料物性値のばらつきに対して正規分布を仮定した．今後は，より現実的な対数正規分布を対象とした検討も必要となると考えられる．

付録 I 物性場の KL 展開[15),16)]

KL 展開は空間的相関を表現するためのスペクトル展開であり，SSFEM では物性場に適用される．ヤング率 E を空間的相関を持った確率変数とする場合，$E(\boldsymbol{x},\omega)$ は期待値 $\langle E(\boldsymbol{x})\rangle$ と確率成分 $\alpha(\boldsymbol{x},\omega)$ に分けることができる．

$$E(\boldsymbol{x},\omega)=\langle E(\boldsymbol{x})\rangle\left(1+\alpha(\boldsymbol{x},\omega)\right) \tag{I.1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は空間座標，ω は標本空間の標本点である．$E(\boldsymbol{x},\omega)$ に KL 展開を用いると，確率成分 $\alpha(\boldsymbol{x},\omega)$ は以

下のように展開される．

$$\alpha(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\phi_i(\boldsymbol{x})\xi_i(\omega) \tag{I.2}$$

ここで，λ_i 及び ϕ_i は E の共分散関数 $C(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\langle\alpha(\boldsymbol{x}_1,\omega)\alpha(\boldsymbol{x}_2,\omega)\rangle$ の固有値及び固有関数である．

$$\int C(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\phi_i(\boldsymbol{x}_2)d\boldsymbol{x}_2=\lambda_i\phi_i(\boldsymbol{x}_1) \tag{I.3}$$

また，$\xi_i(\omega)$ は期待値 0 で分散 1 の正規確率変数であり，以下の直行性を持つ．

$$\langle\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)\rangle=\delta_{ij} \tag{I.4}$$

簡便のため，KL 展開した $E(\boldsymbol{x},\omega)$ を以下のように記載する．

$$E(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_{i=0}^{M}E^{(i)}(\boldsymbol{x})\xi_i(\omega) \tag{I.5}$$

ここで，$\xi_0=1$ はダミー変数であり，$E^{(0)}(\boldsymbol{x})=\langle E\rangle$ 及び $E^{(i)}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\lambda_i}\phi_i(\boldsymbol{x})\langle E\rangle$ とした．すると，$E(\boldsymbol{x},\omega)$ の分散 VAR$[E]$ は同位置の共分散関数 $C(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ を用いて，

$$\mathrm{VAR}[E]=\langle E\rangle^2 C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \tag{I.6}$$

で与えるため，式 (I.4) の $\xi_i(\omega)$ の直交性より，VAR$[E]$ とスペクトル展開係数の間には以下の関係がある．

$$\mathrm{VAR}[E]=\sum_{i=1}^{\infty}\left(E^{(i)}(\boldsymbol{x})\right)^2 \tag{I.7}$$

付録 II　応答場の PC 展開[17),18)]

PC 展開は複雑な確率分布を表現するための展開であり，SSFEM では変位 u 等の応答場に適用する．変位 u を PC 展開すると, KL 展開の確率変数 ξ を用いて以下のように展開される．

$$u(\boldsymbol{x},\omega)=a_0\Gamma_0+\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{i_1}\Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) +\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}a_{i_1i_2}\Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega),\xi_{i_2}(\omega))+\dots \tag{II.1}$$

ここで，Γ_p は p 次の Polynomial Chaos(PC) であり，

$$\Gamma_p(\boldsymbol{\xi})=(-1)^p\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\right)\times\frac{\partial^p}{\partial\xi_{m_1}\dots\partial\xi_{m_p}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\right) \tag{II.2}$$

で与えられる．また，$\boldsymbol{\xi}(\omega)$ は任意の $\xi_i(\omega)$ を成分とするベクトルである．1 次の PC は $\Gamma_1(\xi_i(\omega))=\xi_i(\omega)$ であるが，2 次以上の PC は ξ の多項式で表されるため，PC 展開を用いることで複雑な確率変数を表現することができる．また，簡便のため，式 (II.1) を以下のように表記する．

$$u(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_{n=0}^{P-1}u^{(n)}(\boldsymbol{x})\Psi_n\left(\{\xi(\omega)\}\right) \tag{II.3}$$

ここで，P は KL 展開次数 M，PC 展開次数 p により以下で求められる．

$$P=1+\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{s!}\prod_{k=0}^{s-1}(M+k) \tag{II.4}$$

また，$\Psi_n\left(\{\xi(\omega)\}\right)$ は，以下の直行性を持つ．

$$\langle\Psi_n\left(\{\xi(\omega)\}\right)\Psi_m\left(\{\xi(\omega)\}\right)\rangle=\delta_{nm} \tag{II.5}$$

参考文献

1) Ghanem, R.G. and Spanos, P.D.: *Stochastic Finite Elements -A Spectral Approach-,* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
2) Anders, M., and Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Methods Eng.,* Vol.46, No.11, pp.1897-1916, 1999.
3) Anders, M., and Hori, M.: Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies, *Int. J. Numer. Methods Eng.,* Vol.51, No.4, pp.449-478, 2001.
4) Hori M, Munasinghe S.: Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body. *Mechanics of Materials.,* Vol.31, No.7, pp.471-486, 1999.
5) Jeremic, B., Sett, K., and Kavvas, M. L.: Probabilistic elasto-plasticity: Formulation in 1D, *Acta Geotech.,* Vol.2, No.3, pp.197-210, 2007.
6) Jeremic, B., Sett, K., and Kavvas, M. L.: Probabilistic elasto-plasticity: solution and verification in 1D, *Acta Geotech.,* Vol.2, No.3, pp.211-220, 2007.
7) Jeremic, B., and Sett, K.: On probabilistic yielding of materials, *Commun. Numer. Methods Eng.,* Vol.25, No.3, pp.291-300, 2009.
8) Sett, K., Jeremic, B., and Kavvas, M. L.: The role of nonlinear hardening/softening in probabilistic elasto-plasticity, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.,* Vol.31, No.7, pp.953-975, 2007.
9) Sett, K., and Jeremic, B.: Forward and backward probabilistic simulations in geotechnical engineering, *Contemporary topics in in situ testing, analysis, and reliability of foundations,* Geotechnical Special Publications No. 186, ASCE, New York, pp.111, 2009.
10) Sett, K., and Jeremic, B.: Probabilistic yielding and cyclic behavior of geomaterials, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.,* Vol.34, No.15, pp.1541-1559, 2010.
11) Sett, K. and Jeremic, B.: Stochastic Elastic-Plastic Finite Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* Vol.200, No.9-12, pp.997-1007, 2011.
12) 羽場一基，堀田渉，畑明仁，渡辺和明，堀宗朗：スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの基礎的検討，土木学会論文集 （投稿中）
13) Sett, K., Unutmaz, B., Cetin, K., Koprivica, S., and Jeremic, B.: Soil Uncertainty and Its Influence on Simulated $G/G_{\max}$ and Damping Behavior, *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,* Vol.137, No.3, pp.218-226, 2011.
14) Simo JC, Hughes TJR.: *Computational Inelasticity,* Springer, New York, 1998.
15) K. Karhunen; Uber lineare methoden in der wahrscheinlich-keitsrechnung, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A, I. Mathematica-Physica.,* Vol.37, pp.1-79, 1947.
16) M. Loeve; Fonctions aleatoires du second ordre, Sup-

plement to P. Levy, Processus Stochastic et Mouvement Brownien, 1948.
17) N.Wiener; The homogeneous chaos, *American Journal of Mathmatics,* Vol.60, pp.897-936, 1938.
18) R.H.Cameron and W.T.Martin; The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals, *Annals of Mathematics,* Vol.48, pp.385-392, 1947.
19) Hara, A., Ohta, T., Niwa, M., Tanaka, S., and Banno, T.: Shear modulus and shear strength of cohesive soils, *Soils and Foundations,* Vol.14, No.3, pp.1-12, 1974.
20) Ohya, S., Imai, T., and Matsubara, M.: Relationship between N-value by SPT and LLT pressuremeter results, *Proc., 2nd European Symp. on Penetration Testing,* Amsterdam, Vol.1, pp.125-130, 1982.
21) Phoon, K.-K., and Kulhawy, F. H.: Evaluation of geotechnical property variability, *Can. Geotech. J.,* Vol.36, No.4, pp.625-639, 1999.
22) Idriss, I. M.: Response of soft soil sites during earthquakes, *Proc., Symp. to Honor Professor H. B. Seed,* BiTech Publishers, Vancouver, BC, Canada, pp.273-289, 1990.
23) Stokoe, K. H., II, Darendeli, R. B., Gilbert, R. B., Menq, F.-Y., and Choi, W. K.: Development of a new family of normalized modulus reduction and material damping curves, *Proc., Int. Workshop on Uncertainties in Nonlinear Soil Properties and Their Impact on Modeling Dynamic Soil Response,* Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley, CA, 2004.
24) Phoon, K.-K., and Kulhawy, F. H.: Characterization of geotechnical variability, *Can. Geotech. J.,* Vol.36, No.4, pp.612-624, 1999.
25) Ladd, C. C.: Stability evaluation during staged construction, *J. Geotech. Eng.,* Vol.117, No.4, pp.540-615, 1991.
26) Vucetic, M., and Dobry, R.: Effect of soil plasticity on cyclic response, *J. Geotech. Eng.,* Vol.117, No.1, pp.89-107, 1991.

APPLYING A STOCHASTIC ELASTO-PLASTICITY APPROACH TO EVALUATE INFLUENCE OF SOIL UNCERTAINTY ON HYSTERESIS CHARACTERISTICS

Kazumoto HABA, Wataru HOTTA, Hideaki SONOBE, Akihito HATA, Kazuaki WATANABE and Muneo HORI

In this paper, the influence of soil uncertainty on hysteresis characteristics is analyzed by applying spectral stochastic return mapping algorithm to simulate stress-strain relation of clay. In this simulation, von Mises elastic-perfect plastic model is used with two probabilistic soil parameters, which are elastic shear modulus and undrained shear strength obtained by SPT. It is shown that stochastic elesto-plastic model can evaluate plausible hysteresis characteristics and its uncertainty.